

Л. В. КАНТОРОВИЧ

Избранные труды

МАТЕМАТИКО-  
ЭКОНОМИЧЕСКИЕ  
РАБОТЫ



*A. King*

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
Институт математики им. С. Л. Соболева

УДК 51:33  
ББК 65.23  
К19

*Серия основана в 1932 г.*

Ответственные редакторы  
*С. С. Кутателадзе, И. В. Романовский*

**Канторович Л. В.** Математико-экономические работы / Л. В. Канторович. — Новосибирск: Наука, 2011. — 760 с. — (Избранные труды).

ISBN 978-5-02-019076-4.

Академик Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) — выдающийся математик и экономист, лауреат Сталинской (1949), Ленинской (1965) премий и Нобелевской премии по экономике (1975).

Издание содержит пионерские работы Л. В. Канторовича по математическому программированию и математической экономике, выполненные им в 1938–1960 гг. Большая часть этих работ давно стала библиографической редкостью, а некоторые были опубликованы спустя много лет после написания или вовсе не были опубликованы по идеологическим соображениям. Документированная публикация этих работ с указанием времени их написания подтверждает приоритет российской науки в области оптимизационного подхода в исследовании экономики.

Книга ориентирована на широкий круг читателей, интересующихся математическими методами в экономических исследованиях.

**Kantorovich L. V.** Mathematical-Economic Articles / L. V. Kantorovich. — Novosibirsk: Nauka, 2011. — 760 p. — (Selected Works).

Academician Leonid Vital'evich Kantorovich (1912–1986) was a prominent mathematician and economist who was awarded with a Stalin Prize (1949), a Lenin Prize (1965), and a Nobel prize in economics (1975).

The book contains Kantorovich's pioneering articles in mathematical programming and mathematical economics which were completed from 1938 to the 1960s. Most of these articles are bibliographic rarities, while some of them were published after the lapse of many years from the date of their writing or were never published at all by some ideological reasons. Documented publication of the articles with the genuine time data corroborates the priority of the Russian science in the area of the approach to economic studies which bases on optimization.

The book is intended for the wide readership of those interested in the mathematical methods of economic studies.

Утверждено к печати Ученым советом

Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

РФФИ

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 11-01-07049-д.*

*Издание РФФИ не подлежит продаже*

ISBN 978-5-02-019076-4

- © Л. В. Канторович, 2011
- © Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2011
- © Российская академия наук и издательство «Наука», серия «Избранные труды» (разработка, оформление), 1932 (год основания), 2011
- © Редакционно-издательское оформление. Сибирская издательская фирма «Наука» и Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2011

## О томе математико-экономических работ Л. В. Канторовича

Академик Леонид Витальевич Канторович (1912–1986) — выдающийся математик и экономист, лауреат Сталинской (1949), Ленинской (1965) премий и Нобелевской премии по экономике (1975).

В 1926 г. поступил в Ленинградский университет. С 1930 — аспирант и действительный член Научно-исследовательского института математики и механики ЛГУ (по 1940 г.), с 1932 — доцент, а с 1934 по 1960 г. (с перерывом в 1941–1944 гг.) — профессор ЛГУ. Основные научные достижения Л. В. Канторовича связаны именно с периодом его работы в Ленинградском университете. Он является основателем ленинградских научных школ в области функционального анализа, вычислительной математики и математической экономики и инициатором (впервые в СССР) подготовки в университете специалистов по вычислительной математике (с 1948 г.) и экономической кибернетике (с 1958 г.).

В настоящий том включены 17 пионерских работ Л. В. Канторовича по математическому программированию и математической экономике, выполненных им в 1938–1960 гг. Некоторые из этих работ были опубликованы своевременно, однако большая их часть — с опозданием на 10–15 лет (или вовсе не были опубликованы по идеологическим причинам). Эти издания давно стали библиографической редкостью, что само по себе оправдывает их переиздание. Однако документированная публикация этих работ с указанием времени их написания необходима еще и для подтверждения приоритета российской науки в области оптимизационного подхода в исследовании экономики и уяснения роли и места Л. В. Канторовича в развитии мировой науки.

Следует также заметить, что в двухтомник избранных математических работ Л. В. Канторовича<sup>1)</sup>, вышедший в 1996 г., ни одна из предлагаемых к изданию работ не вошла, хотя именно благодаря этим работам его имя столь широко известно.

Перечислим эти работы.

### 1. Математические методы организации и планирования производства.

Работа вышла в издательстве ЛГУ в 1939 г. тиражом 1000 экз. и представляет расширенную стенограмму доклада, сделанного Л. В. Канторовичем в мае 1939 г. Эта работа содержит изложение нового математического аппарата, впоследствии получившего название «линейного программирования». Работа переиздавалась с довольно значительными, но несущественными изменениями в 1959 г. в сборнике

---

<sup>1)</sup>Selected Works. Part 1: Descriptive Theory of Sets and Functions. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces / Ed. by S. S. Kutateladze. — London: Gordon and Breach, 1996. — 374 p. Selected Works. Part 2: Applied Functional Analysis. Approximation Methods and Computers / Ed. by S. S. Kutateladze and J. V. Romanovsky. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. — 394 p.

«Применение математики в экономических исследованиях». Она была переведена на китайский (1959), польский (1960), итальянский (1961) и др. языки. Публикация английского перевода этой работы в 1960 г. в *Management Science* вызвала сенсацию в США, а Л. В. Канторовичу был присужден почетный диплом Американского общества Исследования Операций, как автору лучшей работы 1960 г. в области исследования операций.

## **2. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов.**

Книга вышла в 1959 г. тиражом 3000 экз., а в 1960 г. была допечатка тиража — 6000 экз. Более книга не переиздавалась, хотя сам Л. В. Канторович несколько раз приступал к подготовке такого переиздания, но так его и не осуществил. Книга сразу же вызвала громадный интерес как в СССР, так и на Западе и стала основанием для присуждения Ленинской и Нобелевской премий. Была переведена на английский, испанский, польский, румынский, сербский, словацкий, французский и японский языки. Ее выход вызвал целый поток рецензий и аналитических статей, хвалебных на Западе и ругательных — обвинения в антимарксизме — в России. Тем не менее она оказала огромное влияние на формирование взглядов многих молодых в то время экономистов, о чем неоднократно говорили академики Аганбегян, Анчишкин, Петраков, Шаталин и др., и тем самым и на развитие экономической науки в СССР и социалистических странах.

Основной текст книги написан Л. В. Канторовичем в 1942 г. При издании в 1959 г. в текст внесены определенные изменения, связанные либо с необходимостью его осовременить, либо по цензурным соображениям. При наборе мы выделили в тексте издания 1959 г. то, что относится к 1942 г., а те куски, которые не вошли в издание, поместили в примечания. При этом была учтена проделанная самим Л. В. Канторовичем работа по подготовке переиздания. Такой способ переиздания нам представляется в наибольшей степени учитывающим волю самого автора, который, в частности, писал: «Мне хотелось бы опубликовать работы по возможности в первоначальном виде, с небольшими изменениями и дополнениями, так как тот факт, что они выдержали испытание временем, является также известным доводом в их пользу, но не знаю, удастся ли это». В цитируемом письме А. Н. Колмогорову, датированном апрелем 1957 г., речь идет о предполагавшемся в 1957 г. издании в ЛГУ этой и других работ Л. В. Канторовича начала 40-х годов.

Существенным представляется и другое соображение. Фундаментальным фактом экономической теории является следующее утверждение: для того чтобы экономика находилась в оптимальном по Парето состоянии, необходимо и достаточно существования неотрицательных равновесных цен для этого состояния. Этот факт был установлен американскими экономистами в начале 50-х годов и считается одним из блестящих достижений. Доказательство этого факта оказалось возможным именно благодаря появлению линейного программирования. Но это утверждение, хотя чуть иначе сформулированное, фактически содержится в тексте Л. В. Канторовича 1942 г.

## **3. Показатели работы предприятий нуждаются в пересмотре.**

Критическая записка, подготовленная Л. В. Канторовичем либо в конце 1942 г., либо в начале 1943 г. Хотя формально эта записка никак не связана с «Экономи-

ческим расчетом наилучшего использования ресурсов», содержательно она существенно опирается на него и может рассматриваться как приложение к предыдущей работе. При жизни автора работа не публиковалась, было два малотиражных издания в 1993 и 2002 гг.<sup>2)</sup>

#### 4. Об исчислении общественно-необходимого времени в условиях социалистического производства.

Работа написана в 1943 г. с целью дать идеологически приемлемую трактовку объективно обусловленных оценок, введенных в «Экономическом расчете наилучшего использования ресурсов». Была направлена в журнал «Под знаменем марксизма», получила «кисло-сладкий» отзыв Л. Б. Альтера, датированный мартом 1944 г. (второй рецензент отзыв давать побоялся). В мае 1945 г. статья была возвращена автору «в связи с закрытием журнала». С 1957 г. Л. В. Канторович в течение 3-х лет добивался ее напечатания в «Вопросах экономики», пока, наконец, ее в сильно урезанном виде и с другим названием удалось опубликовать<sup>3)</sup>. Полностью эта работа никогда не печаталась.

#### 5. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков.

Вышедшая в 1949 г. в сборнике «Проблемы повышения эффективности работы транспорта» тиражом 2,5 тыс. экз. совместная статья Л. В. Канторовича и М. К. Гавурина «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков» никогда не переводилась и не переиздавалась. Была написана в 1940 г. и тогда же (в декабре 1940 г.) впервые направлена в печать в журнал «Железнодорожный транспорт». 26 февраля 1941 г. докладывалась в Доме ученых. И сама работа, где впервые во всей полноте, включая детальное описание метода решения, рассмотрена наиболее показательная из задач линейного программирования, и десятилетняя история ее публикации представляют значительный интерес. В архиве Л. В. Канторовича сохранилась длительная переписка с различными изданиями в связи с публикацией этой работы.

Десятилетняя задержка с публикацией тем более обидна, что за то время, пока статья моталась по редакциям, ее содержание во многом было перепечатано. Правда, американские работы еще не были доступны — исследования по линейному программированию, начавшиеся с 1947 г., оформлялись, как правило, в виде внутренних отчетов Rand Corporation (Американские ВВС). Так что первой развернутой публикацией стал появившийся только в 1951 г. сборник статей под редакцией Тьяллинга Купманса «Activity analysis of production and allocation». Установлению приоритета Л. В. Канторовича отчасти способствовала короткая заметка в Докладах АН «О перемещении масс» 1942 г., в которой Леонид Витальевич, помимо более общего и математически важного содержания, сформулировал квинтэссенцию

<sup>2)</sup>Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1991. — Вып. 50 (67) [К 80-летию академика Л. В. Канторовича. Часть I]. — С. 16–44. Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый: в 2 т. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, фил. «Гео», 2002. — Т. 1. — С. 375–396.

<sup>3)</sup>Об исчислении производственных затрат // *Вопр. экономики.* — 1960. — № 1. — С. 122–134.

и этой работы — теорему о потенциалах и указание на метод решения. Кроме того, там была и ссылка на нее, как на находившуюся в то время в печати.

Т. Купманс, получивший в 1957 г. от Л. В. Канторовича вместе с брошюрой «Математические методы организации и планирования производства» и экземпляр этой работы, в предисловии к публикации перевода брошюры в *Management Science*<sup>4)</sup> так оценивал их значимость: «Обе статьи являются исключительными документами в истории науки управления, линейного программирования и экономической теории вообще. В статье 1949 г. обсуждаются однопродуктовая и многопродуктовая транспортные модели (в том числе с пустыми вагонами), модель с сетью ограниченной пропускной способности, а также приложение этих моделей к железнодорожной сети вокруг Москвы».

### **6. Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте.**

В своих воспоминаниях «Мой путь в науке», рассказав о трудностях, возникших с публикацией его работы по транспортной задаче, Л. В. Канторович далее говорит, что «примерно такая же судьба постигла» и статью о «рациональном раскром древесины на пиловочник наиболее высокой ценности. Она пролежала в редакции журнала «Лесная промышленность» до 1949 г. и только тогда вышла в свет, — это был год, когда я, правда за другие работы, получил Государственную премию».

Работа была выполнена, по крайней мере, уже к весне 1940 г. и направлена в журнал «Механическая обработка древесины» (ее публикация предполагалась в № 8 за 1940 г.), но затем по каким-то причинам была отвергнута. В начале 1941 г. Л. В. Канторович направил ее в редакцию «Лесной промышленности», она получила хвалебный отзыв и должна была выйти в майском номере журнала. Начавшаяся война надолго задержала ее выход.

Помимо новизны своего содержания работа интересна еще и тем, что показывает, насколько глубоко Л. В. Канторович вникал в технические детали конкретных областей приложения. В его архиве сохранились материалы о реальных задачах, связанных с лесопилением, которыми он занимался в начале 40-х гг., а также переписка по поводу публикации.

### **7. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем.**

Короткая заметка в Докладах АН СССР (1940. — Т. 28, № 3. — С. 212–215). Первое изложение математической сути решения задач на краевой экстремум (математического программирования).

### **8. О перемещении масс.**

Заметка в Докладах АН СССР (1942. — Т. 37, № 7/8. — С. 227–229). Излагается бесконечномерный аналог транспортной задачи.

Коротко рассказав о трудной судьбе статьи о транспортной задаче, Л. В. Канторович далее вспоминает: «К счастью, я сделал абстрактный вариант этой задачи —

---

<sup>4)</sup> *Koopmans T. C. A Note about Kantorovich's Paper, Mathematical Methods of Organizing and Planning Production // Management Science. — July 1960. — N 4.*



заметку о перемещении масс в компактном метрическом пространстве, в которой был и критерий и метод потенциалов. В конце приводилось две задачи — задача о железнодорожных перевозках (со ссылкой на находящуюся в печати нашу статью с М. К. Гавуриным) и задача о выравнивании площади аэродрома, которая также носит прикладной характер. Эта работа, опубликованная в 1942 г. на русском и английском языках, по-видимому, была первой, из которой специалисты на Западе узнали о моих работах по линейному программированию, но это произошло только в начале 50-х гг.».

Т. Купманс, в течение нескольких лет разыскивавший эту работу, прочтя ее, писал 12 ноября 1956 г.: «Дорогой профессор Канторович. Недавно мне представился случай ознакомиться с экземпляром Вашей статьи «О перемещении масс» в Докладах Академии Наук СССР за 1942 г. Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США, которое началось в период с 1941 г. и продолжается по настоящее время. Я прилагаю к письму краткий перечень наиболее важных статей, появившихся в американской литературе... В то же время я хотел бы отметить, что Ваша краткая статья в замечательно сжатой форме содержит математическое существо того, что содержится в этих работах».

Перевод этой работы был в 1958 г. опубликован в *Management Science*.

Работа замечательна еще и тем, что в ней впервые введена так называемая метрика Монжа — Канторовича, исследование которой было развито в более поздних статьях (1957 и 1958 гг.), совместных с Г. Ш. Рубинштейном<sup>5)</sup>. Эта метрика нашла многочисленные приложения в теории вероятностей, эргодической теории, статистической физике и даже в космологии и широко используется в современной математике. Сюда же примыкает одностраничная заметка в «Успехах математических наук», в которой на основании теоремы 1942 г. в «два слова» решается классическая проблема Монжа о перемещении грунта<sup>6)</sup>.

### 9. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач<sup>7)</sup>.

Работа фактически выполнена в 1941 г. и ее основные результаты докладывались на научной сессии ЛГУ 12 мая 1941 г. Содержит математическое исследование тех моделей экономики, которые словесно описаны в «Экономическом расчете наилучшего использования ресурсов».

### 10. Рациональные методы раскроя металла.

Наиболее ранняя из публикаций о прикладных задачах линейного программирования, которыми занимался Л. В. Канторович<sup>8)</sup>. Никогда не переиздавалась и, наверняка, недоступна современному читателю. В дальнейшем идеи этой работы

<sup>5)</sup> Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 115, № 6. — С. 1058–1061; Об одном пространстве вполне аддитивных функций // Вестн. ЛГУ. — 1958. — № 7. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 2. С. 52–59.

<sup>6)</sup> Об одной проблеме Монжа // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 2. — С. 225–226.

<sup>7)</sup> Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 115, № 3. — С. 441–444.

<sup>8)</sup> «Производственно-технический бюллетень Наркомата боеприпасов СССР» (ДСП). — 1942. — № 7/8. — С. 21–29.

(и частично текст) были использованы в совместной с В. А. Залгаллером книге о раскрое 1951 г.

### **11. Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичных функционалов<sup>9)</sup>.**

Основные результаты работы докладывались на семинаре отдела приближенных вычислений МИАН 21 октября 1943 г. В работе предлагается градиентный метод — метод наискорейшего спуска — для нахождения минимума квадратичного функционала, идея которого восходит еще к Коши. Тут же обсуждаются и способы реализации этого метода в широком круге различных математических задач, к которым он может быть применен. Как указывается в самой работе, «хотя изложение данного метода принято независимое, но он связан с общими концепциями автора, относящимися к трактовке экстремальных проблем». Аналогичный метод был предложен в работе Р. Куранта 1943 г., но им не был указан ключевой его момент — выбор длины шага в направлении градиента.

### **12. Функциональный анализ и прикладная математика.**

Обзорный доклад о цикле работ Л. В. Канторовича по применению функционального анализа в вычислительной математике, сделанный на научной сессии ЛГУ 4 ноября 1947 г. и опубликованный в «Вестнике ЛГУ»<sup>10)</sup>. Этот цикл работ был отмечен первой премией университета «за лучшую научную работу 1947 г.» (приказ от 25.02.48) и Сталинской премией 1949 г. В этом докладе значительное место уделено оптимизационным задачам.

### **13. Расчет рационального раскроя промышленных материалов.**

Перепечатаны наиболее интересные параграфы (в частности, все математические приложения) из совместной с В. А. Залгаллером книги, вышедшей в 1951 г.<sup>11)</sup> и отражающей результаты конкретной работы, которую провели под руководством Л. В. Канторовича его сотрудники, прежде всего В. А. Залгаллер, на ряде ленинградских заводов по внедрению методики рационального раскроя. Эта работа стала первым в мире масштабным применением линейного программирования в реальных производственных условиях, и, несмотря на высокую размерность многих из возникавших задач, их удавалось решать, не располагая в то время вычислительными машинами. В книге впервые методы решения соответствующих задач линейного программирования были детально описаны, и хотя ее появление совпало по времени с первыми американскими публикациями по линейному программированию, она является убедительной демонстрацией того, насколько работы, проводимые Канторовичем, опережали в то время американские разработки. И она же является убедительной демонстрацией того, что советская экономическая система была абсолютно невосприимчива к нововведениям.

Книга интересна еще и тем, что в ней, помимо линейного программирования, фактически используются идеи и динамического программирования и метода «ветвей и границ».

<sup>9)</sup> Докл. АН СССР. — 1945. — Т. 48, № 7. — С. 483–487.

<sup>10)</sup> Вестн. ЛГУ. — 1948. — № 6. — С. 3–18.

<sup>11)</sup> Л.: Газ.-журн. и кн. изд-во, 1951. — 198 с.

**14. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели<sup>12)</sup>.**

Эта совместная с Л. И. Горьковым работа открывает довольно важную тему в математико-экономических исследованиях Л. В. Канторовича, к которой он неоднократно обращался в дальнейшем на протяжении почти всей жизни. Подобного же рода модели почти в то же время стали объектом исследований и на Западе.

**15. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений<sup>13)</sup>.**

Эта работа является одной из последних математических работ Л. В. Канторовича и содержит ряд оригинальных предложений, относящихся к вычислительной математике. Она представляет несколько дополненный текст докладов, прочитанных автором в мае 1962 г. в Ленинградском и Новосибирском университетах и в Московском математическом обществе. Содержащиеся в ней идеи близки к развиваемым в других работах этого сборника.

**16. Математические и вычислительные проблемы в планово-экономических вопросах.**

В 1957 г. после вынужденного долгого молчания о своих экономических работах Л. В. Канторович получает, наконец, возможность рассказать о них в разных аудиториях. Среди текстов десятка таких выступлений, сохранившихся в его архиве, и публикуемый доклад, сделанный 3.12.1957 г. на научной сессии ЛГУ. Его текст, в отличие от многих остальных, был очень квалифицированно записан и отредактирован.

**17. О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта. I.**

Судя по воспоминаниям Л. В. Канторовича, публикуемая рукопись относится, скорее всего, к осени 1938 г.

*В. Л. Канторович, С. С. Кутателадзе, И. В. Романовский*

<sup>12)</sup> Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 129, № 4. — С. 732–735.

<sup>13)</sup> Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 701–709.

# Канторович и математизация экономики

С. С. Кутателадзе

Слова «математико-экономические работы» в заголовке тома избранных сочинений Леонида Витальевича Канторовича воспринимаются сейчас как вполне обыденные. Между тем 200 лет назад появление сочинения с подобным названием было немислимо в принципе.

## 1. Математика и экономика

Математика изучает формы мышления. Предмет экономики — обстоятельства человеческого поведения. Математика абстрактна и доказательна, а профессиональные решения математиков не задевают обычную жизнь людей. Экономика конкретна и декларативна, а практические упражнения экономистов основательно жизнь меняют. Цель математики — безупречные истины и методы их получения. Цель экономики — индивидуальное благополучие и пути его достижения. Математика не вмешивается в личную жизнь человека. Экономика задевает его кошелек и кошелку. Список капитальных различий математики и экономики бесконечен.

Математическая экономика — новация двадцатого века. Именно тогда возникло понимание того, что экономические проблемы требуют совершенно нового математического аппарата.

Человек разумный всегда был, есть и будет человеком хозяйствующим. Практическая экономика для каждого из нас и наших предков — это арена здравого смысла. Здравый смысл представляет собой особую способность человека к мгновенным оценочным суждениям. Понимание выше здравого смысла и проявляется как осознанная адаптивность поведения. Понимание не наследуется и, стало быть, не принадлежит к числу врожденных свойств. Уникальной особенностью человека является способность пониманием делиться, превращая оценки в материальные и идеальные артефакты.

Культура — сокровищница понимания. Инвентаризация культуры — суть мировоззрения. Здравый смысл субъективен и родствен духовному подъему веры, т. е. силе, превышающей возможности фактов и логики. Проверка суждений с помощью фактов и логики — критический процесс, освобождающий человека от ошибок субъективизма. Наука — трудный путь объективизации понимания. Религиозное и научное мировоззрения отличаются по сути способом кодификации артефактов понимания.

Становление науки как инструмента понимания — долгий и сложный процесс. Зарождение ординального счета фиксировано палеолитическими находками, отделенными десятками тысяч лет от явления разумного и хозяйствующего человека. Экономическая практика предвдывает предысторию математики, сформировавшуюся в науку доказательных вычислений в Древней Греции примерно 2500 лет тому назад.

Целенаправленное поведение людей в условиях ограниченных ресурсов стало объектом науки совсем недавно. Датой рождения экономики как науки принято считать 9 марта 1776 г. — день публикации сочинения Адама Смита «Исследование о природе и причинах богатства народов».

## 2. Проблема синтеза мышления

Идеи правят миром. Эту банальную констатацию когда-то с глубокой иронией дополнил Джон Мейнард Кейнс. Свой капитальный труд «Общая теория занятости, процента и денег» он завершил крылатым афоризмом: «Практические люди, мнящие себя совершенно неподверженными никаким интеллектуальным влияниям, обычно являются рабами какого-нибудь замшелого экономиста».

Политические идеи направлены на власть, экономические — на свободу от власти. Политическая экономия неразрывна не только с экономической практикой, но и с практической политикой. Политизированность экономических учений характеризует их особое положение в мировой науке. Изменчивость эпох, их технологических достижений и политических предпочтений отражается в широком распространении эмоционального подхода к экономическим теориям и ставит экономику в положение, немислимое для остальных наук. Помимо благородных причин, для этого есть и одна довольно циничная: как бы ни меняли достижения точных наук жизнь человечества, они никогда не затрагивают обыденное сознание людей столь живо и остро, как суждения об их кошельках и свободах.

Наука — чувственно-сверхчувственный артефакт в том смысле, что ее содержание раскрывается только человеком и без человека, по меньшей мере, вполне понято быть не может. Расположенная в самом центре культуры, наука напоминает «Вавилонскую башню» — наивный, но героический и великий проект народов Земли. Стремление к свободе, внутренне присущее человеку, проявляется в неистребимой жажде знания. «Мы должны знать, мы будем знать!» — этот уже вековой тезис Давида Гильберта лежит в кладовой здравого смысла.

Георг Кантор, создатель теории множеств, еще в 1883 г. заметил, что «сущность математики заключена в ее свободе». Свобода математики отнюдь не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования. Свобода математики в немалой мере проявляется в предоставляемых ею новых интеллектуальных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости. Математизация экономики — неизбежный этап пути человечества в царство свободы.

Девятнадцатый век отмечен первыми попытками применения математических методов в экономике в работах Антуана Огюста Курно, Карла Маркса, Уильяма Стенли Джевонса, Леона Вальраса и его преемника по Лозаннскому университету Вильфредо Парето.

В двадцатом веке к экономической проблематике обратились математики первой величины — Джон фон Нейман и Леонид Канторович. Первый развил теорию игр как аппарат изучения экономического поведения, а второй разработал линейное программирование как аппарат принятия решений о наилучшем использовании ограниченных ресурсов. Значение исследований фон Неймана и Канторовича далеко выходит за рамки их выдающихся технических результатов. Их достижения

показали, что современная математика предоставляет самые широкие возможности для экономического анализа практических проблем. Экономика приблизилась к математике. Оставаясь гуманитарной, она стремительно математизируется, демонстрируя высокую самокритичность и незаурядную способность к объективным суждениям.

Поворот в мышлении человечества, осуществленный фон Нейманом и Канторовичем, не всегда достаточно осознается. Между точным и гуманитарным стилями мышления существуют принципиальные различия. Люди склонны к рассуждениям по аналогии и методу неполной индукции, рождающим иллюзию общезначимости знакомых приемов. Различия научных технологий не всегда выделены отчетливо, что в свою очередь способствует самоизоляции и вырождению громадных разделов науки. Методологическую пропасть, зиявшую между экономистами и математиками, к 1920-м годам четко обозначил Альфред Маршалл, основатель кембриджской школы неоклассиков, «маршаллианцев». В своем капитальном трехтомнике он писал:

«функция анализа и дедукции в экономической науке состоит не в создании нескольких длинных цепей логических рассуждений, а в правильном создании многих коротких цепочек и отдельных соединительных звеньев»<sup>1)</sup>.

«Ясно, что в экономической науке нет места для длинных цепей дедуктивных рассуждений, ни один экономист, даже Рикардо, не пытался их использовать. На первый взгляд может показаться, что частое использование математических формул в экономических исследованиях свидетельствует о противоположном. Но при более тщательном рассмотрении станет очевидно, что такое впечатление обманчиво, за исключением случая, когда чистый математик использует экономические гипотезы ради развлекательных упражнений в математике...»<sup>2)</sup>.

В 1906 г., в одном из частных писем, Маршалл сформулировал свое скептическое отношение к применению математики в экономике следующим образом:

«[У меня] в последние годы работы над этим предметом росло ощущение весьма малой вероятности того, что хорошая математическая теорема, имеющая дело с экономическими гипотезами, кажется хорошей экономикой. И я все больше и больше склонялся к следующим правилам:

- (1) Используй математику как язык для стенографии, а не исследовательский механизм.
- (2) Придерживайся математики, пока не закончил дело.
- (3) Переведи на английский.
- (4) Проиллюстрируй примерами, важными в реальной жизни.
- (5) Сожги математику.
- (6) Если не достиг успеха в (4), сожги (3). Особенно часто я пользовался именно последним приемом.

---

<sup>1)</sup> Маршалл А. Принципы политической экономии. — М.: Прогресс, 1984. — Т. III. — С. 225.

<sup>2)</sup> Маршалл А. Там же. — С. 212.

Я не имею ничего против математики, она полезна и необходима, однако очень плохо, что история экономической мысли больше не востребована и даже не предлагается во многих студенческих и аспирантских программах. Это потеря<sup>3)</sup>.

Маршалл последовательно противопоставлял экономическое и математическое мышление, призывая строить многочисленные короткие «гребешки» рассуждений в конкретном экономическом анализе. Ясно, что образ «гребешка» не имеет ничего общего с представлением о перевернутой пирамиде — кумулятивной иерархии универсума фон Неймана, в котором обитает современная теория множеств. Красота и сила математики со времен Древней Эллады до наших дней связаны с аксиоматическим методом, предполагающим вывод новых фактов с помощью сколь угодно длинных цепей формальных импликаций.

Бросающаяся в глаза разница в менталитете математиков и экономистов затрудняет их взаимопонимание и сотрудничество. Невидимы, но вездесущи перегородки мышления, изолирующие математическое сообщество от своего экономического визави. Этот статус-кво с глубокими историческими корнями всегда был вызовом для Канторовича, противоречащим его тезису о взаимопроникновении математики и экономики.

### 3. Мировая линия Канторовича

Канторович родился в Санкт-Петербурге в семье врача-венеролога 19 января 1912 г. (6 января по старому стилю). Интересно, что во многих справочниках указана другая дата. Сам Канторович всегда с улыбкой отмечал, что он себя помнит с 19.01.1912. Дарование мальчика проявилось очень рано. Уже в 1926 г. в возрасте 14 лет он поступил в Ленинградский университет. Вскоре он стал заниматься в кружке, организованном для студентов Г. М. Фихтенгольцем, а затем и в семинаре, посвященном дескриптивной теории функций. Ранние студенческие годы сформировали первую когорту наиболее близких товарищей. В кружке Фихтенгольца занимались также Д. К. Фаддеев, И. П. Натансон, С. Л. Соболев, С. Г. Михлин и др., с которыми Леонид Витальевич был дружен всю жизнь. Старые друзья до конца жизни за глаза называли его «Лёнечка».

Закончив ЛГУ в 1930 г., Канторович начал педагогическую работу в ленинградских вузах, сочетая ее с интенсивными научными исследованиями. Уже в 1932 г. он профессор Ленинградского института инженеров гражданского строительства и доцент ЛГУ. В 1934 г. Канторович становится профессором своей alma mater.

Основные труды в области математики Канторович создал именно в свой «ленинградский» период. При этом в 1930-е годы он публикует больше статей по чистой математике, а 1940-е годы для него — время работ по вычислительной математике, где он стал признанным лидером в стране.

При подготовке собрания сочинений Канторовича в его личном архиве было обнаружено письмо Н. Н. Лузина, датированное 29 апреля 1934 г. Один из первых математиков того времени и основатель знаменитой «Лузитании» писал<sup>4)</sup>:

<sup>3)</sup>Brue S. L. The Evolution of Economic Thought. 5th Edition. — Fort Worth: Harcourt College Publishers, 1993. — P. 294.

<sup>4)</sup>Решетняк Ю. Г., Кутателадзе С. С. Письмо Н. Н. Лузина Л. В. Канторовичу // Вестн. РАН. — 2002. — Т. 72, № 8. — С. 740–742.

«Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас **всего**, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер. Но то что я точно знаю — это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке **неограниченные возможности**. Я не стану произносить соответствующего слова — зачем? Талант — это слишком мало. Вы имеете право на большее...».

С конца 1930-х годов творчество Канторовича обретает новые черты — он совершает серьезный прорыв в экономической науке.

В 1939 г. выходит в свет его знаменитая брошюра «Математические методы организации и планирования производства», ознаменовавшая рождение линейного программирования. В 1940-е годы на поверхности научного информационного потока экономические работы Канторовича практически не публикуются. Однако в его творчестве экономическая проблематика выходит на первый план.

Уже в военные годы он завершает работу над первым вариантом книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», принесшей ему в 1975 г. Нобелевскую премию. Эта работа опережала время, не соответствовала догматам господствующей политической экономии, и ее публикация оказалась возможной только в 1959 г. Пионерские идеи Канторовича были легализованы и начали использоваться в экономической практике.

В 1948 г. Совет Министров СССР особо секретным постановлением № 1990-774сс/оп решил «в двухнедельный срок организовать в Ленинградском филиале Математического института АН СССР расчетную группу в количестве до 15 чел., возложив руководство этой группой на проф. Канторовича». Так Канторович вошел в число участников проекта по созданию отечественного ядерного оружия<sup>5)</sup>.

В 1957 г. Канторовича приглашают на работу во вновь создаваемое Сибирское отделение Академии наук. Вскоре он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР по Отделению экономики. Основные публикации Канторовича этого периода относятся к экономике, за исключением, прежде всего, всемирно известного курса «Функциональный анализ в нормированных пространствах», написанного совместно с Г. П. Акиловым.

Нельзя не отметить одну блестящую придумку Канторовича и его учеников — научные тарифы на такси. Люди старшего поколения помнят, как в 1960-е годы была введена плата за посадку и уменьшена такса за проезд, что немедленно привело к повышению рентабельности перевозок и выгоды коротких поездок для клиентов и водителей. Эта экономическая мера была разработана в результате математического моделирования, осуществленного Канторовичем и группой его молодых учеников-математиков, и опубликована в самом престижном математическом журнале страны — в «Успехах математических наук».

В 1964 г. Канторович избран действительным членом АН СССР по Отделению математики и в 1965 г. удостоен Ленинской премии.

В начале 1970-х годов Канторович переехал в Москву, где продолжил занятия экономическим анализом. Канторович всегда мечтал о внедрении новых математических методов в хозяйственную практику своей Родины и служил этой мечте до

<sup>5)</sup>В оперативной переписке советской разведки — операция «Энормоз».



своей кончины 7 апреля 1986 г., невзирая на непонимание и откровенное противодействие ретроградов от науки и политики, управлявших страной. Он похоронен на Новодевичьем кладбище в Москве.

#### 4. Научное наследие

Научное наследие Канторовича огромно. Его исследования в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций оказали фундаментальное влияние на становление и развитие названных дисциплин. Он по праву входит в число основоположников современной математической экономики.

Канторович — автор более трехсот научных работ, которые при подготовке аннотированной библиографии его сочинений он сам предложил распределить по следующим девяти разделам: дескриптивная теория функций и теория множеств, конструктивная теория функций, приближенные методы анализа, функциональный анализ, функциональный анализ и прикладная математика, линейное программирование, вычислительная техника и программирование, оптимальное планирование и оптимальные цены, экономические проблемы плановой экономики.

Столь впечатляющее многообразие направлений исследований объединяется не только личностью Канторовича, но и его методическими установками. Он всегда подчеркивал внутреннее единство науки, взаимопроникновение идей и методов, необходимых для решения самых разнообразных теоретических и прикладных проблем математики и экономики.

Характерной чертой творчества Канторовича была ориентация на наиболее трудные проблемы и самые перспективные идеи математики и экономики своего времени.

#### 5. Линейное программирование

Главным открытием Канторовича в области математико-экономических методов стало линейное программирование, которое теперь изучают десятки тысяч людей во всем мире. Под этим термином скрывается колоссальный раздел науки, посвященный линейным оптимизационным моделям. Иначе говоря, линейное программирование — это наука о теоретическом и численном анализе и решении задач, в которых требуется найти оптимальное значение, т. е. максимум или минимум некоторой системы показателей в процессе, поведение и состояние которого описывается той или иной системой линейных неравенств.

Термин «линейное программирование» был предложен в 1951 г. американским экономистом Т. Купмансом. В 1975 г. Канторович и Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой «за их вклад в теорию оптимального распределения ресурсов». Особой заслугой Купманса стала пропаганда методов линейного программирования и защита приоритета Канторовича в открытии этих методов.

В США линейное программирование возникло в 1947 г. в работах Джорджа Данцига. Поучительно привести его слова об истории линейного программирования<sup>6)</sup>:

«Русский<sup>7)</sup> математик Л. В. Канторович на протяжении ряда лет интересовался применением математики к задачам планирования. В 1939 г. он опубликовал обстоятельную монографию под названием „Математические методы организации и планирования производства“... Канторовича следует признать первым, кто обнаружил, что широкий класс важнейших производственных задач поддается четкой математической формулировке, которая, по его убеждению, дает возможность подходить к задачам с количественной стороны и решать их численными методами...

Канторович описал метод решения, основанный на имеющемся первоначально допустимом решении... Хотя двойственные переменные и не назывались „ценами“, в целом идея метода состоит в том, что выбранные значения этих „разрешающих множителей“ для недостающих ресурсов можно довести до уровня, когда становится целесообразной переброска ресурсов, являющихся избыточными...

Если бы первые работы Канторовича были бы в должной мере оценены в момент их первой публикации, то, возможно, в настоящее время линейное программирование продвинулось бы значительно дальше. Однако его первая работа в этой области оставалась неизвестной как в Советском Союзе, так и в других странах, а за это время линейное программирование стало настоящим искусством».

Следует подчеркнуть, что с оптимальным планом любой линейной программы автоматически связаны оптимальные цены или «объективно обусловленные оценки». Последнее громоздкое словосочетание Канторович выбрал из тактических соображений для повышения «критикоустойчивости» термина.

Концепция оптимальных цен и взаимозависимость оптимальных цен и оптимальных решений — такова краткая суть экономического открытия Канторовича<sup>8)</sup>.

## 6. Универсальная эвристика

Целость мышления проявлялась во всем творчестве Канторовича. Идеи линейного программирования были тесно связаны с его методологическими установками в области математики. В середине 1930-х годов центральное место в математических исследованиях Канторовича занимал функциональный анализ. Главным своим математическим достижением в этой области Канторович считал выделение специального класса порядково полных упорядоченных векторных пространств, которые в отечественной литературе именуют  $K$ -пространствами или пространствами Канторовича<sup>9)</sup>.

---

<sup>6)</sup> Данциг Дж. Б. Линейное программирование, его обобщения и применения: Пер. с англ. — М.: Прогресс, 1966. — С. 29.

<sup>7)</sup> В указанном выше переводе стоит слово «советский», а в английском оригинале «Russian».

<sup>8)</sup> На необходимость указать на основополагающую роль Канторовича в выработке самой концепции оптимальных цен обратил мое внимание А. Г. Аганбегян в отклике на препринт этой вводной статьи.

<sup>9)</sup> В рабочих тетрадях Канторович писал о «моих пространствах».

Уже в первой своей работе в новой области математики, датированной 1935 г., Канторович писал: «В этой заметке я определяю новый тип пространств, которые я называю линейными полуупорядоченными пространствами. Введение этих пространств позволяет изучать линейные операции одного общего класса (операции, значения которых принадлежат такому пространству) как линейные функционалы».

Так была впервые сформулирована важнейшая методологическая установка, которую теперь называют эвристическим принципом Канторовича. Следует подчеркнуть, что в определение линейного полуупорядоченного пространства Канторовичем была включена аксиома условной порядковой полноты, обозначенная  $I_6$ . Роль  $K$ -пространств Канторович продемонстрировал на примере теоремы Хана — Банаха. Оказалось, что в этом центральном принципе функционального анализа можно реализовать принцип Канторовича, т. е. заменить вещественные числа элементами произвольного  $K$ -пространства, а линейные функционалы — операторами со значениями в таком пространстве.

Эвристический принцип Канторовича нашел многочисленные подтверждения как в его собственных исследованиях, так и в работах его учеников и последователей. Этот принцип оказался путеводной идеей, приведшей к глубокой и изящной теории  $K$ -пространств, богатой разнообразными приложениями. Еще в середине прошлого века предпринимались попытки формализации эвристического принципа Канторовича. На этом пути появились так называемые теоремы о сохранении соотношений, которые утверждают, что если некоторое высказывание, включающее конечное число функциональных соотношений, доказано для вещественных чисел, то аналогичный факт автоматически оказывается верным и для элементов  $K$ -пространства. В то же время оставался совершенно неясным внутренний механизм, управляющий феноменом сохранения соотношений, границы его применимости, а также общие причины многих аналогий и параллелей с классическими математическими дисциплинами.

Абстрактные идеи Канторовича в теории  $K$ -пространств связаны с линейным программированием и приближенными методами анализа. В последней своей математической работе, над которой Канторович работал уже смертельно больным, он отмечал<sup>10)</sup>:

«При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов, наряду с алгебраическими и другими соотношениями, большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющее место между всеми объектами, упорядочение, имеет обедненный характер, например, можно все виды упорядочить по их весу, но это мало что дает. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, оно определяется или фиксируется, а в других случаях оставляется неопределенным (частичное упорядочение или полуупорядочение). Например, два набора продуктов несомненно следует считать сравнимыми и первый большим второго, если в нем каждого продукта больше, соответственно, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть

<sup>10)</sup> Канторович Л. В. Функциональный анализ (основные идеи) // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 1. — С. 1–8.

больше в другом, то можно сравнение не фиксировать. Так в свое время была построена теория полуупорядоченных пространств и, прежде всего, теория  $K$ -пространств, определенных выше. Она получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью ее возможности до сих пор еще не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем, в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль и уже при возникновении  $K$ -пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.

Теория  $K$ -пространств имеет и другое значение — их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банаха в качестве нормы могут вместо чисел использоваться элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Такая нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а десятком чисел — максимумами ее на частях этого интервала».

Современные исследования подтвердили, что идеи линейного программирования имманентны теории  $K$ -пространств. Можно доказать, что выполнение любого из принятых вариантов формулировок принципа двойственности линейного программирования в абстрактной математической структуре с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является  $K$ -пространством.

Эвристический принцип Канторовича связан с одной из самых ярких страниц математики прошлого века — со знаменитой проблемой континуума. Как известно, множество имеет мощность континуума, если оно находится во взаимно однозначном соответствии с отрезком числовой прямой. Гипотеза континуума состоит в том, что любое подмножество отрезка либо (не более чем) счетно, т. е. допускает подсчет, либо имеет мощность континуума. Проблема континуума состоит в ответе на вопрос о справедливости или ложности гипотезы континуума.

Гипотеза континуума была впервые высказана Кантором в 1878 г. Он был убежден в том, что эта гипотеза является теоремой и всю жизнь тщетно пытался ее доказать. В 1900 г. в Париже состоялся II Международный конгресс математиков. Гильберт выступил на открытии со своим знаменитым докладом «Математические проблемы», сформулировав 23 проблемы, решение которых девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Первой в докладе Гильберта стоит проблема континуума. Оставаясь нерешенной десятилетиями, она породила глубокие исследования в основаниях математики. В результате более чем полувековых усилий мы теперь знаем, что гипотеза континуума не может быть ни доказана, ни опровергнута.

К пониманию независимости гипотезы континуума человечество пришло в два этапа: в 1939 г. Курт Гёдель проверил, что гипотеза континуума совместна с аксиомами теории множеств, а в 1963 г. Поль Коэн доказал, что им не противоречит и отрицание гипотезы континуума. Оба результата установлены путем предъявления подходящих моделей, т. е. построением универсума и интерпретации в нем теории множеств. Подход Гёделя основан на подходящем «усечении» универсума фон Неймана. Гёдель показал, что выделенные им конструктивные множества образуют модель, в которой имеет место континуум-гипотеза. Следовательно, отрицание гипотезы континуума недоказуемо. Подход Коэна в известном смысле противопо-

ложен технике Гёделя: он основан на контролируемом расширении универсума фон Неймана.

Метод форсинга Коэна был упрощен на языке нестандартных моделей в 1965 г. с использованием аппарата булевых алгебр и новой технологии математического моделирования. Прогресс возникшего на этой основе булевозначного анализа продемонстрировал фундаментальное значение расширенных  $K$ -пространств. Каждое из таких пространств, как оказалось совершенно неожиданно, служит равноправной моделью вещественной прямой и, значит, играет в математике ту же фундаментальную роль. Пространства Канторовича дали новые модели поля вещественных чисел и обрели бессмертие.

Эвристика Канторовича постоянно получает блестящее подтверждение, доказывая целостность науки и неизбежность взаимопроникновения математики и экономики.

## 7. Зов будущего

Идеи Канторовича востребованы человечеством, что видно по учебным планам любого экономического или математического факультета в мире. Аппарат математики и идея оптимальности стали подручными орудиями любого практикующего экономиста.

Экономика как вечный партнер математики избежит слияния с любой эзотерической частью гуманитарных наук, политики, или беллетристики. Новые поколения математиков будут смотреть на загадочные проблемы экономики как на бездонный источник вдохновения и привлекательную арену приложения и совершенствования своих безупречно строгих методов.

Вычисление победит гадание.

## Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности\*)

Леонид Витальевич Канторович — выдающийся ученый, внесший существенный вклад и в математику, и в экономику. Исследования Канторовича в области функционального анализа, вычислительной математики, теории экстремальных задач, дескриптивной теории функций и теории множеств оказали влияние на становление и развитие указанных математических дисциплин, послужили основой для формирования новых научных направлений.

Канторович по праву считается одним из основоположников экономико-математического направления, ядро которого составляет созданное им линейное программирование. Идеи и методы этой дисциплины широко используются для постановки и решения разнообразных экстремальных и вариационных задач не только в экономике, но и в физике, химии, энергетике, геологии, биологии, механике и теории управления. Линейное программирование оказывает существенное влияние также на развитие вычислительной математики и вычислительной техники.

Леонид Витальевич родился 19 января 1912 г. в Петербурге в семье врача. Его творческие способности проявились необычайно рано. Уже в возрасте 15 лет он начал активную научную деятельность в семинарах В. И. Смирнова, Г. М. Фихтенгольца и Б. Н. Делоне. Первые работы Леонида Витальевича относились к дескриптивной теории функций и множеств. В основном они были выполнены в 1927–1929 гг. Теория функций вещественного переменного и теория множеств занимали тогда одно из центральных мест в математике и оказывали существенное влияние на развитие других ее разделов. Леониду Витальевичу удалось решить ряд трудных и принципиальных проблем в этой области.

После окончания ЛГУ в 1930 г. он преподавал в высших учебных заведениях Ленинграда, продолжая при этом активную научную деятельность. Из этих учебных заведений кроме университета особо упомянем институт инженеров промышленного строительства (ЛИИПС), в котором он работал с весны 1930 по 1948 г. В 1939 г. ЛИИПС был преобразован в Высшее военное инженерно-техническое училище. В годы Великой Отечественной войны Леонид Витальевич состоял в вооруженных силах (в конце войны — в звании подполковника), и преподавание и заведование кафедрой математики в ВВИТУ было его основной работой. В это время он составил оригинальный курс «Теории вероятностей» [1946, 1]<sup>1)</sup>, предназначенный для военных учебных заведений и отражающий специфические военные

---

\*) Эта и следующая статьи представляют собой обновленную версию вводных статей, помещенных в библиографии Л. В. Канторовича (см. 1989 и 2002 в статье «Литература о жизни и трудах Л. В. Канторовича»). Вариант, вышедший в 1989 г., был подготовлен еще по консультации с Л. В. Канторовичем, поэтому внесенные изменения и пояснения носят в основном технический характер.

<sup>1)</sup> Ссылки даны по библиографическим спискам «Литература о жизни и трудах Л. В. Канторовича» и «Хронологический указатель трудов».

приложения этой науки. Это училище, называемое теперь Военным инженерно-техническим университетом, и сейчас гордится тем, что там работал Канторович<sup>2)</sup>, и в память о нем на здании ВВИТУ в Петербурге установлена мемориальная доска.

Уже с 1932 г. Леонид Витальевич работал в ЛИИПС в должности профессора, а в январе 1934 г. был утвержден в этом звании и с тех пор был профессором университета вплоть до своего отъезда в Новосибирск. В 1935 г. ему была присуждена ученая степень доктора физико-математических наук без защиты диссертации.

Вскоре после выхода в свет основополагающей монографии Стефана Банаха "Théorie des opérations linéaires" в Ленинградском университете начинает формироваться одна из первых отечественных школ по функциональному анализу. Уже в 1934 г. были получены важные результаты по теории функционалов и операторов в банаховых пространствах, существенно дополняющие классические исследования И. Радона.

Тогда же Леонид Витальевич выдвинул фундаментальную идею изучения общих функциональных пространств, наделенных структурой условно полной векторной решетки. Необходимость привлечения структуры порядка в функциональном анализе была осознана почти одновременно рядом математиков (Ф. Рисс и несколько позже М. Г. Крейн, Г. Биркгофф, Г. Фрейденталь). Выделенный Канторовичем класс упорядоченных векторных пространств, обладающих порядковой полнотой, имеет ряд принципиально важных специфических свойств, позволивших предложить новые методы исследования функциональных объектов, в том числе и классических.

Теория таких пространств — их называют пространствами Канторовича или  $K$ -пространствами — является теперь одним из основных разделов функционального анализа. Завершающим этапом исследований Леонида Витальевича в этой области стала написанная им совместно со своими учениками Б. З. Вулихом и А. Г. Пинскером монография «Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах», вышедшая в 1950 г.

Исследования последней четверти прошлого века наглядно показали, что так называемые расширенные или универсально полные пространства Канторовича суть не что иное, как изображения поля вещественных чисел в булевозначных моделях классической теории множеств Цермело — Френкеля. Таким образом, пространства Канторовича столь же неизбежны в математике, как и множество вещественных чисел. В качестве любопытной иллюстрации отметим, что в восьмидесятые годы в связи с потребностями булевозначного анализа пространства Канторовича были заново переоткрыты в США под названием «булевы линейные пространства», т. е. спустя почти полвека после своего появления в работах Леонида Витальевича.

---

<sup>2)</sup>Интересно, что, рекомендуя в апреле 1930 г. своего 18-летнего студента Канторовича, Григорий Михайлович Фихтенгольц писал: «Мне представляется, что молодость Леонида Витальевича — при его дарованиях, сметке, быстрой сообразительности, находчивости — едва ли может служить препятствием к его деятельности в качестве ассистента В.У.З. Одно несомненно для меня: то учебное заведение, которое откроет свои двери для Леонида Витальевича Канторовича, впоследствии будет иметь основание гордиться тем, что оно помогло молодому таланту стать на ноги» (см. Фихтенгольц, 2004, с. 260).

Канторович стоял у истоков формирования современной вычислительной математики. Первые работы по приближенным методам конформных отображений, вариационным методам, квадратурным формулам, численным методам решения интегральных уравнений и уравнений в частных производных были им выполнены в начале 30-х годов, в ту пору, когда вычислительная математика еще не оформилась в самостоятельную научную дисциплину. Важную роль в ее становлении сыграла совместная с В. И. Крыловым монография «Методы приближенного решения уравнений в частных производных» (1936). Эта книга, в дальнейшем называвшаяся «Приближенные методы высшего анализа», неоднократно переиздавалась, переведена на английский, немецкий, венгерский, румынский языки и до сих пор продолжает использоваться специалистами во всем мире.

Необходимость разработки новых эффективных численных методов анализа прикладных задач особенно остро стала ощущаться в последние предвоенные и в военные годы. В 1948 г. в связи с необходимостью решения важных прикладных задач, требовавших сложных расчетов<sup>3)</sup>, в Математическом институте им. В. А. Стеклова был создан разместившийся в Ленинграде Отдел приближенных вычислений, который возглавил Канторович. Понимая, что дальнейшее развитие численных методов должно базироваться на фундаментальных результатах теоретических разделов математики, Леонид Витальевич приступил к исследованиям в этом направлении. Основные результаты этих исследований были опубликованы в 1947–1948 гг. в работах: «К общей теории приближенных методов анализа», «О методе Ньютона для функциональных уравнений», «Функциональный анализ и прикладная математика», удостоенных в 1949 г. Сталинской премии.

В эти же годы по инициативе Канторовича на математико-механическом факультете Ленинградского университета была организована первая в нашей стране специализация по вычислительной математике, а в дальнейшем и кафедра, которой первоначально заведовал В. И. Крылов, а с 1958 г. — сам Леонид Витальевич. Он всегда подчеркивал значение функционального анализа как теоретической базы вычислительной математики. Поэтому среди сотрудников созданных им кафедр вычислительной математики в ЛГУ и в НГУ всегда были первоклассные специалисты аналитического профиля.

С работами по вычислительной математике связано непосредственное участие Канторовича в развитии вычислительной техники. Он руководил конструированием новых вычислительных устройств, ему принадлежит ряд изобретений в этой области. С начала 50-х он совместно с учениками разрабатывал оригинальные принципы автоматизации машинного программирования для численных расчетов и, что было в те годы совершенно необычайно, для проведения сложных аналитических выкладок.

В 1939 г. в издательстве Ленинградского университета вышла небольшая книжка «Математические методы организации и планирования производства», в которой собственно и зафиксировано открытие линейного программирования — направления, оказавшего большое влияние на развитие экономической науки. В этой бро-

---

<sup>3)</sup> В частности, это расчеты по программе «Плутоний» для атомного проекта СССР. За эту работу Л. В. Канторовичу в 1949 г. была присуждена специальная Правительственная премия. См. В. С. Владимиров, В. Н. Кублановская, 2004.



шюре впервые давалась математическая постановка производственных задач оптимального планирования и предлагались эффективные методы их решения. Тем самым идея оптимальности в экономике была поставлена на прочный научный фундамент.

Леонид Витальевич уже тогда считал необходимым продолжать исследования в следующих направлениях: 1) дальнейшее развитие алгоритмов линейного программирования и их конкретизация для отдельных классов задач; 2) обобщение предложенных методов с целью изучения более широких классов экстремальных задач с ограничениями, включая нелинейные задачи и задачи в функциональных пространствах; приложение таких методов к экстремальным задачам математики, механики и техники; 3) распространение новых методов экономического анализа отдельных производственных задач на общие экономические системы; приложение этих методов к задачам планирования и анализа структуры экономических показателей на уровне отрасли, региона и народного хозяйства в целом.

Некоторые исследования по первым двум направлениям были выполнены Канторовичем еще в предвоенные годы. Однако основные усилия он сосредоточил на развитии третьего направления. Уже в 1942 г. была написана его капитальная монография «Экономический расчет наиболее целесообразного использования ресурсов». Идеи этой работы настолько опережали время и настолько не соответствовали принятым тогда догматам, что она была опубликована лишь спустя 17 лет после своего написания, когда некоторые из догматов стало возможным хотя бы обсуждать. Тогда эти пионерские идеи были легализованы и получили некоторое признание.

Опубликованная в 1951 г. книга «Расчет рационального раскроя промышленных материалов» (написанная совместно с В. А. Залгаллером) отражает замечательный опыт авторов по практическому решению реальных оптимизационных задач в докомпьютерную эпоху.

Монография «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» увидела свет в 1959 г. Эта книга была переведена на английский, французский, японский, румынский, словацкий, польский, сербский и испанский языки. (В то время Леонид Витальевич еще продолжал свои математические исследования, и в том же году вышла совместная с Г. П. Акиловым книга «Функциональный анализ в нормированных пространствах», также получившая широкую международную известность.)

В 1965 г. за работы в области экономико-математических методов (вместе с пришедшими к некоторым похожим идеям от экономики В. В. Новожиловым и В. С. Немчиновым) Л. В. Канторович был удостоен Ленинской премии, а в 1975 г. его (а также американского экономиста Т. Купманса) «вклад в теорию оптимального использования ресурсов» был отмечен Нобелевской премией.

В 1957 г. было принято государственное решение о создании нового крупного научного центра на востоке страны — Сибирского отделения Академии наук. Канторович был в числе первых ученых, приглашенных для работы в Сибири. В 1958 г. он был избран членом-корреспондентом по специальности экономика, а в 1964 г. — действительным членом Академии наук по Отделению математики.

В 1958–1960 гг. он вместе В. С. Немчиновым возглавлял Лабораторию по применению математических и статистических методов в экономических исследованиях и планировании Сибирского отделения. В 1960 г. ленинградская группа лаборатории переехала в Новосибирск и влилась в Институт математики в качестве математико-экономического отдела. Московская группа этой лаборатории стала ядром при создании Центрального экономико-математического института АН в 1964 г.

Еще до переезда в Новосибирск под руководством Леонида Витальевича в Ленинграде были развернуты исследования по теории и численным методам математического программирования, а также в области теории и практического использования моделей оптимального планирования. В частности, разработанные тогда оптимальные тарифы на такси были реализованы в масштабе страны и дали значительный экономический эффект.

В эти же годы по инициативе Канторовича на экономическом факультете Ленинградского университета началась подготовка специалистов по экономической кибернетике. Большую роль сыграло и создание так называемого «шестого курса»<sup>4)</sup>: наиболее способные выпускники экономического факультета университета были оставлены для дополнительного одногодичного обучения математике и ее экономическим приложениям, к ним присоединились некоторые выпускники инженерно-экономического факультета Политехнического института, несколько молодых экономистов из Москвы и из Чехословакии. Двое москвичей — А. А. Анчишкин и С. С. Шаталин — стали впоследствии академиками.

С 1960 по 1971 г. Леонид Витальевич жил в Новосибирске и был заместителем директора Института математики Сибирского отделения Академии наук, а также заведующим организованной им кафедры вычислительной математики Новосибирского университета.

В эти годы Леонид Витальевич вел и большую научно-организационную работу. По его инициативе, в частности, на математическом и экономическом факультетах НГУ была организована подготовка специалистов в области экономической кибернетики, проводились всесоюзные и международные конференции и совещания по применению математических методов в экономике. Так, в международном симпозиуме по моделированию народного хозяйства, проходившем в Новосибирске в июне 1970 г., принял участие ряд известных западных экономистов: Ж. Абади, Д. Гейл, Я. Корнаи, Л. Клейн, Т. Купманс, Э. Маленво, Р. Стоун, Р. Фриш. Четверо из этого списка стали лауреатами Нобелевской премии.

Переехав в 1971 г. в Москву, Леонид Витальевич сначала руководил лабораторией в Институте управления народным хозяйством, а с 1976 г. «Отделом моделирования научно-технического прогресса ВНИИСИ<sup>5)</sup>». В эти годы он являлся членом Государственного комитета по науке и технике, состоял в нескольких научных советах АН и в научно-технических и экспертных советах ряда министерств.

После присуждения Нобелевской премии Леонид Витальевич получил возможность выезжать за границу, в частности, неоднократно работал в IIASA<sup>6)</sup> в Вене.

<sup>4)</sup> См. В. Г. Шалабин, 1986 и А. В. Бухвалов, А. Л. Дмитриев, 1999, они же, 2004.

<sup>5)</sup> Всесоюзный научно-исследовательский институт системных исследований.

<sup>6)</sup> Международный институт прикладного системного анализа.

Он был избран членом Венгерской, Югославской и Восточно-Германской академий наук, Американской академии наук и искусств, Мексиканской инженерной академии, почетным доктором многих университетов (Гренобль, Глазго, Ницца, Мюнхен, Йель, Хельсинки, Сорбонна, Кембридж, Халле-Виттенберг), а также Варшавской высшей школы экономики и планирования и Индийского статистического института. Был удостоен диплома Высшей экономической школы в Праге и серебряной медали Международного общества исследования операций, состоял в Международном эконометрическом обществе (был почетным членом) и в Международном институте управления, а также входил в редакции ряда международных журналов. Его заслуги были отмечены и государством — он награжден двумя орденами Ленина, тремя орденами Трудового Красного Знамени, орденами «Знак Почета» и Отечественной войны, а также многими медалями.

Леонид Витальевич до последних дней был полон творческих планов и активно работал над их претворением. Уже в последние месяцы своей жизни, находясь в больнице, он продиктовал свои автобиографические заметки «Мой путь в науке», опубликованные в «Успехах математических наук».

7 апреля 1986 г. Леонид Витальевич скончался и был похоронен на Новодевичьем кладбище в Москве.

Научная школа Канторовича, будь то в математике или в экономике, — это не только десятки непосредственных его учеников. Это и огромное число последователей, для которых его труды определили характер научного мышления и деятельности на всю жизнь.

Для своих учеников и последователей Леонид Витальевич всегда был образцом честности, бескомпромиссности и твердости в науке, объективности и трудолюбия. Подкупающими чертами его личности были исключительная доброта, простота и легкость общения, скромность и даже застенчивость. Он с удовольствием работал с молодежью, и молодежь тянулась к нему.

Леонид Витальевич Канторович указал нам один из путей в будущее. Мы не сомневаемся, что этот путь выберут многие.

*С. С. Кутателадзе, В. Л. Макаров, И. В. Романовский, Г. Ш. Рубинштейн*

# Обзор научных трудов

## Дескриптивная теория функций и теория множеств

Первые работы Канторовича, доложенные на семинаре Г. М. Фихтенгольца в 1927/1928 гг., посвящены исследованию трансфинитной последовательности классов функций, составляющих так называемую классификацию Янга. В этой классификации в качестве исходного принимается класс непрерывных функций, а последующие классы получаются чередованием предельных переходов возрастающих и убывающих последовательностей функций. Классификация Янга является детализацией классификации Бэра. Леонид Витальевич показал, что функции Янга класса  $(\alpha + 1)$  представимы как верхние и нижние пределы функций Бэра класса  $(\alpha)$  [1929, 4]. Ему принадлежат также построения универсальных функций для классов Янга [1929, 1]; функция двух переменных называется универсальной для данного класса, если при специализациях одной из переменных получаются все функции одной переменной этого класса. Универсальные функции Канторовича принадлежат тем же классам, что и представляемые ими функции. Им также показано, что для классификации Бэра таких универсальных функций не существует.

К тому же циклу относится работа [1932, 1], выполненная в основном в 1928 г. и посвященная условиям существования непрерывной функции, у которой производные числа Дини совпадают со значениями заданных четырех функций соответствующих классов. В ней дана дескриптивная характеристика этих функций и множеств, с помощью которых решается задача. Например, на совершенном множестве меры нуль произвольная функция 1-го класса Бэра оказывается производной некоторой функции. Полученные здесь достаточные и частично необходимые условия существенно дополнили классические результаты А. Лебега, Р. Бэра, А. Данжуа, У. Янга и А. Безиковича.

Принципиальные результаты по теории  $A$ -множеств и проективных множеств были получены в работах, выполненных преимущественно в соавторстве с Е. М. Ливенсоном ([1929, 3; 1930, 5 и 6], а также их доклады, сделанные на 1-м Всесоюзном съезде математиков в июне 1930 г.). Их итогом является вышедший в двух частях мемуар [1932, 4; 1933, 5], а также оставшаяся неопубликованной его третья часть, отраженная в [1937, 10].

В этом цикле работ развивается общая теория аналитических операций над множествами, в частности, теория  $\delta s$ -операций Хаусдорфа — Колмогорова. Под этим понимается операция  $\Phi_N$ , сопоставляющая счетной системе множеств  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  множество

$$\sum_{\gamma \in N} E_{n_1} E_{n_2} \dots E_{n_i} = \Phi_n(E_1, E_2, \dots).$$

Здесь  $\gamma = (n_1, n_2, \dots)$  — последовательность натуральных чисел, а  $N$  — множество последовательностей  $\gamma$ , определяющее операцию. К  $\delta s$ -операциям относится, на-

пример,  $A$ -операция П. С. Александрова, применение которой к замкнутым множествам порождает  $A$ -множества. Устанавливаются теоремы о зависимости дескриптивных свойств результата операции от класса множеств, из которого черпаются  $E_1, E_2, \dots$ , а также от дескриптивных свойств множества  $N$ , рассматриваемого как множество иррациональных чисел. В качестве одного из приложений построенной теории доказывается, что все трансфинитные последовательности так называемых  $C$ -множеств, получающихся применением  $A$ -операции к множествам, дополнительным к множествам предыдущего класса (за исходный класс берут  $A$ -множества), укладываются во второй проективный класс. Впервые дано также аналитическое представление всех проективных классов.

### Конструктивная теория функций

К началу 30-х годов относятся также и работы Канторовича по конструктивной теории функций. Его внимание в этой области привлекли, прежде всего, известные многочлены

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f(k/n) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

с помощью которых С. Н. Бернштейн в 1912 г. дал оригинальное доказательство знаменитой теоремы Вейерштрасса. В статье [1931, 1] Леонид Витальевич установил следующий неожиданный даже для Бернштейна факт: если функция  $f$  регулярна хотя бы на части отрезка  $(0, 1)$ , то сходимость  $B_n f$  к  $f$  имеет место в некоторой части комплексной области. Эти исследования были продолжены самим Сергеем Натановичем в ряде работ 1936–1943 гг.

В статьях [1930, 3 и 4] Леонид Витальевич заметил, что запись произвольного многочлена  $P_n$  степени  $n$  в форме

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k^{(n)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

где

$$\varphi_k^{(n)} = (n+1) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(x) dt,$$

может оказаться весьма полезной. Он получил сингулярный интеграл, сходящийся к соответствующей функции  $f \in L[0, l]$  почти везде. Отсюда следовала возможность почленного дифференцирования почти везде последовательности полиномов Бернштейна для абсолютно непрерывной функции  $f$ . Используя другой выбор  $\varphi_k^{(n)}$ , Леонид Витальевич получил простое доказательство известной теоремы Бэра о представлении полунепрерывной функции в виде предела монотонной последовательности непрерывных функций [1930, 8]. В более поздней работе [1934, 9] на основе еще одного выбора  $\varphi_k^{(n)}$  он создал аналитический аппарат для представления произвольной измеримой функции во всех ее точках аппроксимативной непрерывности. Этот аппарат до сих пор используется в теории функций.

К рассматриваемому циклу относится также статья [1931, 2], в которой решается задача о том, насколько ухудшится наилучшее приближение непрерывной функции многочленами, если потребовать, чтобы коэффициенты таких многочленов были целыми. Эти исследования были продолжены в 1955 г. А. О. Гельфондом.

### Приближенные методы анализа

Первые работы Канторовича по приближенным методам анализа были выполнены в 1932 г. В работах [1933, 2 и 4] им предложено несколько методов приближенного решения задачи о конформном отображении круга на односвязную область, ограниченную некоторой кривой. Эти методы основаны на погружении заданной области в однопараметрическое семейство, включающее область, для которой конформное отображение известно. Используя затем разложение по малому параметру, Леонид Витальевич получил явные формулы для приближенного вычисления искомого конформного отображения. Дальнейшему развитию этого подхода и его обобщению на случай многосвязных областей посвящены работы 1934–1937 гг. [1934, 1; 1936, 2; 1937, 1 и 2]. Метод малого параметра Канторовича уже в 1933 г. был включен в 3-й том знаменитого «Курса высшей математики» В. И. Смирнова. Этот метод широко используется в механике, а также был применен в известном цикле работ Г. М. Голузина по теории однолистных функций.

В работе [1933, 3] был предложен новый вариационный метод приближенного решения двумерных уравнений эллиптического типа, основанный на сведении соответствующей задачи минимизации интеграла

$$I(u) = \iint_D \left[ a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + cu^2 + 2fu \right] dx dy$$

на множестве функций двух переменных к минимизации функционала, зависящего от нескольких функций одного переменного (метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям). Этот метод Канторовича вошел в учебники по математике (Л. Э. Эльсгольц) и механике (А. И. Лурье).

Дальнейшему развитию вариационного метода, а также других приближенных методов решения дифференциальных интегральных уравнений посвящены работы 1934–1937 гг. В частности, в статье [1934, 2] был впервые предложен известный метод коллокации. Указанные методы до сих пор широко используются в приложениях — механике, технике и физике. К рассматриваемому циклу примыкают исследования по сходимости этих методов, а также метода Ритца [1941, 2–4]. В них доказывается ряд теорем о сходимости, а также предложены методы приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, основанные на сочетании идей конструктивной теории функции с аналитической техникой оценок операторов. В то время этими вопросами, как известно, занимались многие математики (Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Г. И. Петров, М. В. Келдыш и др.). Эти исследования Канторовича получили дальнейшее развитие в работах ряда его учеников.

В теории механических квадратур он, мастерски используя простую идею об аддитивном выделении особенностей, показал ряд остроумных приемов для вычисления интегралов от негладких функций [1934, 8]. Это послужило также источником построения численных методов решения интегральных уравнений при наличии

сингулярностей, в частности, уравнений теории переноса. В более поздней работе [1949, 3] выводятся формулы численного интегрирования четных и нечетных функций, которые при  $n$  узлах дают точные результаты для полиномов до степени  $4n - 2$ . Отсюда получаются и некоторые кубатурные формулы.

Разработанные Канторовичем методы отражены в написанной им совместно с В. И. Крыловым книге, вышедшей в 1936 г., «Методы приближенного решения уравнений в частных производных» — первой в мировой научной литературе монографии по численным методам высшего анализа, неоднократно переиздававшейся в нашей стране и за рубежом.

### Функциональный анализ

Совместные работы с Г. М. Фихтенгольцем [1934, 3 и 10] по проблеме представления линейных функционалов и операторов явились первыми исследованиями отечественных математиков по теории нормированных пространств. В то время функциональный анализ еще только оформлялся как самостоятельное научное направление, и одной из первостепенных задач было накопление фактического материала — осмысление общих понятий в конкретных ситуациях. Поскольку основой всех построений функционального анализа того времени служили нормированные пространства и линейные операторы в них, большое значение приобретало аналитическое представление линейных функционалов и операторов в конкретных нормированных пространствах. К 1934 г. общая форма линейного функционала была известна для всех классических банаховых пространств, за исключением пространства  $L_\infty$  всех ограниченных измеримых функций. Иначе обстояло дело с аналитическим представлением операторов. Результат И. Радона (общие формы ограниченных и компактных операторов из пространства  $C$  непрерывных функций в себя) был единственным значительным достижением в этом направлении. Полученные совместно с Г. М. Фихтенгольцем теоремы об общем виде линейных функционалов и об аналитическом представлении ограниченных операторов, действующих из  $C$  в  $L_\infty$ , заполнили имевшиеся пробелы в списке известных сопряженных пространств и послужили отправным пунктом для дальнейших исследований по теории линейных операторов. Отметим, что в работе [1934, 3] на основе полученных результатов установлена недополняемость пространства  $C$  в  $L_\infty$ , что с точки зрения современной геометрической теории банаховых пространств представляет значительный интерес. В этой работе также решена проблема Банаха о мощности множества линейных функционалов в пространстве  $M$  ограниченных функций.

К тому же периоду относятся исследования [1935, 2 и 3], посвященные одной из наиболее актуальных проблем 30-х годов — развитию математического аппарата физики и квантовой механики. Леонид Витальевич поставил задачу «распространения — «обогащения» функционального пространства Гильберта за счет введения «идеальных» функций, которые уже не будут функциями в обычном смысле». Новым здесь явилась предложенная схема пополнения, основанная на рассмотрении не одного, а целого семейства самосопряженных плотно определенных операторов, связанных с операторами дифференцирования. Этот же круг вопросов — обобщенные функции и решения — был затронут в работах об интегралах Стильтьеса [1934, 4; 1939, 2].

В это же время Леонид Витальевич увлекся новой идеей — теорией упорядоченных пространств [1935, 1; 1936, 4 и 5; 1937, 3 и 10; 1940, 3]. Он ввел и подробно изучил класс векторных решеток, в которых всякое ограниченное множество элементов имеет точные границы (такие пространства, как уже отмечалось, вошли в литературу под названием  $K$ -пространств). Особое внимание он уделял регулярным  $K$ -пространствам, где сходимости по упорядочению обладает рядом свойств, сближающих ее с обычной сходимостью на множестве вещественных чисел. Он построил теорию операторов в  $K$ -пространствах, выделяя в качестве основного класс регулярных операторов, т. е. таких линейных операторов, которые представимы в виде разности двух положительных линейных операторов. Доказал, что совокупность регулярных операторов, отображающих одно  $K$ -пространство в другое, также образует  $K$ -пространство [1936, 7 и 8] — результат, являющийся далеко идущим обобщением теоремы Ф. Рисса о пространстве функционалов.

Параллельно с построением и развитием общей теории  $K$ -пространств он дал разнообразные приложения этой теории ко многим вопросам функционального анализа, теории функций и теории функциональных уравнений. Поскольку многие классические функциональные пространства, изучавшиеся методами теории нормированных пространств, оказываются одновременно и  $K$ -пространствами, то привлечение к изучению таких функциональных пространств теории  $K$ -пространств позволило Канторовичу провести более детальное исследование линейных операторов. Он (частично совместно с Б. З. Вулихом) установил общие аналитические представления линейных операторов различных классов во многих конкретных пространствах [1936, 11; 1937, 12]. Теоремы Канторовича о распространении операторов нашли в его работах применения к теории интеграла, меры, а также к решению положительной проблемы моментов [1937, 5]. Из общих соображений были получены аналоги теорем Гамбургера, Стилтгеса и Хаусдорфа. Теоремы о сходимости последовательностей линейных операторов [1937, 6] в  $K$ -пространствах Леонид Витальевич применил к теории неопределенного интеграла Лебега и в теории ортогональных рядов.

Для приложений функционального анализа к теории численных методов оказались чрезвычайно полезными пространства, нормированные в обобщенном смысле — с помощью элементов некоторого  $K$ -пространства. Такие пространства называют  $BK$ -пространствами (Банаха — Канторовича). В теорию  $BK$ -пространств включается и теория самих  $K$ -пространств (в этом случае в роли нормирующего пространства выступает то же самое  $K$ -пространство) и теория нормированных пространств (нормирующее пространство — поле вещественных чисел). Для  $BK$ -пространств Леонид Витальевич получил ряд теорем о методе последовательных приближений. Эти теоремы были использованы при анализе численных методов решения конечных и бесконечных систем уравнений, в том числе линейных и нелинейных дифференциальных, а также интегральных уравнений. Одновременно этот подход позволил дать абстрактную трактовку классического метода мажорант [1937, 8; 1939, 4].

Рукопись «Функциональный анализ на основе теории полуупорядоченных пространств», составленная Леонидом Витальевичем на основе курса его лекций в университете в 1936–1937 гг., была отмечена первой премией на Всесоюзном конкурсе



работ молодых ученых (1938 г.). Тогда же он приступил к подготовке итоговой монографии, однако эта работа была завершена лишь к концу 40-х годов. В совместной с Б. З. Вулихом и А. Г. Пинскером монографии [1950, 2] теория  $K$ -пространств впервые была изложена систематически. Эта книга и сейчас не потеряла ценности для работающих в этой области. Некоторым дополнением к ней является обзорная статья [1951, 4].

Дальнейшее развитие математики и расширение сферы ее приложений подтвердили значимость теории  $K$ -пространств, которая стала одним из основных разделов функционального анализа. Удивительно прозорливым оказалось многократно высказываемое Леонидом Витальевичем положение о том, что элементы  $K$ -пространства суть обобщенные числа. Эвристический принцип Канторовича, состоящий в том, что элементы  $K$ -пространства суть своего рода вещественные числа, нашел блестящее подтверждение в рамках современной математической логики. Развитие булевозначных моделей теории множеств, возникших в 60-е годы прошлого века в связи с решением проблемы континуума, продемонстрировало фундаментальное значение расширенных (универсально полных)  $K$ -пространств, каждое из которых, как неожиданно оказалось, служит новой равноправной моделью вещественной прямой. При этом решеточно нормированные  $BK$ -пространства, считавшиеся искусственными абстракциями, оказались в точности новыми изображениями обычных банаховых пространств. Тем самым  $K$ -пространства навсегда вошли в сокровищницу мировой науки.

Сам Леонид Витальевич постоянно подчеркивал неразрывную связь  $K$ -пространств с теорией неравенств и экономической проблематикой. Последующие исследования многих авторов подтвердили, что идеи линейного программирования имманентны теории  $K$ -пространств в следующем строгом математическом смысле: выполнение в абстрактной структуре любой из принятых формулировок принципа двойственности с неизбежностью приводит к тому, что исходный объект является  $K$ -пространством.

Развитие идей из работы «О перемещении масс» [1942, 1], связанных с рассмотрением транспортной задачи, позволило в совместных с Г. Ш. Рубинштейном исследованиях [1957, 5; 1958, 12] предложить новую нормировку конечных мер на метрическом компакте. В полученном нормированном пространстве сильная сходимость при условии равномерной ограниченности полных вариаций оказывается эквивалентной обычной  $\varepsilon$ -слабой сходимости соответствующих мер. Сопряженным к построенному пространству является пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица. Благодаря этим свойствам указанное функциональное пространство (его называют пространством Канторовича — Рубинштейна) широко используется в приложениях, в частности, в математической экономике и теории вероятностей<sup>1)</sup>.

Статья [1956, 6] связана с фундаментальными трудами С. Л. Соболева по теоремам вложения различных функциональных классов. Отталкиваясь от своих исследований по аналитическому представлению операторов, Леонид Витальевич предложил новую схему получения теорем вложения. Ее основой является выделение

<sup>1)</sup>См., например, Рвачев, 1984, Вершик, 2002 и 2004.

нового важного класса ядер, обеспечивающего компактность соответствующих интегральных операторов. Выделенные ядра, именуемые ядрами Канторовича, широко используются в современной теории операторов.

В 1959 г. выходит «Функциональный анализ в нормированных пространствах», написанный совместно с Г. П. Акиловым. Эта монография оказала существенное влияние на развитие исследований по применениям функционального анализа и на его преподавание в ведущих вузах страны и за рубежом. Наряду с оригинальной трактовкой традиционных разделов функционального анализа в нормированных пространствах большое внимание в книге уделено приложениям к вычислительной математике. Указанная монография переведена на многие языки. В 1977 г. вышло ее второе, существенно переработанное и дополненное издание («Функциональный анализ»), в которое включены основы теории упорядоченных пространств, а также вопросы функционального анализа, связанные с математической экономикой. Эта книга также неоднократно переиздавалась и переводилась.

### Функциональный анализ и прикладная математика

Канторович первым применил функционально-аналитические методы в вычислительной математике. Этому направлению посвящены его работы 1937–1957 гг. Центральной здесь является статья [1948, 4], объединяющая целый цикл его работ и отмеченная Сталинской премией. Само название этой статьи звучало тогда непривычно. Лишь теперь, причем именно благодаря работам Канторовича, функциональный анализ стал основным аппаратом в исследованиях по вычислительной математике.

Основная цель статьи заключается в том, чтобы показать, «что идеи и методы функционального анализа могут быть использованы для построения и анализа эффективных практических алгоритмов решения математических задач с таким же успехом, как для теоретического исследования этих задач». С этих позиций в статье рассматриваются три вопроса: общая теория приближенных методов решения функциональных уравнений, метод наискорейшего спуска и функционально-аналитический вариант метода Ньютона.

Первая попытка объединения различных приближенных методов на основе изучения функциональных уравнений была предпринята еще в работе [1937, 8]. Ядром теории, предложенной в статье [1948, 3], явилась принципиально новая идея — изучение связи исследуемого функционального уравнения

$$Kx = y, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

в банаховых пространствах  $X$  и  $Y$  с «приближенным» уравнением

$$\bar{K}\bar{x} = \bar{y}, \quad \bar{x} \in \bar{X}, \quad \bar{y} \in \bar{Y},$$

в более простых, как правило, конечномерных пространствах  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ . Доказываются общие теоремы, в которых на основании данных о точном решении устанавливается разрешимость приближенного уравнения и сходимости приближенных решений к точному, а также теоремы, позволяющие на основе анализа приближенного уравнения устанавливать существование точного решения и оценивать его близость к

полученному приближенному. С помощью последних может строго доказываться существование точного решения исходного уравнения, устанавливаться область его единственности и ряд его свойств. Эти теоремы фактически относятся к разделу математики, возникшему много позже и получившему название «доказательные вычисления».

Построенная общая теория функциональных уравнений, базирующаяся на вариации исходных функциональных пространств и операторов, была использована для анализа основных приближенных методов решения важнейших классов уравнений второго рода (метод редукции для бесконечных систем линейных уравнений, различные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений). Получаемые при этом оценки скорости сходимости методов оказывались, как правило, лучшими, чем ранее известные. Относительно некоторых методов теоремы о сходимости и оценки ее скорости были установлены впервые, например, для метода коллокации.

Построенная Канторовичем абстрактная теория приближенных методов сыграла важную роль в разработке и развитии разностных методов (В. С. Рябенский, А. Ф. Филиппов), в ряде конкретных прикладных исследований (В. С. Владимиров, А. И. Каландия и др.).

Метод наискорейшего спуска был сформулирован в работе [1945, 1], основные результаты которой были доложены на семинаре в Математическом институте АН [1943, iv]. Этот метод в его простейшем варианте предназначен для решения линейных уравнений с положительно определенными операторами в гильбертовых пространствах. Была установлена сходимость метода и даны точные оценки ее скорости. Сейчас выяснены многочисленные связи метода наискорейшего спуска (в особенности его многошагового варианта) с другими методами решения задач линейной алгебры.

Работы по методу Ньютона [1948, 2; 1949, 4] блестяще подтверждают неоднократно высказывавшиеся Леонидом Витальевичем два тезиса. Первый из них заключается в том, что разумно проведенное обобщение позволяет яснее увидеть существо дела и получить, как это ни парадоксально, более точный результат, чем при индивидуальном изучении частной задачи. Второй тезис состоит в том, что наличие хорошего приближения помогает не только локализовать предполагаемое решение, но и установить сам факт его существования. Разработанный функционально-аналитический аналог метода Ньютона принято называть методом Ньютона — Канторовича. Этот метод нашел многочисленные применения как в вычислительной математике, так и в теоретических исследованиях, в частности, он существенно использовался в знаменитом цикле работ В. И. Арнольда и А. Н. Колмогорова по устойчивости гамильтоновых систем.

В работах [1951, 2 и 5; 1957, 7] проведено более глубокое исследование этого метода и дана трактовка общего метода мажорант, основанная на теории упорядоченных векторных пространств.

### **Линейное программирование**

В 1938 г. к Леониду Витальевичу обратились сотрудники Центральной лаборатории Ленинградского фанерного треста с просьбой рекомендовать метод наход-

дения наилучшего плана использования имеющегося оборудования. Речь шла о комплексном выполнении пяти видов работ на лущильных станках восьми типов. Вопрос сводился к определению матрицы  $(h_{ik})$  и величины  $z$  из условий

$$h_{ik} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^5 h_{ik} = 1, \quad \sum_{i=1}^8 h_{ik} \alpha_{ik} = z p_k, \quad z \rightarrow \max,$$

где  $a_{ik}$  — суммарная производительность станков  $i$ -й группы при выполнении работ  $k$ -го вида, а  $p_k$  характеризует требуемый ассортимент. Из соответствующих результатов классического анализа вытекало, что в искомой матрице  $(h_{ik})$  лишь двенадцать элементов отличны от нуля. Однако перебор всех таких комбинаций был сопряжен с непреодолимыми вычислительными трудностями (требовалось решить  $C_{40}^{12} \approx 10^9$  систем линейных уравнений с двенадцатью неизвестными). Поэтому ясно, что эффективные методы решения подобных задач должны были базироваться на принципиально новых идеях, позволяющих проводить направленный перебор таких комбинаций. Ядром открытия Канторовича является установленная им связь задачи оптимального планирования с задачей определения соответствующих цен. На этой основе формулируются признаки оптимальности, позволяющие предложить различные схемы направленного перебора допустимых планов и цен. В частности, для приведенной задачи фанерного треста соответствующий признак состоит в следующем. Для оптимальности допустимого плана  $(h_{ik})$  необходимо и достаточно, чтобы нашлись цены — разрешающие множители —  $\lambda_k^*$ , удовлетворяющие соотношениям

$$\lambda_k^* \geq 0, \quad \sum_{k=1}^5 \lambda_k^* > 0, \quad \lambda_k^* \alpha_{ik} = \max_i \lambda_s^* \alpha_{is} \quad \text{при } h_{ik}^* > 0.$$

Указанные разрешающие множители объективно оценивают трудоемкость — цену — выполнения работ, а величины  $\mu_i^* = \max_s \lambda_s^* \alpha_{is}$  можно рассматривать как прокатные оценки соответствующей группы станков.

Основам теории оптимального производственного планирования были посвящены доклады Леонида Витальевича, сделанные в Ленинградском университете и в строительном институте, где он также работал [1939, i и ii]. Вскоре была издана брошюра «Математические методы организации и планирования промышленного производства» [1939, 1], представляющая собой дополненную стенограмму этих докладов.

В ней исследуются различные классы планово-производственных задач. Для характеристики широты охвата материала достаточно перечислить наименования разделов: распределение обработки деталей по станкам; организация производства с обеспечением максимального выполнения плана при условии заданного ассортимента; наиболее полное использование механизмов; максимальное использование комплексного сырья; наиболее рациональное использование топлива; рациональный раскрой материалов; наилучшее выполнение плана строительства при данных строительных материалах; наилучшее распределение посевных площадей; наилучший план перевозок. Дж. Данциг — американский математик, который спустя 10

лет независимо от Канторовича открыл линейное программирование, писал: «Работа Л. В. Канторовича 1939 г. содержит почти все области приложений, известные к 1960 г.»<sup>2)</sup>

Математическому обоснованию предложенных методов посвящены три приложения. В последнем из них доказывается теорема двойственности линейного программирования — существование разрешающих множителей.

Среди работ, посвященных дальнейшему развитию методов линейного и нелинейного программирования, особый интерес представляют те, что были опубликованы до появления аналогичных исследований в США — до 1951 г.

Статья [1940, 2] посвящена исследованию бесконечномерных задач выпуклого программирования. Для таких задач устанавливается признак оптимальности и формулируются идеи построения численных методов на основе последовательного улучшения имеющихся приближений. В ней дается характеристика не только оптимальных решений, но и всех экстремальных или эффективных по Парето точек.

Большое внимание Леонид Витальевич уделял исследованию специальных классов задач линейного программирования. В 1940 г. вместе с М. К. Гавуриным он поставил и изучил транспортную задачу в матричной и сетевой постановках [1940, 1; 1941, i; 1949, 2]. Предложенный ими метод потенциалов и его обобщения до сих пор широко используются в экономической практике. Бесконечномерный аналог транспортной задачи, исследованный в заметке [1942, 1], позволил Леониду Витальевичу доказать справедливость известной гипотезы Монжа для широкого класса задач перемещения массы [1948, 8]. На основе идеи, высказанной в этой заметке, в работах [1957, 5; 1958, 6], совместных с Г. Ш. Рубинштейном, как уже отмечалось, построено и изучено новое функциональное пространство, широко используемое теперь в математической экономике, теории вероятностей, эргодической теории и др.

Вопросам рационального раскроя посвящены работы [1942, 3] и [1940, 2; 1949, 6], а также написанная совместно с В. А. Залгаллером монография [1951, 1]. Изложенные в ней практически опробованные методы решения задач рационального раскроя наряду с алгоритмами линейного программирования используют оригинальные идеи вычисления индивидуальных раскроев. Аналогичные идеи были впоследствии развиты Д. Беллманом в динамическом программировании.

### **Вычислительная техника и программирование**

Леонид Витальевич внес значительный вклад в развитие вычислительной техники и программирования.

Предложенные им алгоритмические и структурные решения легли в основу ряда оригинальных вычислительных устройств. В середине 50-х годов под руководством Канторовича была разработана релейная клавишная вычислительная машина [1959, 18], которая производилась в 60-е годы («Вильнюс» и «Вятка») и сыграла важную роль в автоматизации вычислительных работ на предприятиях и в учреждениях страны. Интересные идеи, связанные с усовершенствованием различных десятичных вычислительных устройств, предложены в работах [1973, 7–9; 1974, 14].

<sup>2)</sup>См. Dantzig, 1963, Данциг, 1966.

В начале 50-х годов Леонид Витальевич обратился к вопросам автоматизации программирования, а также других форм интеллектуальной деятельности человека (осуществление выкладок с символами, преобразование программ и т. п.). По соображениям секретности эти работы были опубликованы со значительным опозданием. Предложенные им принципы [1957, 3, 6] получили дальнейшее развитие в ряде работ советских и зарубежных авторов.

Уже в начале 60-х годов он выдвинул идею «усиления» вычислительных возможностей универсальных ЭВМ путем комплексирования их со специализированными процессорами (приставками), ориентированными на массовые вычисления, характерные для того или иного класса задач. В 1963–1965 гг. в Институте математики Сибирского отделения под руководством Леонида Витальевича был разработан специализированный процессор [1965, 15]. В этой машине был использован предложенный им роторный принцип реализации массовых арифметических операций. Операции выполнялись с предельной скоростью, ограниченной только быстродействием оперативной памяти. Некоторые архитектурные решения, положенные в основу арифметической машины (прямой доступ к оперативной памяти, конвейерная организация обработки и др.), впоследствии получили широкое распространение в отечественных и зарубежных машинах. Использование проблемно-ориентированных процессоров считается одним из наиболее перспективных направлений развития вычислительных систем. Заслуживают внимания также общие идеи Леонида Витальевича о комплексном развитии машинной математики — методы, алгоритмы, программирование, структура машин [1974, 2, 3].

### Оптимальное планирование и оптимальные цены

Леонид Витальевич заложил фундамент теории оптимального планирования экономики. Развернутому изложению основных идей этой теории посвящена его капитальная монография «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» [1959, 2]. Стержнем этой книги является формулировка основной задачи производственного планирования и ее динамического варианта. Указанные задачи достаточно просты, но в то же время учитывают важнейшие черты плановой экономики. Главным из их привлекательных качеств является то, что они базируются на схеме линейного программирования и, следовательно, на развитом аналитическом аппарате и обширном наборе эффективных вычислительных средств.

Динамическую задачу оптимального планирования Леонид Витальевич формулирует следующим образом. Заданы наборы вещественных чисел

$$(a_{kit}^s), s \in S, (k, i, t) \in K \times I \times T, (b_{kit}), (k, i, t) \in N_0,$$

где  $K, I, T$  — конечные множества индексов, а  $N_0$  — некоторое собственное подмножество множества  $N$ . Требуется найти набор чисел  $(x^s)$ ,  $s \in S$ , удовлетворяющий двум условиям:

$$1) \sum_{s \in S} a_{kit}^s x^s \geq b_{kit}, \quad (k, i, t) \in N_0,$$

2) не существует набора  $(\tilde{x}^s)$ ,  $s \in S$ , удовлетворяющего 1) и неравенствам

$$\sum_{s \in S} a_{kit}^s \tilde{x}^s \geq b_{kit}, \quad (k, i, t) \in N \setminus N_0,$$

среди которых имеются строгие.

Содержательно набор чисел  $(a_{kit}^s)$ ,  $(k, i, t) \in N$  при фиксированном  $s \in S$  интерпретируется как производственный способ по переработке одних ингредиентов в другие, где положительные числа означают выпуск, а отрицательные — затраты соответствующих продуктов  $k$  в пунктах или районах  $i$  в периоды времени  $t$ . Требуется найти такой производственный план, определяемый объемами (интенсивностями)  $x^s$  использования различных способов, при котором выполняются ограничения по ресурсам ( $b_{kit} < 0$ ), обеспечивается выполнение плановых заданий ( $b_{kit} > 0$ ) и при этом не существует аналогичного плана  $\tilde{x}^s$ , использующего меньшие ресурсы по всем  $(k, i, t) \in N \setminus N_0$ . Условие 2) обычно конкретизируется в зависимости от принятого критерия оптимальности.

Динамическая задача оптимального планирования привлекала внимание Леонида Витальевича и в последующие годы. В частности, ее дальнейшему развитию посвящена ключевая работа [1964, 4]. В ней указаны важнейшие направления расширения и совершенствования основной схемы динамической модели и намечены пути использования ее в практике планирования. В этой работе показано, как в экономическую модель вводятся элементы нелинейности, стохастичности и дискретности и какую роль они играют как в более точном учете экономических реалий, так и при математическом анализе соответствующих моделей.

Эта работа, по существу, определила направление многих исследований, которые были выполнены в последующие годы. За рубежом, в частности, большое развитие получило направление, именуемое экономической теорией благосостояния. Основные элементы этого направления заложены в работах Леонида Витальевича по глобальным оптимизационным моделям плановой экономики.

Выдающимся достижением явилась формулировка оптимальных цен, осознание того факта, что цены и план составляют единую неразделимую систему и не могут рассматриваться изолированно. Указанные цены он назвал объективно обусловленными оценками, чтобы подчеркнуть, что эти цены отражают совокупность условий, которым подчинен план. В настоящее время общепринято, что оценки оптимального плана — ориентир, к которому должны приближаться реальные цены. Система объективно обусловленных оценок включает в себя не только оценки обычных продуктов, но также оценки вкладов ресурсов, в том числе трудовых, оценки фондов, условий социального характера, оценки времени как фактора производства.

Своей трактовкой объективно обусловленных оценок Леонид Витальевич заложил основы оптимизационного экономико-математического анализа широкого круга фундаментальных экономических проблем, таких как проблемы эффективности новой техники, капитальных вложений и других хозяйственных мероприятий, проблемы хозяйственного расчета, экономической оценки природных ресурсов, рационального использования труда. Использование объективно обусловленных оценок обеспечило конструктивный подход к проблеме выбора показателей и оценки деятельности предприятий и других хозяйственных органов.

Следует заметить, что формулировка динамической модели оптимального планирования создавала впечатление у ряда экономистов, что с помощью оптимизационной задачи планирование и управление экономикой могут быть полностью централизованы. Леонид Витальевич всегда осознавал важность декомпозиционных

методов, основанных на праве выбора хозяйственными единицами локальных решений, которые, в конечном счете, и формируют план экономики в целом. В своих работах он постоянно указывал на использование принципов декомпозиции как при машинном решении больших задач линейного программирования, так и при организации реального процесса составления плана. В работе [1965, 4] этот вопрос проработан им особо.

В этой, а также в ряде последующих работ Леонид Витальевич рассматривал проблему построения динамической модели оптимального планирования на базе существующей статистической информации, в частности на базе информации межотраслевого баланса. Путь, указанный в этих работах, оказался плодотворным, и в 1960–1970-е годы в работе Госплана использовались оптимизационные модели, базирующиеся на информации межотраслевого баланса.

В то же время внимание Леонида Витальевича привлекали и простые модели экономики, которые могли быть подвергнуты достаточно полному математическому анализу. Малоразмерные (однопродуктовые и двухпродуктовые) модели довольно интенсивно исследовались за рубежом. Накоплен обширный арсенал средств анализа таких моделей. Однако Леониду Витальевичу удалось и в эту область внести свой оригинальный вклад. В работе [1959, 10] он сформулировал такую однопродуктовую модель, в которой учитывается срок ввода основных производственных фондов. Ее анализ позволяет исследовать проблему эффективности капитальных вложений и ряд других вопросов, которые особенно актуальны именно при планировании. К изучению однопродуктовых моделей Леонид Витальевич обращался не раз ([1967, 4, 7, 8; 1970, 2, 10; 1973, 3; 1978, 3, 20] и др.). Им рассматривались различные способы введения и учета технического прогресса. В частности, исследован вопрос о влиянии темпов технического прогресса на норматив эффективности капитальных вложений. Был предложен способ оценки величины норматива эффективности, исходя из имеющихся статистических данных [1967, 4; 1970, 7], и тем самым был впервые дан объективный подход его исчислению.

### Экономические проблемы плановой экономики

Леонид Витальевич внес выдающийся вклад в развитие экономической науки. При оценке этого вклада следует учитывать, что он жил и работал в стране с централизованным планированием, видел преимущества и недостатки этой системы и стремился усовершенствовать именно ее. Много сделанное им не потеряло своего значения и после изменения экономического уклада, хотя некоторые его выводы должны восприниматься уже по-иному.

Рассмотрим, прежде всего, его вклад в проблему ценообразования — одну из коренных, затрагивающих, по существу, все сферы функционирования общества. С ликвидацией громоздкой системы централизованного установления всех цен научный подход к их определению изменил свою роль, но не потерял значения. Леонид Витальевич ввел понятие оптимума, оптимального развития. Из его положения о неразрывности плана и цен вытекает их зависимость от целей общества. Таким образом, цели развития общества, оптимальный план и цены составляют одно неразрывное целое. Им указаны конкретные условия, при которых оценки



оптимального плана совпадают с полными (прямыми и сопряженными) затратами труда. Наличие гигантских естественных монополий заставляет сохранить для них расчет, по крайней мере, опорных цен, согласованных с интересами общества и перспективами экономики. Таким образом, эти разработки актуальны для любого хозяйства.

В работах Канторовича исследовался ряд основных проблем экономической теории и практики. При этом характерно, что наряду с научным, теоретическим анализом проблемы, основывающимся на единой концепции оптимального плана и оптимальных (объективно обусловленных) оценок, он учитывал специфику проблемы, имеющийся опыт, делал конкретные выводы и давал практические предложения. Эти положения и подход нашли дальнейшее развитие в работах многих ученых экономико-математического направления как в нашей стране, так и за рубежом. В какой-то, хотя, к сожалению, и не очень большой мере они использовались и на практике.

Указывая на недостатки действовавшей экономической системы, Леонид Витальевич подчеркивал, что система экономических показателей должна быть единой, построенной по единому принципу. В связи с этим значительную часть своих работ в этой области он посвятил разработке и анализу конкретных экономических показателей. Так, в проблеме ценообразования, к которой Леонид Витальевич неоднократно возвращался в своих работах, он анализировал концепции ценообразования с точки зрения теории оптимального планирования и указывал на необходимость их совершенствования. В частности, он настаивал на необходимости оценки природных ресурсов и сформулировал принципы такой оценки. Актуальность предложенных им принципов расчета в ныне складывающейся экономической системе только возрастает. Здесь достаточно указать на значение рентных платежей, в особенности при использовании невозполнимых природных ресурсов.

Большое внимание в работах Канторовича было уделено оценке земельных ресурсов и воды ([1968, 3] и др.), ее учету в ценах на сельскохозяйственную продукцию. Были предложены оригинальные подходы к их расчету (сочетание метода наименьших квадратов и линейного программирования). На этой основе даны рекомендации по улучшению системы экономических показателей и расчетов в сельском хозяйстве. Им показано, как оптимизационная техника может быть использована для решения ряда проблем сельскохозяйственного производства: размещения сельскохозяйственных культур, специализации, выравнивания экономических условий хозяйствования, выбора рациональной структуры машинно-тракторного парка и т. д. Эти модели остаются актуальными и в настоящее время.

На основе оптимизационного подхода Леонид Витальевич вскрыл сущность понятия показателя эффективности капиталовложений, дал убедительное научное обоснование необходимости его применения и объективный путь для его расчета. В его работах выявлен ряд особенностей в оценке эффективности конкретных мероприятий — важность учета динамики цен и др. Сделаны существенные предложения по расчету эффективности капиталовложений и новой техники [1959, 8; 1964, iv; 1969, 8; 1970, 8; 1974, 5; 1978, 5; 1982, 2]. В работах [1965, 8; 1966, 5, 6, 8] была вскрыта сущность понятия амортизации. С помощью остроумной математической модели удалось показать, что можно повысить эффективность использова-

ния оборудования и так установить коэффициенты амортизационных отчислений, чтобы стимулировать наилучшее его использование. Это позволило сделать ряд принципиальных выводов о необходимости корректировки практики расчета амортизации для достижения более эффективного использования оборудования и его замены.

Специальный интерес Леонид Витальевич проявлял к проблемам транспорта. Еще в его первых работах был дан общий анализ транспортной задачи и метод потенциалов для ее решения. Этот метод широко использовался на транспорте (железнодорожном, автомобильном, морском, воздушном) и в органах снабжения для рационального прикрепления и рациональной организации перевозок (диспетчерская служба, расчет маршрутов). В работах [1966, xiii; 1969, 2; 1974, 6] и др. исследованы проблемы экономики транспорта и показано, какими должны быть транспортные тарифы в зависимости от вида транспорта, груза, расстояний и т. д. Были рассмотрены и проблемы всего транспортного комплекса — взаимосвязь транспорта с другими отраслями хозяйства, распределение перевозок между видами транспорта, эффективность вложений в транспорт [1982, 3, 5; 1985, 6]. Все эти работы, безусловно, сохраняют свое значение.

Помимо проблем народнохозяйственного планирования, Леонид Витальевич рассматривал и вопросы, относящиеся к отраслевому планированию. Им предложен ряд моделей, начиная от наиболее простой и часто используемой, базирующейся на транспортной задаче, до более сложных — производственно-транспортных, динамических, декомпозиционных ([1967, 10; 1972, 7] и др.). Большое внимание он уделял вопросам рационального использования труда. В частности, по-видимому, он первым предложил для рационального распределения трудовых ресурсов ввести дифференцированные по профессиям, половозрастным признакам и территории платежи предприятий за использование труда [1942, 2]<sup>3)</sup>. Он указывал также на возможности научного, количественного подхода к социальным проблемам, вопросам совершенствования сферы услуг ([1967, 16; 1968, 7] и др.). В течение ряда лет и особенно в последние годы жизни Леонида Витальевича привлекали проблемы эффективности технического прогресса. Особый интерес представляет обоснование предложения о создании государственного фонда развития принципиально новой техники, компенсирующего повышенные затраты в первые годы ее выпуска [1974, 5; 1979, 1]. Безусловно важным является вывод о значительно большем вкладе технического прогресса и науки в национальный доход, чем это показывают обычно принятые расчеты [1978, 4; 1979, 5]. Сейчас эти вопросы, возможно, даже более актуальны.

Леонид Витальевич уделял большое внимание внедрению разработанных им методов в экономическую практику. Являясь членом Государственного комитета по науке и технике, он создал и возглавил научный совет ГКНТ по оптимизации, где проводил большую работу, направленную на совершенствование методов планирования и управления народным хозяйством. Такую же работу он вел, будучи председателем транспортного совета АН и состоя членом многих ведомственных советов и комиссий (Госкомитета по ценообразованию, Министерства путей сообщения и др.).

---

<sup>3)</sup>Такие платежи использовались, например, в Англии.

Из конкретных задач в первую очередь следует отметить цикл работ, посвященных методам рационального раскроя материалов, начатый Леонидом Витальевичем еще в 1939–1942 гг. В 1948–1950 гг. эти методы были внедрены на Ленинградском вагоностроительном заводе имени Егорова, на Кировском заводе и на некоторых других предприятиях. Распространению методов рационального раскроя способствовал ряд всесоюзных совещаний [1976, i; 1983, iv], организованных Леонидом Витальевичем.

В 1961 г. был принят предложенный им пониженный тариф на такси, давший 50 млн руб. ежегодного выигрыша населению и одновременно такого же размера дополнительный доход государству за счет уменьшения потерь от простоев и холостых пробегов таксомоторов. С 1964 г. (а фактически эта задача была поставлена еще в 1940 г.) под руководством Леонида Витальевича разрабатывалась и была внедрена уникальная по масштабу система оптимальной загрузки прокатных станов всей страны, функционировавшая в Госснабе<sup>4</sup>) [1966, 1; 1969, 3; 1970, 12; 1972, 7].

К сожалению, и в настоящее время нашими учеными-экономистами истинное значение работ Леонида Витальевича Канторовича далеко еще не осознано.

*С. С. Кутателадзе, В. Л. Макаров, И. В. Романовский, Г. Ш. Рубинштейн*

---

<sup>4</sup>) Государственный комитет по материально-техническому снабжению.

# Математические методы организации и планирования производства<sup>\*)</sup>

## От редактора

Автор работы «Математические методы организации и планирования производства», проф. Л. В. Канторович, является крупным специалистом в области математики. Эта работа представляет интерес с чисто математической стороны, так как дает выходящий за рамки классического математического анализа оригинальный метод решения задачи на экстремум. С другой стороны, в этой работе дается приложение математических методов к вопросам организации производства, что заслуживает серьезного внимания со стороны работников различных отраслей промышленности.

Предлагаемая вниманию читателя работа обсуждалась на заседании Математического отдела Института математики и механики Ленинградского государственного университета и получила высокую оценку математиков. Кроме того, Дирекцией Университета было созвано специальное совещание работников промышленности, на котором была подвергнута обсуждению другая сторона работы — ее прикладное значение. Работники промышленности единодушно проявили большой интерес к работе и выразили пожелание в ближайшее время видеть ее опубликованной.

Основная часть данной книги представляет содержание доклада, сделанного на упомянутом совещании, и включает постановку математических задач и указание на те вопросы организации и планирования из области промышленности, строительства, транспорта и сельского хозяйства, которые приводят к этим задачам. Изложение иллюстрировано несколькими конкретными численными примерами. Недостаток времени, а также то обстоятельство, что автор является математиком, а не производственным работником, не позволили ни умножить число этих примеров, ни сделать эти примеры максимально реальными и актуальными. Полагаем, что, несмотря на это, такие примеры будут весьма полезны читателю, ибо они показывают обстоятельства, при которых математические методы применимы, а также эффективность их применения.

Три приложения к работе содержат изложение и обоснование процесса решения указанных экстремальных задач по методу автора. Мы надеемся, что эта книга сыграет весьма полезную роль в развитии нашей социалистической промышленности.

*А. Р. Марченко*

---

<sup>\*)</sup>Издание Ленинградского государственного университета. Ленинград, 1939 г.

## Введение<sup>1)</sup>

Грандиозные задачи, выдвинутые в плане третьей пятилетки, требуют, чтобы на основе наилучшего использования существующих резервов промышленности — материалов, рабочей силы, оборудования — добиться максимального выпуска продукции.

Существуют два пути повышения эффективности работы цеха, предприятия и целой отрасли промышленности. Один путь — это различные улучшения в технике, т. е. новые приспособления в отдельном станке, изменение технологического процесса, нахождение новых, лучших видов сырья. Другой путь, пока гораздо меньше используемый, — это улучшение в организации производства и планировании. Сюда относятся, например, такие вопросы, как распределение работ между отдельными станками предприятия или механизмами, правильное распределение заказов по предприятиям, правильное распределение различных видов сырья, топлива и пр. Об этом весьма отчетливо сказано в решениях XVIII партсъезда по докладу товарища Молотова. Там говорится: «Важнейшим условием выполнения заданий программы роста производства в третьей пятилетке является ... широкое развертывание работ по внедрению новейшей техники и научной организации производства<sup>2)</sup>». Тут именно отмечены оба указанных выше момента: наряду с внедрением новейшей техники, подчеркнута роль научной организации производства.

В связи с решением одной задачи, предложенной Институту математики и механики ЛГУ лабораторией Фанерного треста, я обнаружил, что целый ряд проблем, относящихся к научной организации производства самого разнообразного характера (вопросы наилучшего распределения работы станков и механизмов, максимального уменьшения отходов, наилучшего использования сырья и местных материалов, топлива, транспорта и пр.), приводит к одной и той же группе (экстремальных) математических задач. Эти задачи не подходят непосредственно под задачи, рассматриваемые в математическом анализе. Вернее сказать, они формально подходят и даже формально оказываются очень простыми, но процесс решения, который там получается, совершенно неприменим практически, так как для его выполнения требуется решение десятков тысяч или даже миллионов систем уравнений.

Мне удалось указать сравнительно простой общий метод решения этой группы проблем, который применим ко всем задачам, о которых я говорил, и достаточно прост и эффективен, так что решение их делается вполне осуществимым в практических условиях.

Я хочу еще подчеркнуть тот момент, что большая часть задач, о которых я буду говорить, относящихся к организации и планированию производства, связана именно с советской системой хозяйства и в большинстве случаев не возникает в

---

<sup>1)</sup> Данная работа представляет значительно дополненную стенограмму доклада, сделанного 13 мая 1939 г. в Ленинградском государственном университете, на котором присутствовали также представители промышленных исследовательских институтов. Кроме того, здесь использованы материалы доклада, посвященного специально вопросам, связанным со строительством, который был сделан 26 мая 1939 г. в Ленинградском институте инженеров промышленного строительства.

<sup>2)</sup> «Большевик», 1939, № 7, стр. 14.

экономике капиталистического общества. Там выбор продукции определяется не планом, а интересами, выгодами отдельных капиталистов. Владелец предприятия выбирает для производства те товары, которые в данный момент имеют более высокую цену, легче могут найти сбыт и потому дадут большую прибыль. Сырье берется не то, большие запасы которого имеются в стране, а то, которое предприниматель может купить дешевле. Вопрос о наиболее полном использовании оборудования не ставится, — все равно большинство предприятий работает в половинную мощность.

В СССР дело обстоит иначе. Все подчиняется не интересам и выгоде отдельного предприятия, а задаче выполнения государственного плана.

Основной задачей предприятия является выполнение и перевыполнение плана, входящего в общегосударственный план, и притом не только выполнение плана по суммарным показателям, по общей стоимости продукции, общему тоннажу и т. д., но, непременно, выполнение плана по всем видам продукции, т. е. ассортиментность, — выдерживание плана по отдельным видам продукции, комплектность выпуска, изготовление комплектных изделий и пр.

Вот этот момент — необходимость выполнения плана комплектно и по ассортименту — является весьма существенным для нас, так как при постановке задач, связанных с получением максимального выхода продукции, мы должны учитывать ассортиментность и комплектность как весьма важные дополнительные условия. Весьма важным является также использование сырья и материалов, не как-нибудь априорно выбранных, но тех, которые реально имеются, в частности, местных материалов, использование материалов в соответствии с тем, сколько их производится в данном районе; следует заметить, что наши методы позволяют решать задачи, связанные именно с этими реальными условиями и обстановкой.

Теперь перейдем к рассмотрению различных конкретных проблем организации и планирования производства и выясним те математические задачи, к которым они приводят.

### **І. Распределение обработки деталей по станкам, дающее максимальную производительность при условии комплектности (постановка основных математических задач)**

Чтобы пояснить характер задач, которые мы будем иметь в виду, приведу один очень простой пример, не требующий никаких специальных методов для решения, так как оно ясно само собой. Этот пример будет играть иллюстративную роль<sup>3)</sup> и поможет выяснить постановку вопроса.

**ПРИМЕР 1.** Фрезерная работа при обработке деталей металлических изделий может осуществляться на разных станках — фрезерных, револьверных — более усовершенствованных, и револьверном автомате. Для определенности я рассмотрю такой вопрос. Имеется три фрезерных станка, три револьверных и один автомат. Изделие — я рассмотрю очень простой случай — состоит из двух деталей.

---

<sup>3)</sup>Так как этот пример играет чисто иллюстративную роль, мы и не старались сделать его реальным, т. е. не подбирали данные и обстоятельства, которые могут встретиться в действительности.

**Таблица 1**  
**Производительность станков по двум деталям**

Группа станков	Число станков	Производительность каждого станка		Суммарная производительность	
		по I детали	по II детали	по I детали	по II детали
Фрезерные . . . . .	3	10	20	30	60
Револьверные . . . . .	3	20	30	60	90
Автомат . . . . .	1	30	80	30	80

Выработка по каждой детали такая. За рабочий день на фрезерном станке можно изготовить 10 первых деталей либо 20 вторых; на револьверном — 20 первых либо 30 вторых; на автомате — 30 первых либо 80 вторых. При этом, если мы учтем все количество станков (фрезерных и револьверных по три, а автомат один), то за рабочий день по желанию мы можем изготовить первых деталей на каждой группе станков  $30 + 60 + 30$ , на всех станках 120, вторых деталей  $60 + 90 + 80$  (табл. 1).

Теперь нам нужно решить такую задачу: разбить работу — загрузить рабочий день этих станков так, чтобы получить максимальную производительность, и при этом важно не просто произвести максимальное число деталей, но найти способ максимального выпуска комплектных изделий, т. е. комплектов, в данном случае из двух деталей. Итак, мы должны выбрать время нагрузки каждого станка таким образом, чтобы получить максимальное число готовых изделий.

Если не стараться решить задачу на максимум, а добиваться только комплектности, то можно на каждом станке производить обе детали в одинаковом количестве. Для этого достаточно разбить рабочий день каждого станка так, чтобы он произвел одинаковое число той и другой детали. Тогда оказывается, что фрезерные станки могут произвести 20 первых и 20 вторых деталей. В самом деле, на фрезерных станках производство 20 вторых деталей эквивалентно 10 первым. Револьверные станки могут произвести тогда 36 первых и 36 вторых, автомат произведет 21 первую и 21 вторую деталь, а общая производительность по всем станкам будет 77 первых и 77 вторых деталей, т. е. 77 комплектов (табл. 2).

Найдем теперь в данном примере наиболее целесообразный способ работы. Отношения тут различны. На фрезерном станке одна первая деталь равносильна двум вторым, на револьверном это отношение  $2 : 3$ , на автомате —  $3 : 8$ . Это может объясняться разными причинами: одна операция может на всех станках отнимать одинаковое время, другая операция может на автомате проходить в пять раз быстрее, чем на фрезерном станке, и т. д. Именно в связи с такими условиями эти отношения бывают различными для разных станков при обработке одних и тех же деталей. Одну деталь относительно лучше изготавливать на одном станке, другую — на другом.

Рассмотрение этих отношений сразу приводит к решению. Первую деталь нужно выработать там, где ее выгоднее всего производить (на револьверных стан-

**Таблица 2**  
**Распределение обработки деталей по станкам**

Группа станков	Простейшее решение		Наивыгоднейшее решение	
	I деталь	II деталь	I деталь	II деталь
Фрезерные . . . . .	20	20	26	6
Револьверные . . . . .	36	36	60	—
Автомат . . . . .	21	21	—	80
Число комплектов . . . . .	77	77	86	86

ках), а второй деталью нужно загрузить автомат. Что касается фрезерных станков, то между ними следует частично разделить производство первой и второй деталей, причем разбивку нужно произвести так, чтобы в сумме получилось одинаковое число первых и вторых деталей.

Если произвести разбивку по этому способу, то цифры будут такие: на фрезерном 26 и 6; на револьверном только 60 первых деталей, вторых не будет и на автомате 80 вторых, первых деталей не будет вовсе. Всего получится 86 первых деталей и 86 вторых (см. табл. 2).

Итак, если такое перераспределение произвести, то за счет этого мы получим не очень большой, но все же существенный эффект — увеличение выработки на 11%; при этом возрастание производительности произойдет без всяких затрат.

Но эта задача решается так легко, из элементарных соображений, только в таком простом случае, когда у нас три станка и две детали. Практически в большинстве случаев приходится иметь дело с более сложными ситуациями и найти решение просто по здравому смыслу вряд ли можно. Трудно надеяться на то, что рядовой инженер без всякого расчета угадает такое решение.

Чтобы выяснить, к какой математической задаче это приводит, я рассмотрю этот вопрос в более общем виде. Я приведу здесь несколько математических задач, связанных с вопросом изготовления изделий, состоящих из нескольких деталей. Что касается всех остальных областей приложения математических методов, о которых я говорил выше, то оказывается, что математические задачи всюду одни и те же, так что в других случаях мне придется только упоминать, к какой из этих задач дело сводится.

Итак, рассмотрим общий случай. Пусть у нас имеется некоторое число  $n$  станков и на них вырабатываются изделия, состоящие из  $m$  разных деталей. Предположим, что если на  $i$ -м станке обрабатывать  $k$ -ю деталь, то мы можем произвести в день  $a_{ik}$  штук деталей. Это исходные данные. (Заметим, что если на  $i$ -м станке нельзя обрабатывать  $k$ -ю деталь, то нужно считать, что соответствующее  $a_{ik} = 0$ .)

Теперь что нам нужно? Нужно распределить работу по обработке деталей по станкам так, чтобы выработать наибольшее число комплектов деталей. Обозначим через  $h_{ik}$  то время (выраженное в частях рабочего дня), которое мы на  $i$ -м станке



будем производить  $k$ -ю деталь. Это время неизвестно; его нужно определить, исходя из условия получения максимальной продукции. Тогда для определения  $h_{ik}$  будут такие условия. Во-первых,  $h_{ik} \geq 0$ , неотрицательны. Практически это условие совершенно очевидное, но оно должно быть отмечено, так как математически оно играет большую затрудняющую роль. Затем, для каждого фиксированного  $i$  сумма  $\sum_{k=1}^m h_{ik}$  равна 1, если суммировать по  $k$  от 1 до  $m$ . Это условие означает, что в целом — по всем деталям  $i$ -й станок загружен полный рабочий день. Далее количество штук произведенных  $k$ -х деталей будет  $z_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} h_{ik}$ , ибо каждое произведение  $a_{ik} h_{ik}$  дает количество произведенных штук  $k$ -х деталей на  $i$ -м станке. Желая получить комплектные изделия, мы должны требовать, чтобы все эти величины были равны между собой:  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$ . Общее значение  $z$  этих чисел и определит число изделий; оно должно быть максимальным.

Таким образом, решение нашего вопроса приводит к следующей математической задаче.

**Задача А.** Определить числа  $h_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ) из следующих условий:

1)  $h_{ik} \geq 0$ ;

2)  $\sum_{k=1}^m h_{ik} = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );

3) если ввести обозначение  $\sum_{i=1}^n h_{ik} a_{ik} = z_k$ , то  $h_{ik}$  должны быть подобраны

так, чтобы величины  $z_1, z_2, \dots, z_m$  были равны между собой и при этом их общее значение  $z = z_1 = z_2 = \dots = z_m$  имело максимально возможную величину.

Точно к той же задаче А приводит вопрос о распределении по станкам различных операций над одной данной деталью, если при ее обработке требуется несколько операций и каждая из них может быть выполнена на нескольких станках. Вся разница здесь в том, что  $a_{ik}$  будет обозначать теперь выработку  $i$ -го станка на  $k$ -й операции, а  $h_{ik}$  — время, на которое следует его занять под эту операцию.

Возможны некоторые варианты задачи А.

Например, если у нас имеется не одно, а два изделия, тогда будут детали, составляющие первое изделие, и детали, составляющие второе изделие. Обозначим через  $z$  число штук первого изделия, а через  $y$  — число штук второго изделия. В таком случае, если нам ассортимент не задан, а нужен только максимальный выпуск продукции в стоимостном выражении, то, если  $a$  руб. будет стоимость первого и  $b$  руб. второго изделия, очевидно, нам нужно искать максимум величины  $az + by$ .

Другая задача — это если имеется то или иное лимитирующее условие, например, если при обработке в каждом процессе есть своя величина расхода электроэнергии. Пусть при  $(i, k)$ -м процессе (при обработке  $k$ -й детали на  $i$ -м станке) расход энергии будет  $c_{ik}$  kWh за рабочий день. Общий расход электроэнергии будет выражаться тогда суммой  $\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m h_{ik} c_{ik}$ , и мы можем требовать, чтобы эта величина не превосходила определенной величины  $C$ , т. е. расхода, которым мы располагаем.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче.

**Задача В.** Найти числа  $h_{ik}$  из условий 1), 2), 3) задачи А и условия

$$4) \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m h_{ik} c_{ik} \leq C.$$

Заметим, что  $c_{ik}$  могут в этом случае обозначать и другие величины, например, число обслуживающих людей в  $(i, k)$ -м процессе. Тогда, если мы располагаем определенным числом человеко-дней, то это может быть ограничивающим условием и приведет нас к задаче В. Может быть ограничивающим условием расход воды в каждом процессе, если необходимо, чтобы он не превзошел определенной величины, которой мы располагаем.

Другой вопрос — задача С; эта задача состоит в следующем. Предположим, что на одном и том же станке возможно обрабатывать одновременно несколько деталей (или производить несколько операций над одной деталью) и при этом мы можем несколькими различными способами организовать производственный процесс. Один вариант — на этом станке будет обрабатываться три таких-то детали; другой вариант — можно обрабатывать на нем две другие детали и т. д. Тогда задача получается несколько более сложная, а именно: пусть мы на  $i$ -м станке при  $l$ -м способе организации производства можем получить  $\gamma_{ikl}$  штук  $k$ -й детали, т. е. одновременно  $\gamma_{i1l}$  штук первой детали,  $\gamma_{i2l}$  штук второй и т. д. за рабочий день (некоторые из  $\gamma_{ikl}$  могут быть равны нулю).

Тогда, если обозначить через  $h_{il}$  неизвестное время работы  $i$ -го станка по  $l$ -му способу, то число штук  $z_k$  произведенных на всех станках  $k$ -х деталей выразится более сложным, чем раньше способом, именно:  $z_k = \sum_{i,l} \gamma_{ikl} h_{il}$ . И опять задача приводится к вопросу нахождения максимального числа целых комплектов  $z$  при условии равенства  $z = z_1 = z_2 = \dots = z_m$ . Таким образом, имеем задачу С:

**Задача С.** Найти числа  $h_{il}$  из условий:

$$1) h_{kl} \geq 0;$$

$$2) \sum_i h_{il} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$3) \text{ если положить: } z_k = \sum_{i,l} \gamma_{ikl} h_{il}, \text{ то должно быть } z = z_1 = z_2 = \dots = z_m \text{ и их}$$

общая величина  $z$  должна получить максимально возможное для нее значение.

Затем возможен такой вариант задачи, когда допускается некомплектное производство, например, некомплектные детали надо докупать по более дорогой цене, или сверхкомплектные детали оцениваются дешевле, чем общий комплект, и потому для оценки стоимости продукции играет существенную роль число полных комплектов. Но я не буду упоминать все подобные случаи.

Остановлюсь теперь несколько на вопросе о способах решения этих задач. Как я уже упоминал, общие математические методы приводят к пути, который никак не может быть применен практически. Мною были найдены первоначально некоторые специальные приемы, которые были более эффективны, но все же достаточно сложны. Однако после этого удалось найти весьма универсальный метод, который применим как к задачам А, В, С, так и к остальным задачам такого рода. Этот метод — метод разрешающих множителей. Укажем его идею. Для определенности остановлюсь на задаче А. Метод основан на следующем факте. Оказывается,

существуют такие множители  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , отвечающие каждой детали, что их нахождение почти сразу приводит к решению задачи. Именно, если для каждого данного  $i$  рассмотреть произведения  $\lambda_1 a_{i1}, \lambda_2 a_{i2}, \dots, \lambda_m a_{im}$  и выделить те  $k$ , для которых произведение максимально, то для всех прочих  $k$  можно принять  $h_{ik} = 0$ . Что касается немногих выделенных значений  $h_{ik}$ , то они легко могут быть определены из условий  $\sum_{k=1}^m h_{ik} = 1$  и  $z = z_1 = z_2 = \dots = z_m$ . Найденные таким образом  $h_{ik}$  и дают максимум  $z$  — решение задачи.

Таким образом, вместо нахождения большого числа  $nm$  неизвестных  $h_{ik}$  оказывается возможным разыскивать всего  $m$  неизвестных  $\lambda_k$ ; в конкретном случае, например, вместо 32 только 4 неизвестных (см. ниже пример 2). Что касается множителей  $\lambda_k$ , то их можно найти без особого труда последовательными приближениями. Все решение осуществляется сравнительно просто; оно оказывается не сложнее обычного технического расчета. В зависимости от сложности случая, процесс решения может занимать от четверти до 5–6 часов.

Я не буду здесь останавливаться на деталях этого решения, скажу лишь основное: решение делается вполне осуществимым практически. Что касается контроля решения, то он еще проще. Если решение найдено, то проконтролировать правильность его можно в 10–15 минут<sup>4)</sup>.

Я хочу еще отметить тот факт, имеющий практическое значение, что получающиеся в решении числа  $h_{ik}$  в большинстве равны нулю. Благодаря этому каждый станок приходится занимать только под одну-две детали в течение дня, т. е. решение не получается практически неосуществимым, когда 1/2 часа станок обрабатывает одну деталь, а 3/4 часа — другую. Практически получается очень удачное решение: большинство станков работает целый день на одном виде деталей, и только на двух-трех станках происходит одна замена в течение дня. Последнее совершенно необходимо при требовании получения одинаковых количеств деталей.

Решение разобранных здесь задач, связанных с получением максимальной продукции при условии комплектности, мне кажется, может найти применение на большинстве предприятий металлообрабатывающей промышленности, а также деревообрабатывающей промышленности, ибо в обоих случаях имеются разнообразные станки разных производительностей, которые могут производить одну и ту же работу, а потому встает задача о наиболее целесообразном распределении работ по станкам.

Нахождение такого распределения, конечно, имеет смысл и возможно лишь при организации серийного производства. Для одного изделия не будет и данных о том, сколько времени продолжается выработка каждой детали на каждом станке, не будет и смысла искать это решение. Но случай серийного выпуска в металлообрабатывающей и деревообрабатывающей промышленности является типичным.

---

<sup>4)</sup> Подробное изложение метода решения, проведенное и на численных примерах, в частности, решение некоторых приведенных в докладе задач, дано в приложении I «Метод разрешающих множителей».

## II. Организация производства с обеспечением максимального выполнения плана при условии заданного ассортимента

Нет надобности говорить о значении выполнения плана по ассортименту в условиях планового хозяйства. Невыполнение плана по ассортименту, даже когда он выполнен по суммарным показателям (стоимости, тоннажу), недопустимо. Оно приводит к затовариванию и омертвлению средств в отношении одних видов продукции и к острому дефициту других видов, что может чрезвычайно затруднить и даже сорвать работу предприятий, связанных с данным. Поэтому предприятие, выполняя план, перевыполняя или даже недовыполняя его, обязано выдерживать установленное государством соотношение между отдельными видами продукции. В настоящее время невыполнение плана по ассортименту является грехом многих предприятий. Поэтому вопрос об организации производства, обеспечивающей максимальный выпуск продукции заданного ассортимента, представляется весьма актуальным.

Рассмотрим этот вопрос в следующих условиях. Пусть имеется  $n$  станков (или групп станков), на которых может вырабатываться  $m$  разных видов продукции. Пусть производительность  $i$ -го станка есть  $a_{ik}^*$  единиц продукции  $k$ -го вида за рабочий день. Требуется установить такую организацию работы станков, при которой был бы обеспечен максимальный выпуск продукции при заданном соотношении  $p_1 : p_2 : \dots : p_m$  между отдельными видами ее. Тогда, если обозначить через  $h_{ik}$  время, которое  $i$ -й станок (или группа станков) занят под  $i$ -й вид продукции, то для определения  $h_{ik}$  имеем условия:

$$\begin{aligned} 1) & h_{ik} \geq 0; \\ 2) & \sum_{k=1}^m h_{ik} = 1; \\ 3) & \frac{\sum_{i=1}^n h_{i1} a_{i1}^*}{p_1} = \dots = \frac{\sum_{i=1}^n h_{im} a_{im}^*}{p_m}, \end{aligned}$$

причем общее значение последних отношений максимально. Стоит только теперь принять  $a_{ik} = a_{ik}^*/p_k$  и последнее условие примет вид условия 3) задачи А, и, таким образом, задача приводится к рассмотренной выше задаче А.

**ПРИМЕР 2.** Как раз первый вопрос, с которого я начал свою работу, предложенный центральной лабораторией Фанерного треста, относился именно к этой задаче — максимальному выпуску продукции данного ассортимента. Нами был решен конкретный пример. Работа эта недавно сдана лаборатории. Там был такой случай: имеется восемь лущильных станков и пять различных номенклатур материала. Производительность каждого станка по каждой номенклатуре материала дана в табл. 3.

Требовалось установить распределение, обеспечивающее максимальную выработку при условии, что материал 1-й номенклатуры составляет 10%, 2-й — 12%, 3-й — 28%, 4-й — 36%, 5-й — 14%.

Таблица 3

№ станка	Номенклатуры				
	1	2	3	4	5
1	4,0	7,0	8,5	13,0	16,5
2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
3	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
4	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
5	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
6	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
7	4,0	7,0	0,0	14,0	17,0
8	5,0	8,0	10,0	11,8	18,0

Решение для этой задачи, найденное по нашему методу А. И. Юдиным<sup>5)</sup>, приводит к следующим значениям  $h_{ik}$  — распределению времени работы (в долях рабочего дня) по каждой номенклатуре материала (табл. 4).

В смысле получения эффекта обстоятельства здесь были сравнительно неблагоприятные в том отношении, что условия работы на всех станках были примерно одинаковы; все же получилось увеличение выпуска продукции по сравнению с наглядным решением (если на каждом станке выдержать соотношение по ассортименту) в размере 5%. В других случаях, где большая вариация производительности по видам материалов, такое решение может дать и больший эффект. Но даже увеличение на 5%, достигаемое без всяких затрат, имеет практическое значение.

Таблица 4

№ станка	Номенклатуры				
	1	2	3	4	5
1	0	0,3321	0	0	0,6679
2	0	0,9129	0,0871	0	0
3	0,5744	0	0,4256	0	0
4	0	0	0,9380	0,0620	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0
8	1	0	0	0	0

Затем я хочу еще указать на значение этого вопроса для кооперирования предприятий. В приведенном выше примере производства двух деталей (раздел I) мы

<sup>5)</sup> Подробное изложение хода решения этой задачи дано в приложении 2.

получали на разных станках разные соотношения между выработками деталей. Может оказаться, что на одном предприятии А приходится делать такое число вторых деталей, или соотношение числа имеющихся станков таково, что автомат, где выгоднее всего производить вторую деталь, приходится частично занять под первую деталь, а на другом предприятии В, наоборот, на револьверном станке, где выгоднее всего производить первые детали, частично приходится производить вторые детали. Тогда ясно, что выгоднее кооперировать эти заводы так, чтобы часть выпуска первой детали передать с завода А на завод В, а часть выпуска второй детали с завода В на завод А. В простом случае эти вопросы решаются элементарно, но в сложном случае вопрос о том, когда выгодно кооперировать и как кооперировать заводы, может разрешаться именно на основе нашего метода.

Таким же образом дело обстоит и с распределением плана данного треста или отрасли по разным предприятиям. Можно значительно увеличить выпуск продукции, если это распределение проводить целесообразно, т. е. каждому предприятию давать то изделие, которое максимально подходит к его оборудованию. Этот тезис, конечно, общеизвестен и общепризнан, но обычно, когда его приводят, не дают отчетливых указаний, как решать вопрос о том, к какому оборудованию больше подходит данное изделие. При наличии достаточных данных наши методы дают определенные способы для точного решения таких вопросов.

### III. Наиболее полное использование механизмов

Многие работы могут производиться одними и теми же механизмами. Например, есть много способов производства земляных работ; так, для экскавации применяются следующие механизмы: экскаваторы ковшовые, дитчеры, грейферы, гидромониторы — целый ряд экскаваторов разных систем и разных видов, и в разных условиях они дают различный эффект. Последний находится в зависимости от вида грунта, размеров котлована, условий транспорта отработанной земли и т. д. Например, канавы удобнее рыть одним экскаватором, глубокие котлованы — другим, мелкие котлованы — третьим; разрабатывать песок удобнее одним экскаватором, глину — другим и т. д. От всех этих обстоятельств зависит производительность каждого механизма по каждому виду работы.

Рассмотрим теперь такую задачу. Имеется данный комплекс работ и определенный наличный парк механизмов; требуется эти работы произвести в кратчайший возможный срок. В таких конкретных условиях иногда приходится производить работы и не тем механизмом, который наиболее подходит для данной работы, если, например, такого механизма нет в наличии или он относительно перегружен. Однако возможно решение вопроса о наиболее целесообразной расстановке механизмов, при которой они развили бы наибольшую, возможную в данных конкретных условиях, производительность. Составляя условия, как в двух предыдущих случаях, можем убедиться, что решение вопроса приводится к задаче А.

Поясним теперь эти общие соображения двумя конкретными примерами. Первый относится к земляным работам, второй — к плотничным.

ПРИМЕР 3. Имеются три вида земляных работ — I, II и III и три экскаватора — А, В, С. Нужно произвести по  $20\,000\text{ м}^3$  работ каждого вида и распределить

эти работы между экскаваторами наиболее целесообразным образом. Нормы выработки (в м<sup>3</sup>/час) по каждому виду работ указаны в табл. 5 (нормы даны жирными цифрами).

Таблица 5

Виды работ	Распределение механизмов по работам									Σ
	Экскаватор А			Экскаватор В			Экскаватор С			
I	—	<b>105</b>	190	—	<b>107</b>	—	312	<b>64</b>	—	20 000
II	—	<b>56</b>	94	302	<b>66</b>	224	—	<b>38</b>	—	20 000
III	322	<b>56</b>	—	20	<b>83</b>	60	10	<b>53</b>	284	20 000
Всего часов	322		284	322		284	322		284	

Наиболее целесообразное размещение механизмов, найденное нашим методом, указано в той же таблице, а именно: цифры, стоящие в каждой клетке справа, показывают время, которое каждый механизм должен быть занят на соответственном виде работ. Так, например, экскаватор А на 190 часов должен быть поставлен на I вид работ и на 92 часа на II вид. Вся совокупность работ при этом размещении при условии выполнения норм может быть произведена за 284 часа. Для сравнения в каждой клетке слева приведен другой — «неудачный» способ размещения механизмов. При таком размещении при тех же условиях указанные работы будут выполнены за 322 часа, т. е. перерасход времени, а в связи с этим горючего, средств и пр., составит 14%, если сравнивать с первым — наивыгоднейшим вариантом. Отметим, что и при этом втором варианте нормы выполнены, производство работ идет единым фронтом, механизмы полностью использованы, поэтому «неудачность» его могла быть обнаружена не при пользовании обычными показателями, а только если специально было обращено внимание на вопрос о наиболее целесообразной расстановке механизмов.

ПРИМЕР 4. Имеются следующие виды работ:

- 1) поперечная распиловка досок 4,5 м  $2 \times 14$  — 10 000 перепиллов;
- 2) поперечная распиловка досок 6,5 м  $4 \times 30$  — 5000 перепиллов;
- 3) продольная распиловка досок 2 м  $4 \times 15$  — 4000 пог. м.

Наличные инструменты:

1) маятниковых пил	2
2) циркулярная пила с ручной подачей	1
3) дисковых электропил	10
4) лучковых пил	20

Нормы выработки (в перепилах и в пог. м/час) приведены в табл. 6. В этой же таблице дано наивыгоднейшее размещение работ.

Таблица 6<sup>6)</sup>

Вид работ	Инструменты				$\Sigma$	$\Sigma \times 5,65$
	Маятниковые пилы (2 шт.)	Циркулярная пила с ручной подачей (1 шт.)	Дисковые электропилы (10 шт.)	Лучковые пилы (20 шт.)		
I	400×2	—	167×3	59×9	1830	10 000
II	213×0	—	125×7	38×0	875	5000
III	—	475×1	52×0	23×11	725	4000

В табл. 6 первая цифра в каждом квадрате показывает часовую норму выполнения каждой работы соответствующим инструментом (в перепилах или в пог. м/час). Множитель при этих нормах показывает число приспособлений, занятых на соответствующей работе, в частности, нулевой множитель показывает, что данное приспособление на этой работе не используется. При этом наивыгоднейшем распределении все работы могут быть выполнены за 5,65 часа.

Заметим, что распределение механизмов возможно производить не по видам работ, а по отдельным работам, т. е. составив список необходимых работ и определив время, потребное каждому механизму, чтобы произвести каждую из них (включая и время на подготовительные операции), распределить работы между механизмами так, чтобы они были выполнены в кратчайшее время или в заданный срок, но с наименьшей стоимостью.

Возможны и другие вариации в постановке вопросов, например, выполнить данную совокупность работ в заданный срок наличными механизмами с наименьшим расходом электроэнергии.

Те же вопросы размещения механизмов могут решаться также, когда, например, машины работают на электрической энергии, и мы ограничены условием, что используемая мощность не должна превзойти заданной, или число обслуживающих людей ограничено, или ограничен суточный дебет воды при гидромеханическом способе разработки грунта и т. д. Эти вопросы приводят к задаче В.

Возможно применение тех же методов и в вопросах, где речь идет не об использовании наличных механизмов, а о подборе наиболее подходящих для производства той или иной совокупности работ.

Мы полагаем, что кроме земляных и иных работ в строительстве этот метод может найти применение и в других отраслях промышленности.

В топливдобывающей промышленности — врубовые машины разных систем в разных условиях, в зависимости от мощности пласта, условий транспорта и пр.,

<sup>6)</sup>Нормы выработки взяты из книги «Единые нормы выработки и расценки на строительные работы. 1939 г. Отдел 6. Плотничные работы».



развивают разную производительность. Наиболее целесообразное размещение парка механизмов может дать и здесь определенный эффект.

Добыча торфа возможна разными способами, причем для различных видов торфа они имеют разную эффективность. Поэтому возникает проблема: наиболее целесообразно распределить наличные средства по торфяным полям в целях получения максимального выпуска продукции. Эта проблема также может быть решена нашими методами.

И в сельском хозяйстве разные работы могут выполняться комбайнами, молотилками, сноповязалками, при этом некоторые машины (например, комбайны) выполняют целый комплекс работ. В этом случае вопрос о распределении сельскохозяйственных машин приводит к задаче С.

#### IV. Максимальное уменьшение отходов

Очень многие материалы, используемые в промышленности и строительстве, поступают в виде целых единиц (листы стекла, жести, фанеры, бумаги, кровельного и листового железа; бревна, доски, балки, арматура, болванки и т. д.). При использовании их непосредственно или в качестве заготовок для изделий приходится эти единицы разделять на части необходимых размеров. При этом, как правило, образуются отходы, и фактически используемые материалы составляют лишь определенный процент всего количества, — остальное идет в отходы<sup>7)</sup>. Правда, во многих случаях отходы также находят себе применение, но их использование либо требует дополнительных затрат (на сваривание, переплавку и т. п.) и связано с потерями, либо они используются в качестве гораздо менее ценного продукта, чем основной (отходы строевого леса на топливо и т. п.). Поэтому уменьшение отходов является весьма актуальным, так как оно позволило бы сократить нормы расхода дефицитных материалов.

Наши методы могут найти здесь применение при следующих обстоятельствах. Пусть имеется одна или несколько партий материала, из которых нужно приготовить части заданного размера, причем количество штук каждой части должны иметь предписанное отношение  $p_1 : p_2 : \dots : p_m$ . Требуется получить максимальный выход продукции (например, из партии листов стекла стандартного размера изготовить наибольшее число комплектов для застекления окон). Пусть при этом существует несколько способов разделения каждой единицы на части и нужно выбрать, к какому числу единиц каждой партии какой применить способ, чтобы получились минимальные отходы. Покажем, что эта задача решается нашими методами, что она приводит к задаче С.

Пусть имеется  $n$  партий материала;  $i$ -я партия состоит из  $q_i$  штук. Пусть требуется изготовить наибольшее число комплектов из  $m$  частей, причем в комплект входит  $p_1$  штук первой части,  $\dots$ ,  $p_m$  штук  $m$ -й части.

Возможно несколько способов для разрезания единицы каждой партии. Пусть при  $l$ -м способе разрезания единицы  $i$ -й партии получается  $\gamma_{ikl}$  штук  $k$ -х частей ( $\gamma_{i1l}$

<sup>7)</sup>Чтобы показать величину потерь этого рода, приведу для иллюстрации такой факт: на заводе «Электросила» им. С. М. Кирова «в первом квартале этого года, например, из-за неправильного, нерационального раскроя динамного железа завод потерял 580 т металла — 367 тыс. рублей!» («Лен. правда», 8 июня 1939 г.).

штук первой части,  $\gamma_{i2l}$  штук второй и т. д.). Тогда, если через  $h_{il}$  обозначить число единиц  $i$ -й партии, которое следует разделить по  $l$ -му способу, то для определения неизвестных  $h_{il}$  имеем следующие условия:

- 1)  $h_{il} \geq 0$  целые;
- 2)  $\sum h_{il} = q_i$ ,
- 3) 
$$\frac{\sum_{i,l} \gamma_{i1l} h_{il}}{p_1} = \frac{\sum_{i,l} \gamma_{i2l} h_{il}}{p_2} = \dots = \frac{\sum_{i,l} \gamma_{iml} h_{il}}{p_m}$$

и их общее значение имеет максимально возможную величину.

Ясно, что простым изменением обозначений можно эту задачу свести к задаче С.

Приведенные общие рассуждения поясним примером, относящимся к простейшей задаче разрезания единиц линейных размеров.

**ПРИМЕР 5.** Требуется изготовить 100 комплектов арматуры (досок, бревен) длиной  $2,9 + 2,1 + 1,5$  м из стержней длины 7,4 м.

Простейший способ решения — это из каждого стержня изготовить по комплекту  $7,4 = 2,9 + 2,1 + 1,5 + 0,9$ , и тогда концы в 0,9 м пойдут в отход. При этом способе потребуется 100 стержней и отходы составят  $100 \times 0,9 = 90$  м.

Теперь приведем наиболее целесообразное решение. Рассмотрим различные способы разрезания стержня в 7,4 м на части указанных размеров: 2,9; 2,1; 1,5. Эти способы сведены в табл. 7.

**Таблица 7**

I	II	III	IV	V	VI
2,9	2,9	2,1	2,9	1,5	2,9
1,5	2,9	2,1	2,1	1,5	2,1
1,5	1,5	1,5	2,1	1,5	1,5
1,5		1,5		2,1	
7,4	7,3	7,2	7,1	6,6	6,5

Среди этих способов имеется I способ, при котором вовсе не образуется отходов, но воспользоваться только им нельзя, так как нужных комплектов мы не получим (например, стержней в 2,1 м вовсе не будет).

Решение, дающее минимальные отходы, найденное по нашему методу, будет следующее: по I способу 30 стержней, по II — 10, по IV — 50. Всего понадобится 90 стержней вместо 100, которые нужны при простейшем способе. Отходы составят всего  $10 \times 0,1 + 50 \times 0,3 = 16$  м, т. е.  $16 : (7,4 \times 90) = 16 : 666 = 2,4\%$ . Во всяком случае, это минимум того, что может быть достигнуто в данных условиях.

Рассмотрим другой вариант той же задачи с несколько видоизмененными условиями.

ПРИМЕР 6. Имеется 100 стержней по 7,4 м и 50 по 6,4 м; требуется изготовить из них наибольшее число комплектов прежних размеров  $2,9 + 2,1 + 1,5$ . Способы разрезания стержней по 7,4 м даны выше; стержни по 6,4 м могут быть разрезаны следующими способами: I)  $2,1 + 2,1 + 2,1 = 6,3$ ; II)  $1,5 + 1,5 + 1,5 + 1,5 = 6,0$ ; III)  $1,5 + 1,5 + 2,9 = 5,9$ ; IV)  $2,9 + 2,9 = 5,8$  и т. д. Решение вопроса в данном случае будет следующее: стержней по 7,4 м: 33 по I способу, 61 по II, 5 по IV, 1 по VI; стержни по 6,4 м — все по I способу.

Всего получится 161 комплект и отходы составят:

$$61 \times 0,1 + 5 \times 0,3 + 1 \times 0,9 + 50 \times 0,1 = 13,5; \quad 13,5 : 1060 = 1,3\%.$$

Следует заметить по этому поводу, что обычно, если задача более сложная, то предоставляются большие возможности варьирования и потому по нашему методу удается достигнуть меньших отходов.

Аналогичное решение может быть получено и для других задач.

Я думаю, что в ряде случаев такое математическое решение вопроса уменьшения отходов может дать увеличение полезного использования материалов на 5–10% по сравнению с тем, которое получается в настоящее время. Ввиду дефицитности всех этих материалов (арматуры, пиленого леса, листового железа и т. д.) такой эффект будет иметь значение, и инженеру стоит потратить пару часов на то, чтобы найти лучшие способы распиловки досок, а не предоставлять это дело целиком рабочим.

Я хочу также обратить внимание на возможности применения этого метода в лесообрабатывающей промышленности. Именно, там приходится решать вопросы уменьшения отходов при распиловке стволов деревьев на бревна данных размеров, доски и пр., так как отходы при этом оказываются очень большими. Значительные отходы, правда, должны быть; все же, мне кажется, что если решить этот вопрос математически и разработать правила выбора способов распиловки для стволов разных размеров, то эти отходы можно будет значительно уменьшить, и при том же сырье, том же количестве леса эти лесообрабатывающие предприятия смогут давать больше продукции.

Конечно, это случай наиболее сложный; кроме приведенных здесь соображений, в данном случае требуется еще специальная работа над применением этого метода к конкретным задачам. Но сама возможность его применения в этом вопросе мне представляется несомненной.

## V. Максимальное использование комплексного сырья

Если мы рассмотрим, например, нефтепереработку, то она дает разные продукты: бензин, лигроин, керосин, мазут и пр. При этом к одной и той же нефти может примениться несколько крекинг-процессов, разделяющих составные части нефти. В зависимости от того, какой крекинг-процесс к данной нефти применить, будет разный выход этих составных частей. Если данное нефтяное предприятие имеет определенный план и к нему поступают один или несколько сортов нефти в качестве сырья, оно должно разделить их по крекинг-процессам так, чтобы дать максимальную продукцию данного ассортимента. Легко убедиться, что решение вопроса приводится к задаче С.

Я полагаю, что нет надобности вновь вводить соответствующие обозначения, — это делается тем же способом, который был применен выше в других задачах. Я привел в качестве примера нефть, но те же обстоятельства встречаются при использовании разного рода углей и руд для выработки различных видов сталей, в том числе качественных — подбор наиболее подходящих руд и углей, их распределение по разным видам сталей представляет ту же задачу.

С тем же вопросом мы сталкиваемся, например, при обработке полиметаллических руд, в химической, коксохимической промышленности, т. е. всюду, где данное сырье может служить источником нескольких видов продуктов.

## VI. Наиболее рациональное использование топлива

Разные виды топлива — нефть, каменный уголь, бурый уголь, дрова, торф, сланцы — могут сжигаться, служить источником питания разных топливопотребляющих установок и дают разный эффект. Их приходится использовать в топках электростанций, паровозов, пароходов, мелких паровых машин, для городского парового отопления и пр. В настоящее время топливо распределяется часто случайным образом, не в соответствии с тем, какие виды топлива наиболее подходят к данной топливопотребляющей установке, и возможно ли потребление этого топлива на данной установке.

Между тем эффект разных видов топлива в разных условиях различен. Например, возможно, что на электростанции 2 т бурого угля равносильны 1 т антрацита, а в условиях работы на паровозе бурый уголь значительно труднее использовать должным образом, и, возможно, что только 3 т бурого угля дадут тот же эффект, что 1 т антрацита. Это я привел для примера, но, несомненно, такие различия имеют место в действительности.

То же самое относится и к разным сортам каменного угля: в зависимости от зольности, мелкости и пр., возможность и эффективность его сжигания в разных топках различна.

И вот опять вопрос распределения топлива, наиболее целесообразного, с тем, чтобы дать наиболее высокий процент обеспечения всех установок, исходя из наличных его запасов или плановой годовой его продукции, может быть решен методами нашей работы и приводит именно к задаче А.

Другой, более сложный вопрос — это, наоборот, исходя из наличного плана заезда или добычи топлива, указать выбор типов двигателей (дизели, газогенераторные установки, паровые турбины разных систем) и их процентное соотношение так, чтобы они были приспособлены к потреблению данного топлива и давали максимальный эффект, отражаемый в показателях у потребителей: в тонно-километрах для железной дороги и других видов транспорта, в киловатт-часах на электростанциях. Этот вопрос приводит к задаче С.

## VII. Наилучшее выполнение плана строительства при наличных строительных материалах

Здесь мы хотим указать на возможности приложения наших методов в вопросах планирования строительства.

В докладе тов. Молотова на XVIII съезде ВКП(б) упоминалось о том, что, наряду с перевыполнением плана II пятилетки по основным отраслям промышленности, план строительства был недовыполнен<sup>8)</sup>. Именно определенной части сумм, отпущенных на строительство, не удавалось освоить. Причиной этого в значительной степени являлось отсутствие отдельных видов материалов, специальностей рабочей силы и др., что надолго задерживало строительство или не позволяло приступить к нему, несмотря на наличие денежных средств. Нам кажется в то же время, что существующая система планирования строительства не дает максимального использования лимитирующих материалов и имеются возможности добиться большего выполнения планов строительства за счет более целесообразного распределения материалов.

Известно, что многие строительные сооружения — мосты, виадуки, промышленные здания, школы, гаражи и т. п. и их отдельные части могут быть выполнены в различных вариантах (железобетон, кирпич, крупные блоки, камень и т. д.). При этом часто несколько вариантов оказываются вполне допустимыми и даже примерно равноценными. Выбор одного из этих вариантов в таком случае производится при существующем порядке самой проектирующей организацией отдельно для каждого сооружения, причем выбор производится часто совершенно случайно, на основании того или другого незначительного преимущества одного варианта перед другим. Между тем вопрос о выборе вариантов является весьма важным, ибо в зависимости от варианта сооружения количество различных материалов, необходимых для его выполнения (цемента, железа, кирпича, извести и пр.), оказывается различным, различны и другие важные моменты (количество рабочей силы разных специальностей, необходимые строймеханизмы, транспорт и пр.).

Поэтому способом выбора вариантов сооружений в значительной степени определяется баланс материалов и пр., необходимых для выполнения всего плана строительства данного района или данной стройорганизации, а также напряженность этого баланса в отдельных его частях. По нашему мнению, выбор вариантов сооружений должен производиться не случайно, не для каждого сооружения в отдельности, а одновременно для всех сооружений данного района или стройорганизации с тем, чтобы добиться максимального соответствия между балансом необходимых материалов и пр. и намеченными планом ресурсами по каждому из важнейших видов материалов. Такой порядок, нам кажется, значительно ослабил бы дефицитность лимитирующих материалов и дал бы возможность большего выполнения плана строительства.

Предлагаемый нами порядок составления плана строительства примерно таков. Проектирующие организации для каждого сооружения составляют несколько (2–3) допустимых и наилучших вариантов и для них производят примерный подсчет необходимых материалов и других основных моментов. Таким образом, организация, планирующая строительство в данном районе, получает данные примерно по следующей схеме (табл. 8).

После этого планирующая организация производит выбор вариантов так, чтобы баланс необходимых материалов и пр. оказался обеспеченным запланирован-

<sup>8)</sup> «Большевик», 1939, № 5–6, стр. 96.

Таблица 8

Титульный список сооружений района (в порядке очередности)	Лимитирующие моменты									
	Материалы						Рабочая сила (по специальностям)	Строймеханизмы (по видам)	Транспорт	Денежные ассигнования (по статьям)
	цемент	известь	кирпич	металл	лесоматериалы					
1. Мост I вариант « II « « III «										
2. Школа I « « II «										
3. Гараж I « « II «										

ным на данный год их производством и чтобы в этот реальный план строительства попала максимально большая часть намеченного списка (в порядке очередности).

Что касается возможности решения задачи выбора вариантов в таких условиях, то этот вопрос приводит к задаче С с некоторыми дополнительными условиями, и, во всяком случае, представляет вопрос, разрешимый нашими методами даже в сравнительно сложных случаях (100–200 сооружений). Мы не останавливаемся здесь на различных деталях, как например, на расчетах между различными организациями, объединившими свои планы, а также материальные и денежные средства, — все эти вопросы также могут быть удовлетворительно разрешены.

### VIII. Наилучшее распределение посевной площади

Известно, что различие видов почвы, климатических условий и пр. порождает разную приспособленность различных районов и отдельных участков земли к возделыванию различных сельскохозяйственных культур. И правильный выбор плана посева весьма важен. Напомню о выступлении одного из делегатов на XVIII съезде партии. Он говорил о том, что в его области, в северных районах, гораздо лучше произрастает ячмень, а в южных районах — пшеница. Между тем Облземотдел план механически делит по всем районам в соответствии с площадью земли по всем культурам, и все равно, хорошо ли у тебя произрастает ячмень или плохо — сей ячмень. Но если решать вопрос о том, как целесообразнее распределять, — эта задача оказывается не такой простой.

Чтобы не быть голословным, я укажу здесь, как этот вопрос сводится к математической задаче. Пусть имеется  $n$  участков площадью  $q_1, q_2, \dots, q_n$  и  $m$  культур, которые по плану должны находиться в таком соотношении:  $p_1 : p_2 : \dots : p_m$ . Пусть на  $i$ -м участке ожидаемый урожай  $k$ -й культуры равен  $a_{ik}$  (в ц/га).

Теперь надо распределить, какую площадь первого участка (или первого района) занять под такую-то культуру, сколько под другую культуру и т. д., чтобы добиться максимального урожая. Обозначим через  $h_{ik}$  площадь (в га)  $i$ -го участка, занимаемую под посев  $k$ -й культуры. Тогда у нас сумма  $\sum_{k=1}^m h_{ik} = q_i$  равна общей площади  $i$ -го участка ( $h_{ik}$ , конечно, неотрицательные величины). Число центнеров ожидаемого урожая  $k$ -й культуры со всей площади тогда будет  $z_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} h_{ik}$  и нам нужно подобрать числа  $z_k$  так, чтобы они относились как заданные числа  $z_1 : p_1 = z_2 : p_2 = \dots = z_m : p_m$ , т. е. выдержать предписанное планом соотношение между культурами и получить максимальные  $z_k$  и максимальную продукцию. Эта задача приводится к задаче А. В самом деле, если мы примем  $h_{ik} q_i$  за новые неизвестные  $h_{ik}^*$  и если мы возьмем  $a_{ik}^* = a_{ik} / p_k q_i$ , то для величин  $h_{ik}^*$  и  $a_{ik}^*$  мы будем иметь в точности уравнения задачи А.

Мы рассматривали вопрос о получении максимальной урожайности на данный год. Если ставить вопрос о получении максимальной урожайности в течение ряда лет и учитывать севооборот и влияние следования культур на урожайность, то вопрос оказывается более сложным и приводит к задаче С. Если часть земель поливная и на  $i$ -м участке почвы при посеве  $k$ -го вида культуры норма расхода воды есть  $c_{ik}$  л/с на га, то получаем дополнительное условие  $\sum_{i,k} a_{ik} h_{ik} \leq C$ , если через  $C$  обозначить суммарную мощность в л/с источников орошения, т. е. приходим к задаче В.

Наконец, мы уже указывали в разд. III, что для решения вопроса о наилучшем распределении сельскохозяйственного инвентаря по видам работ также могут быть использованы наши методы.

Следует сказать, что при применении данных методов в сельском хозяйстве все-таки нужна некоторая осторожность, потому что здесь эти данные (предполагаемая урожайность) задаются весьма приблизительно, поэтому если они даны неправильно, то и решение может оказаться неправильным. Однако мне кажется, что даже в таких случаях соблюдение принципа наилучшего размещения и по ориентировочным данным может лишь в отдельном каком-нибудь случае (если эти данные будут ошибочны) дать неверное решение, но в массе — в среднем этот принцип даст все же положительный эффект.

## IX. Наилучший план перевозок

Рассмотрим, прежде всего, такой вопрос. Ряд грузов — нефть, хлеб, машины и т. д. — из одного пункта в другой могут перевозиться разными способами: по железной дороге, пароходом; могут быть смешанные перевозки — частью железной дорогой, частью автотранспортом и т. д.

При этом, в зависимости от видов груза, способов погрузки, приспособленности транспорта и т. п., эффективность различных видов транспорта различна. Например, нефть особо выгодно перевозить водным транспортом, если имеются нефтеналивные пароходы и т. д. Решение вопроса распределения заданного грузового потока по видам транспорта с осуществлением плана перевозок в кратчайший

срок или в заданный срок с наименьшим расходом топлива возможно методами нашей работы и приводит к задачам А или С.

Укажем еще одну задачу другого порядка, которая хотя и не подходит непосредственно под вопросы А, В и С, но также может быть решена нашими методами; это — выбор путей перевозок.

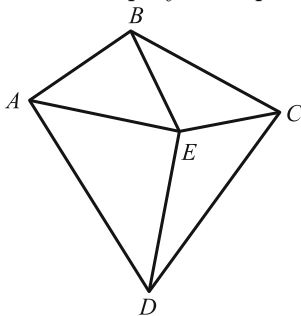


Рис. 1

Пусть имеется несколько пунктов  $A, B, C, D, E$  (рис. 1), которые связаны между собой железнодорожной сетью. Можно перевозку из  $B$  в  $D$  осуществлять по кратчайшему пути  $BED$ , но можно воспользоваться и другими путями, а именно:  $BCD, BAD$ . Пусть далее задан график грузовых потоков, т. е. из  $A$  в  $B$  нужно перевезти такое-то число вагонов, из  $D$  в  $C$  — такое-то и т. д. Задача состоит в следующем. Задана максимальная в данных условиях (она может, конечно, меняться при новых методах работы транспорта) пропускная способность каждой дороги. Необходимо распределить грузовой поток по различным путям так, чтобы, учитывая

при этом пустой прогон вагонов (т. е. добиваясь максимального уменьшения его) и учитывая максимально возможную нагрузку дорог, осуществить необходимые перевозки при минимальном расходе топлива. Как уже было указано, эта задача также может быть решена нашими методами.

На этом мы закончим рассмотрение отдельных видов задач.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

**а) Общее значение работы.** Основной смысл данной работы я вижу в том, что в ней развит метод решения такого рода проблем, в которых из огромного числа различных случаев и вариантов требуется выбрать наиболее благоприятный. При этом данный метод делает решение вопроса вполне осуществимым зачастую даже в весьма сложных случаях, где выбор наиболее благоприятного варианта приходится производить из миллионов или даже миллиардов мыслимых возможностей, и при этом приходится еще учитывать различные дополнительные условия.

Общеизвестно, что такого рода вопросы встречаются постоянно в технико-экономических проблемах, в особенности связанных с организацией и планированием производства. Многие из этих проблем подходят непосредственно под задачи А, В и С, рассмотренные выше, и потому могут решаться нашими методами. Многие другие проблемы приводят к математическим задачам, отличным от этих, но также разрешимым теми же методами.

До сих пор все эти технико-экономические проблемы решались довольно случайно, на глаз, по чутью, и, конечно, получаемое решение лишь в редких случаях было наилучшим. При этом проблема нахождения наивыгоднейшего решения часто даже не ставилась, а когда она и ставилась, решить ее в большинстве случаев не удавалось. Теперь открывается возможность в ряде случаев для таких проблем получать не случайное решение, а определенным научно обоснованным путем находить наивыгоднейшее решение.

**б) Пути дальнейшего исследования.** В своем настоящем виде эта работа, конечно, является далеко незаконченной и в большой степени не отвечает тем задачам, которые она должна ставить перед собой. Данная работа является только



предварительной наметкой будущего обстоятельного сочинения на эту тему, в котором сможет быть освещена достаточно полно та важная проблема, которая пока в значительной мере только ставится. Однако, чтобы к этому прийти, нужны еще дальнейшие большие исследования, проводимые притом соединенными усилиями математиков и работников производства.

И в математическом отношении многое еще остается для дальнейшего, хотя и сделан важный шаг — дан весьма универсальный и достаточно эффективный метод решения широкого класса проблем. В дальнейшем нужно определить объем приложимости метода, указать дальнейшие задачи, разрешимые с помощью него; разработать детали техники применения метода<sup>9)</sup>; особенности этой техники в различных конкретных условиях; разработать более простые приемы, позволяющие находить, хотя и не самое выгодное решение, но решение, весьма близкое к нему и практически с ним равноценное; усовершенствовать способ изложения метода и пр. Еще большие усилия требуются, чтобы добиться действительного использования этой работы со стороны техников — специалистов различных отраслей народного хозяйства.

Прежде всего нужно определить те вопросы в различных областях народного хозяйства, где приложимость наших методов представляется наиболее возможной и реальной. Некоторую попытку очертить и наметить эти вопросы мы сделали в данной работе, но, конечно, трудно ожидать, чтобы она была вполне удачной и не встретила критики со стороны специалистов. Некоторые из этих вопросов, возможно, будут в дальнейшем признаны нереальными или неактуальными, в другие внесены существенные коррективы и дополнения; наконец, несомненно, будет указан ряд других вопросов, которые вовсе выпали из нашего внимания.

Несмотря на это, мы сочли нужным такую попытку сделать, полагая, что для инженера наши методы и задачи станут более понятными и доступными, если они будут связаны с конкретными практическими вопросами. Указание же большого числа таких вопросов разнообразного характера позволит ему лучше представить себе и очертить тот круг вопросов, где наши методы приложимы, и тем самым поможет отыскать или поставить различные подобные вопросы в области его специальности, т. е. облегчит возможность творческого применения этих методов.

После того как будут выявлены определенные области, где приложимость математических методов целесообразна, встанет вопрос о разработке специфики применения этих методов в данных вопросах. Сюда относятся: точное выяснение обстоятельств, при которых эти методы способны давать значительный эффект и их применение «показано»; разработка специальных технических данных, которые нужны для применения этих методов; обработка этих данных в виде удобных для использования таблиц; разработка деталей самого метода специально для задач, встречающихся в данной области (указание на правило выбора первого приближения и пр.) и т. д.

**с) Ответ на некоторые принципиальные возражения.** Как мы уже указывали, мы считаем вполне вероятным, что те или иные разобранные нами примеры

---

<sup>9)</sup>Заметим, что мы не ожидаем, чтобы на пути усовершенствования метода можно было бы пойти очень далеко; например, чтобы вместо способа расчета, который предлагается нами, были бы указаны разрешающие формулы, таблицы или номограммы. Дело и в том, что в постановке вопроса участвует большое число (до 40) различных данных, играющих притом индивидуальную роль, а в таких условиях решение в виде формул или таблиц представляется невероятным.

(а возможно и целые области вопросов) встретят возражения со стороны специалистов. Мы признаем возможным, что в отдельных случаях эти возражения могут быть настолько обоснованными, что заставят нас отказаться от какой-либо области приложений. Однако, наряду с этими специальными частными возражениями, нам пришлось (несмотря на весьма благоприятное мнение большинства) встретиться с отдельными возражениями общего характера, по существу, сводящимися к принципиальному отрицанию возможности применения математических методов в технико-экономических вопросах из области организации и планирования. Вот эти общие возражения я и хочу здесь рассмотреть.

Первое из них состоит в следующем. При рассмотрении различных конкретных практических задач обстановка настолько сложна, имеется столько привходящих обстоятельств, что учесть все это математически невозможно, а если это и удастся, то полученные уравнения все равно нельзя будет разрешить.

По этому поводу можем сделать два замечания. Во-первых, как мы уже упоминали, рассматриваемый метод является весьма мощным и гибким, т. е. допускает решение в довольно сложной обстановке при учете ряда дополнительных условий и притом допускает различные вариации при использовании его (так что всегда можно выбрать наиболее подходящий способ его применения).

Во-вторых, если некоторые практические детали и не учтены, то после того, как наивыгоднейшее решение найдено, можно внести в него коррективы, учитывающие и эти детали. Это тем более возможно, что данный метод одновременно с нахождением наивыгоднейшего варианта показывает, какие варианты дают решение, близкое к наивыгоднейшему, и потому имеется возможность при внесении этих коррективов лишь немного отойти по эффективности от наивыгоднейшего варианта.

Следует еще сказать, что приведенное возражение могло быть с таким же успехом высказано и, вообще, по отношению к применению теоретических, в частности, математических методов в технических вопросах. Между тем известно, как ценят техники даже самую грубую теоретическую схему явления, учитывающую хотя бы один из важных его моментов, ибо такая схема является всегда ценным направляющим моментом и при экспериментах, и в расчете, и при проектировании. Тем более должен быть ценным метод, позволяющий в сложной обстановке учесть целый ряд условий.

Второе возражение состоит в том, что для применения метода необходимо иметь большое число различных данных ( $a_{ik}$  в задаче А и т. п.), а таких данных может не оказаться, и тогда метод неприменим.

На это следует ответить, что данные, которые нам нужны (норма выработки на различных станках и механизмах, количества наличных материалов и их свойства и пр.), необходимы для всяких других целей — нормирования, зарплаты, норм расходования материалов, отчетов и пр. — и должны быть на всяком нормально работающем предприятии. Короче говоря, они в такой же мере необходимы для составления какого бы то ни было плана, как и для составления по нашему методу наилучшего плана, а потому предприятие должно этими данными располагать.

В некоторых случаях все же оказывается, что таких данных нет; например, материал на стройку должен прибыть, а какой точно — неизвестно, но, во всяком случае, он должен быть в тот же день пущен в работу. Или материалы присланы не те, которые были запланированы, и т. п. Конечно, на тех немногих предприятиях,

где царит такая «примитивная» бесхозяйственность, никакое планирование, а тем более наиболее целесообразное, невозможно. Но если желание применить наши методы послужит лишним стимулом для ликвидации такой бесхозяйственности, то это только довод в пользу этих методов.

Третье возражение состоит в том, что исходные данные в ряде случаев сомнительны и известны лишь весьма приближенно (например, урожайность разных культур, расход воды при гидромеханической разработке грунтов и другие данные в некоторых приведенных выше примерах), поэтому и расчет, основанный на этих данных, может оказаться неверным.

Здесь, прежде всего, нужно сказать, что теми же данными приходится пользоваться и при всяком другом способе выбора плана и нет причин думать, что их сомнительность и неточность сыграет большую отрицательную роль для плана, выбранного наиболее целесообразно, чем для плана, случайно выбранного.

Все же мы не исключаем возможности, что в отдельном случае найденный по нашему методу наиболее целесообразный вариант плана на самом деле, в результате неверных данных, таковым не окажется.

Однако мы полагаем, что при массовом применении выбор наиболее благоприятных вариантов, даже при таких сомнительных данных, даст, благодаря статистическому эффекту, положительный результат. Поясним эту мысль следующим простым примером. Если мы из двух яиц выберем большее, такой выбор может быть и неудачным — оно может оказаться тухлым. Но если мы из ящика в 1000 яиц отберем 500 самых крупных и выберем эту половину, то совершенно невероятно, чтобы такой выбор оказался неправильным.

Четвертое возражение состоит в том, что эффект, получаемый при переходе от обычно выбранного варианта к наилучшему, сравнительно небольшой, во многих случаях всего 4–5%.

Тут нужно сказать, во-первых, что применение наилучшего варианта не требует никаких дополнительных затрат по сравнению с обычным, кроме совершенно незначительных расходов на вычисления. Во-вторых, применений метода можно ожидать не в одном случайном вопросе, а во многих, возможно даже в большинстве отраслей народного хозяйства, а в таком случае не только 1%, но каждая десятая доля процента несет за собой огромные суммы.

Пятое возражение заключается в том, что в ряде случаев применение метода представляется невозможным вследствие различных препятствий организационного характера, связанных с принятым порядком утверждения планов, смет и пр.; например, если те или иные материалы или механизмы уже распределены определенным образом между предприятиями, то это распределение не может быть изменено в течение данного квартала и т. д.

Это возражение, конечно, несущественно. Если будет общепризнано, что применение наиболее целесообразного плана способно дать значительный народнохозяйственный эффект, но для его проведения необходимо некоторое изменение порядка утверждения смет, проектов или планов, то можно не сомневаться в том, что такое изменение будет сделано.

---

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

## Метод разрешающих множителей

Здесь мы имеем в виду дать подробное изложение того метода разрешающих множителей, о котором упоминалось в разд. I и который, по нашему мнению, является наиболее эффективным как для решения задач А, В и С, так и для многих других задач аналогичного характера, связанных с выбором наиболее благоприятного варианта из весьма большого числа возможных. Мы рассмотрим при этом главным образом применение этого метода к основной задаче — задаче А, хотя в дальнейшем говорим и о других задачах.

**1. Решение задачи А для  $m = 2$ . Общая идея метода.** Рассмотрим сначала задачу А для простейшего случая, когда  $m = 2$  (две детали). В этом случае задача принимает вид: найти числа  $h_{i1}$  и  $h_{i2}$  из условий:

- 1)  $h_{i1}, h_{i2} \geq 0$ ;
- 2)  $h_{i1} + h_{i2} = 1$ ;
- 3)  $\sum_{i=1}^n h_{i1} a_{i1} = \sum_{i=1}^n h_{i2} a_{i2}$

и их общее значение  $z$  имеет максимально возможную величину. Рассмотрим отношение  $a_{i1}/a_{i2}$  для всех  $i$  (отношения производительностей каждого станка по I и II детали). Таким образом, на первом станке единица I детали равносильна  $k_1$  единицам II детали, на втором единица I детали равносильна  $k_2$  единицам II детали и т. д. Можем считать, что отношения  $k_1, k_2, \dots$  идут в порядке возрастания  $k_1 \leq k_2 \leq \dots$ ; если бы это было не так, то мы могли бы добиться этого, изменяя нумерацию станков, а именно: достаточно было бы расположить эти отношения в порядке возрастания, а затем тот станок, для которого отношение наименьшее, назвать первым и т. д. Итак считаем, что у нас неравенства  $k_1 \leq k_2 \leq \dots$  выполнены. Ясно, что относительно выгоднее всего производить I деталь на первом станке, так как снятие одной детали с этого станка позволит заменить ее всего  $k_1$  штук II деталей, в то время как на всех остальных соответствующие числа  $k_2, k_3, \dots$  больше  $k_1$ . На втором станке I деталь производить менее выгодно, чем на первом, но выгоднее, чем на всех остальных. Отсюда понятно, что первые станки следует отвести под I деталь, а последние под II, т. е. в первых случаях нужно принять  $h_{i1} = 1$ ;  $h_{i2} = 0$ , а в последних  $h_{i1} = 0$ ;  $h_{i2} = 1$ ; при этом суммарные производительности по обеим деталям должны быть одинаковы. Исходя из этого требования, подбираем число  $s$  так, чтобы было

$$\sum_{i=1}^{s-1} a_{i1} < \sum_{i=s}^n a_{i2}, \quad \sum_{i=1}^s a_{i1} \geq \sum_{i=s+1}^n a_{i2},$$

это означает, что отвести  $s - 1$  станок под I деталь мало (производительность по II будет больше), а отвести  $s$  достаточно или много. Тогда ясно, что, беря  $h_{i1} = 1$ ;  $h_{i2} = 0$  для  $i = 1, 2, \dots, s - 1$ ;  $h_{i1} = 0$ ;  $h_{i2} = 1$  для  $i = s + 1, \dots, n$  и определяя  $h_{s1}$  и  $h_{s2}$  из условий

$$h_{i1} + h_{i2} = 1; \quad \sum_{i=1}^{s-1} a_{i1} + h_{s1} a_{s1} = \sum_{i=s+1}^n a_{i2} + h_{s2} a_{s2}$$

и получим решение нашей задачи.

Применим этот процесс решения к нашему первому примеру. Производительности по группам станков там были следующие (табл. 1).

Таблица 1

Детали	Группы станков		
	Фрезерные	Револьверные	Автоматические
I	30	60	30
II	60	90	80

Отношения у нас будут  $\frac{60}{30} = 2$ ;  $\frac{90}{60} = \frac{3}{2}$ ;  $\frac{80}{30} = \frac{8}{3}$ , или в порядке возрастания их величины  $\frac{3}{2} < 2 < \frac{8}{3}$ . Расположив производительности в этом же порядке (револьверные — фрезерные — автомат), получаем такие значения для  $a_{ik}$ :

$$a_{11} = 60; \quad a_{21} = 30; \quad a_{31} = 30; \quad a_{12} = 90; \quad a_{22} = 60; \quad a_{32} = 80.$$

Беря  $s = 2$ , получаем:

$$\sum_{i=1}^{s-1} a_{i1} = a_{11} = 60 < \sum_{i=s}^n a_{i2} = a_{22} + a_{32} = 140;$$

$$\sum_{i=1}^s a_{i1} = a_{11} + a_{21} = 90 > \sum_{i=s+1}^n a_{i2} = a_{22} = 80.$$

Следовательно,

$$h_{11} = 1; \quad h_{12} = 0; \quad h_{31} = 0; \quad h_{32} = 1.$$

Для определения  $h_{21}$  и  $h_{22}$  имеем уравнения:

$$h_{21} + h_{22} = 1; \quad 60 + 30h_{21} = 80 + 60h_{22},$$

откуда

$$h_{21} = \frac{8}{9}; \quad h_{22} = \frac{1}{9},$$

что и приводит к тому наивыгоднейшему распределению деталей по станкам, которое дано в табл. 2 разд. I.

Теперь мы хотим обратить внимание на один момент, связанный с приведенным процессом получения решения, который позволит наметить путь распространения этого способа решения с простейшего случая  $m = 2$  на случай любого  $m$ . Мы хотим обратить внимание на то, что полное нахождение решения совершенно эквивалентно нахождению отношения  $k_s$ , отвечающего тому  $s$ , для которого мы производим выбор. Действительно, если это отношение  $k_s = a_{s2}/a_{s1} = \lambda_1/\lambda_2$  (для дальнейшего нам удобнее обозначить его именно так) известно, то все решение находится сразу: для тех  $i$ , для которых  $a_{i2}/a_{i1} < \lambda_1/\lambda_2$  или, что то же самое,  $\lambda_1 a_{i1} > \lambda_2 a_{i2}$ ,

нужно отдать предпочтение I детали, т. е. взять  $h_{i1} = 1$ ;  $h_{i2} = 0$ ; для тех  $i$ , где  $\lambda_2 a_{i2} > \lambda_1 a_{i1}$ , отдать предпочтение II детали, т. е. принять  $h_{i1} = 0$ ;  $h_{i2} = 1$ ; и, наконец, для тех  $i$ , когда  $\lambda_1 a_{i1} = \lambda_2 a_{i2}$ , соответствующее  $A$  подобрать из уравнения  $\sum a_{i1} h_{i1} = \sum a_{i2} h_{i2}$ . Это разрешающее отношение есть показатель равновесия, которое устанавливается в максимальном распределении между двумя деталями. В нашем частном примере это равновесие устанавливается на фрезерных станках и  $\lambda_1/\lambda_2 = 2/1$ . Следует сказать, что это разрешающее отношение определяется всей совокупностью условий вопроса, например, оно не может быть выражено только через  $k_1, k_2, \dots$ . Действительно, если бы в нашем частном примере был не один автомат, а два, тогда при максимальном распределении пришлось бы под I деталь отвести не только полностью револьверные и фрезерные станки, но частично и автомат. Поэтому тогда разрешающее отношение стало бы  $\lambda_1/\lambda_2 = 8/3$ ; наоборот, если бы втрое увеличилось число револьверных станков, то это отношение стало бы равно  $3 : 2$ .

Эту именно идею введения разрешающих отношений мы и используем для получения способа решения, пригодного для любого  $m$ . В этом случае, естественно, приходит мысль вместо разыскания многочисленных  $h_{ik}$  попытаться отыскать отношения  $\lambda_1 : \lambda_2 : \dots : \lambda_m$  (показатели равновесия при максимальном распределении), судя по которым так же, как в случае  $m = 2$ , мы могли бы сразу указать те  $h_{ik}$ , которые нужно взять равными нулю. Этот метод действительно удается осуществить. Его детальное изложение дано ниже. Перед тем как перейти к нему, установим одно вспомогательное обстоятельство.

**2. Преобразование условия 3) задачи А.** Нам важно для дальнейшего показать, что условию 3) задачи А можно придать другую формулировку, эквивалентную первоначальной.

Напомним формулировку задачи А.

**Задача А.** Числа  $a_{ik} \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ) даны; найти  $h_{ik}$  из условий:

- 1)  $h_{ik} \geq 0$ ;
- 2)  $\sum_{k=1}^m h_{ik} = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ );
- 3) если ввести обозначение

$$z_k = \sum_{i=1}^n h_{ik} a_{ik},$$

то  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$  и их общее значение  $z$  имеет максимальную возможную величину.

При составлении условий, которым должны удовлетворять числа  $h_{ik}$ , мы могли бы рассуждать и несколько иначе, чем это было сделано выше (разд. I), именно: так как число целых комплектов определяется числом деталей, которых имеется меньше всего, т. е. наименьшим из чисел  $z_k$ , то это число есть  $z' = \min(z_1, z_2, \dots, z_m)$ . Это число  $z'$  и должно получить максимальное значение.

Таким образом приходим к задаче А'.

**Задача А'.** Условия 1) и 2) те же, что и в задаче А, а вместо условия 3):

3') Величина  $z' = \min(z_1, z_2, \dots, z_m)$  имеет максимально возможное значение.

Покажем теперь эквивалентность задач А и А', точнее: установим следующее утверждение.

**Теорема.** Если через  $C$  обозначить максимальное значение  $z$  в задаче А, а через  $C'$  — максимальное значение  $z'$  в задаче А', то  $C = C'$ , и если при этом некоторая система чисел  $\{h_{ik}\}$  доставляет максимум в задаче А, то она же дает максимум в задаче А'; наоборот, если некоторая система чисел  $\{h'_{ik}\}$  дает максимум в задаче А', то из нее легко может быть получена система чисел  $\{h_{ik}\}$ , дающая максимум в задаче А.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть система чисел  $\{h_{ik}\}$  дает максимум в задаче А, т. е. для нее мы имеем  $z_1 = z_2 = \dots = z_m = z = C$ . Для этой же системы мы имеем, очевидно:

$$z' = \min(z_1, z_2, \dots, z_m) = \min(C, C, \dots, C) = C.$$

Так как  $C$  — это значение, которое мы получили для  $z'$  при некотором выборе  $h_{ik}$ , а  $C'$  есть  $\max z'$  при всех возможных выборах, то  $C \leq C'$ .

Для доказательства обратного неравенства рассмотрим сначала основной случай, когда все  $a_{ik} > 0$ . Пусть для некоторой системы  $\{h'_{ik}\}$  мы имеем  $z' = \min(z_1, z_2, \dots, z_m) = C'$ . Мы утверждаем, что в таком случае непременно все  $z_k = C'$ . В самом деле, пусть, наоборот, одно из них  $> C'$ , например,  $z_1 > C'$ . В этом случае можно было бы все  $h'_{i1}$  незначительно уменьшить, за счет чего незначительно увеличить все прочие  $h'_{ik}$ ; тогда по-прежнему осталось бы  $z_1 > C'$  и все  $z_2, \dots, z_m$  увеличились бы и стали также  $> C'$ . А потому оказалось бы, что для этой новой системы  $z' = \min(z_1, z_2, \dots, z_m) > C'$ , а это противоречит тому, что  $C'$  есть максимальное возможное для  $z'$  значение. Итак, непременно  $z_1 = z_2 = \dots = z_m = C'$ . Следовательно,  $h'_{ik}$  дает систему значений, для которой  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$ , и их общее значение  $z$  равно  $C'$ ; так как  $C$  есть максимальное возможное значение для  $z$ , то непременно  $C' \leq C$ .

Это неравенство вместе с прежним и дает  $C' = C$ .

Второе неравенство  $C' \leq C$  установлено нами для случая, когда все  $a_{ik} > 0$ ; если некоторые  $a_{ik} = 0$ , то это неравенство также справедливо, только доказательство его требует некоторых дополнительных соображений, которые мы здесь не будем приводить.

### 3. Основания метода разрешающих множителей

Мы покажем теперь, что решение задачи А, требующее разыскания системы  $nm$  чисел  $h_{ik}$ , может быть заменено задачей разыскания всего  $m$  чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  — разрешающих множителей.

*Разрешающими множителями* для задачи А называется такая система  $m$  чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ( $\lambda_k \geq 0$  и не все нули), что если для каждого данного  $i$  рассмотреть произведение

$$\lambda_1 a_{i1}, \lambda_2 a_{i2}, \dots, \lambda_k a_{ik}$$

и обозначить через  $t_i$  величину наибольшего из них, то, принимая равными нулю те  $h_{ik}$ , для которых соответствующее произведение не максимально ( $\lambda_k a_{ik} < t_i$ ), прочие  $h_{ik}$  возможно определить из условий:

- 1)  $h_{ik} \geq 0$ ;
- 2)  $\sum_{k=1}^m h_{ik} = 1$ ;
- 3)  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$ .

Покажем, прежде всего, что нахождение разрешающих множителей действительно дает решение задачи А. Утверждаем, что если разрешающие множители  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  найдены и числа  $h_{ik}^*$  затем определены указанным выше образом, то получаемое с их помощью значение  $z = z^*$  есть максимально возможное значение.

В самом деле, для системы чисел  $h_{ik}^*$  имеем:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^m \lambda_k \right) z^* &= \sum_{k=1}^m \lambda_k z_k^* = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ik} h_{ik}^* = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\lambda_k a_{ik}) h_{ik}^* = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m t_i h_{ik}^* = \sum_{i=1}^n t_i \end{aligned}$$

(мы могли заменить всюду  $\lambda_k a_{ik}$  на  $t_i$ , ибо для тех случаев, когда  $\lambda_k a_{ik} < t_i$ , по условию,  $h_{ik}^* = 0$ ).

Пусть теперь  $h_{ik}$  — другая система чисел, для которой  $z_1 = z_2 = \dots = z_m = z$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^m \lambda_k \right) z &= \sum_{k=1}^m \lambda_k z_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k \sum_{i=1}^n a_{ik} h_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (\lambda_k a_{ik}) h_{ik} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m t_i h_{ik} = \sum_{i=1}^n t_i. \end{aligned}$$

Сопоставляя это неравенство с предыдущим равенством, получаем:

$$\left( \sum_{k=1}^m \lambda_k \right) z \leq \left( \sum_{k=1}^m \lambda_k \right) z^*.$$

Это и показывает, что значение  $z^*$  есть максимальное возможное для  $z$  значение, т. е. числа  $h_{ik}^*$ , определенные с помощью разрешающих множителей, действительно дают решение задачи А<sup>10)</sup>.

<sup>10)</sup> Чтобы показать, какую роль играет введение разрешающих множителей, я несколько подробнее поясню, в чем состоит метод решения задачи А, вытекающий из общих правил анализа. В задаче А речь идет о разыскании максимума величины  $z$ , которая представляет линейную функцию от  $h_{ik}$  при некоторых дополнительных условиях. Известно, что для нахождения максимума линейной функции в промежутке достаточно сравнить ее значения на концах и выбрать большее из них. Это же правило сохраняется и при нахождении максимума линейной функции многих переменных в многограннике — достаточно сравнить ее значения в его вершинах. Если это правило перевести на аналитический язык, то оно означает, что в данном случае следует выбирать системы



Итак, все дело сводится к разысканию разрешающих множителей. Покажем путь их нахождения. Заметим, прежде всего, что если мы возьмем вместо разрешающих множителей некоторый случайный набор чисел  $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ , то мы все равно можем попытаться поступать так, как если бы они были искомыми разрешающими множителями, а именно: рассмотреть произведения  $\lambda_1^0 a_{i1}; \lambda_2^0 a_{i2}; \dots; \lambda_m^0 a_{im}$  и для всех тех  $k$ , для которых соответствующее произведение не максимально, принять  $h_{ik} = 0$ . Нужно сказать, однако, что при таком случайном выборе обычно окажется, что среди произведений максимально только одно, так что при данном  $i$  все  $h_{ik}$  нужно будет взять равными нулю, за исключением одного, которое придется принять равным 1.

Таким образом, при таком случайном выборе  $\lambda_k$  вполне определятся  $h_{ik}$ , а вместе с ними получат определенное значение и  $z_k$ :  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0$ . Конечно, эти значения не будут равны и, не меняя  $\lambda_k$ , сделать их равными не удастся. В каком же направлении изменять  $\lambda_k$ ?

Мы знаем, что решение задачи будет достигнуто тогда (см. п. 2), когда  $\min(z_1, z_2, \dots, z_m)$  получит максимально возможное значение. Но этот минимум определяется наименьшим из чисел  $z_k$ . Пусть в полученной системе таким наименьшим из чисел  $z_1^0, z_2^0, \dots, z_m^0$  будет некоторое  $z_s^0$ . Нужно добиваться его увеличения, но ясно, что оно заменится на большее, если, не изменяя прочих  $\lambda_k$ , мы  $\lambda_s$  заменим на большее число. В самом деле, тогда в большем числе случаев произведение  $\lambda_s a_{is}$  окажется максимальным в своем ряду, а потому  $h_{is}$  будет принято равным единице, а тем самым  $z_s$  получит значение большее, чем  $z_s^0$ , и  $\min(z_1, z_2, \dots, z_m)$ , вообще говоря, получит значение, превосходящее прежнее.

В этом собственно и состоит основной принцип в разыскании разрешающих множителей, а именно: за счет изменения  $\lambda_k$  подтягивать  $z_k$  и, таким образом, постепенно подвигаться к необходимому экстремуму. Возможны, конечно, и некоторые вариации: вместо подтягивания отстающих  $z_k$  можно, уменьшая соответственное  $\lambda_k$ , приближать к прочим слишком большие  $z_k$ . Однако, если эти операции производить случайным образом, без системы, то нет уверенности, что мы когда-либо их закончим: одни  $z_k$  будут подтягиваться, зато другие могут снизиться, и приближения к результату мы не получим. Поэтому в данном процессе лучше следовать определенной системе вычислений, которую мы сейчас опишем. Для большей ясности изложение этой схемы проведем на примере.

#### 4. Примерная схема вычислений

Рассмотрим решение задачи о наивыгоднейшем распределении работы экскаваторов (пример 3).

---

из  $n + m - 1$  чисел  $h_{ik}$ , прочие брать равными нулю, а выбранные  $h_{ik}$  определять из  $n + m - 1$  равенств  $\sum_k h_{ik} = l$ ;  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$  и сравнивать получаемые значения  $z$ . При каждой пробе надо будет решить систему небольшого числа уравнений, но число проб, которые нужно будет произвести, есть  $C_{nm}^{n+m-1} - nC_{(n-1)m}^{n+m-1}$ , т. е. при  $n = 3$ ;  $m = 3$  — 108 проб, при  $n = m = 4$  — 8272 пробы; в задаче фанерного треста  $n = 8$ ;  $m = 5$  число проб — величина порядка миллиарда. Благодаря же наличию разрешающих множителей все ненужные системы отбрасываются и приходится решать только одну.

Для того чтобы указанные нам виды работы совершить в кратчайшее время, нужно указать распределение их, при котором будет обеспечена максимальная производительность в один час при условии, что все виды работ производятся поровну. Тогда данная задача приводит в точности к задаче А, где роль  $a_{ik}$  играют данные о производительности экскаваторов (значения их даны в табл. 5 разд. III и воспроизведены ниже в табл. 2). Прежде всего, в качестве начальных значений  $\lambda_k : \lambda_k^0$  выгодно выбирать величины, обратно пропорциональные суммам  $\sum_i a_{ik}$ ;

$\lambda_k^0 = \frac{P}{\sum_i a_{ik}}$ , где в качестве  $P$  можно принять любое число.

В нашем примере примем  $P = 1000$  и тогда окажется:

$$\lambda_1^0 = \frac{1000}{276} = 3,62; \quad \lambda_2^0 = \frac{1000}{160} = 6,25; \quad \lambda_3^0 = \frac{1000}{192} = 5,21.$$

Домножим элементы  $a_{ik}$  на  $\lambda_k^0$ , т. е. нам придется первую строку таблицы значений  $a_{ik}$  домножить на  $\lambda_1^0 = 3,62$ , вторую на  $6,25$ , третью на  $5,21$ .

Таблица 2

Значения  $a_{ik}$ 

$k$	$i$	1	2	3
1		105	107	64
2		56	66	38
3		56	83	53

Полученные произведения  $\lambda_k^0 a_{ik}$  даны в табл. 4 (нулевое приближение — левая колонка). При каждом  $i$  (в каждом столбце) выбираем наибольшее значение — оно подчеркнуто<sup>11</sup>). Для этих значений и берем  $h_{ik} = 1$ , для прочих  $h_{ik} = 0$ . Произведения  $a_{ik} h_{ik}$  выписаны в той же табл. 4 справа. Суммируя их по каждой строке, получаем значения  $z_k$  для нулевого приближения:  $z_1^0 = 105$ ;  $z_2^0 = 0$ ;  $z_3^0 = 136$ .

Отстающим оказалось  $z_2$ , поэтому нужно  $\lambda_2$  увеличить. Увеличивать  $\lambda_2$  нужно настолько, чтобы обеспечить первое совпадение, а именно: рассматриваем элементы отстающей второй строки ( $\lambda_k^0 a_{ik}$  в табл. 4) и выбираем среди них тот, который относительно наиболее близок к максимальному (подчеркнутому) элементу своего столбца — это 412 (близко к 432). Увеличиваем  $\lambda_2$  и подтягиваем его до этого максимального. Для этого к  $\lambda_2$  нужно внести «поправочный множитель»  $\lambda_2$ :  $\lambda_2^0 = 432 : 412 = 1,05^{12}$ ;  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  оставлены без изменений, т. е. для них берем поправочным множителем единицу ( $\lambda_k$  и все поправочные множители к ним во всех

<sup>11</sup>)Цифры, о которых мы говорим «подчеркнуто», напечатаны в табл. 4 (и ниже — в табл. 7 и 8) жирным шрифтом.

<sup>12</sup>)Все величины, относящиеся к нулевому приближению, отмечаем значком <sup>0</sup> (наверху), относящиеся к первому приближению — значком <sup>1</sup> и т. д.

приближениях даны в табл. 3). Домножаем вторую строку значений  $\lambda_k^0 a_{ik}$  на этот поправочный множитель 1,05, а первую и третью переписываем без изменений; тогда получаем значения  $\lambda_k^1 a_{ik}$  для первого приближения. Опять подчеркиваем максимальные в каждой строке.

**Таблица 3**  
**Разрешающие множители**

	Начальные значения	Поправочные множители		Окончательные значения
		I приближение	II приближение	
$\lambda_1$	3,62	1	0,97	3,45
$\lambda_2$	6,25	1,05	1	6,56
$\lambda_3$	5,21	1	1	5,21

Теперь все  $h_{ik}$  определены и равны 0 или 1, за исключением  $h_{22}$  и  $h_{23}$ , отвечающих равным произведениям. Их постараемся определить так, чтобы  $z_2$  и  $z_3$  оказались равными. Обозначая  $h_{22}$  через  $u$  и, имея в виду, что сумма  $h_{22} + h_{23} = 1$ , имеем  $h_{23} = 1 - u$ ; условие  $z_2 = z_3$  дает нам:

$$66u = 83(1 - u) + 53,$$

откуда  $u = 0,913$ .

Следовательно,  $h_{22} = 0,913$ ;  $h_{23} = 0,087$ .

Подставляя эти значения в табл. 4 для  $a_{ik} h_{ik}$ , получаем для  $z_k$  в первом приближении значения  $z_1 = 105$ ;  $z_2 = z_3 = 60,2$ . Как видим, последние два значения являются отстающими, и нужно  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  подтягивать; но так как имеют значение только отношения между  $\lambda_k$ , можно вместо этого спускать  $\lambda_1$ . Итак, вводим для  $\lambda_1$  поправочный множитель  $< 1$ , именно такой, чтобы максимальный элемент первой строки (380) совпал с одним из элементов своего столбца. Очевидно, этот поправочный множитель должен быть  $\lambda_1'' : \lambda_1' = 365 : 380 = 0,964$ . Помножаем на этот множитель элементы первой строки, переписывая вторую и третью без изменений; получаем  $\lambda_k'' a_{ik}$  во втором приближении. Опять подчеркиваем максимальное число в каждом столбце; таких оказывается в первом и втором столбце по два, и соответствующие  $h_{ik}$  не определены.

Обозначим  $h_{11} = x$ ;  $h_{22} = y$ , тогда  $h_{12} = 1 - x$ ;  $h_{23} = 1 - y$ . Постараемся подобрать  $x$  и  $y$ , чтобы добиться равенства  $z_1 = z_2 = z_3$ . Имеем следующие значения (табл. 4).

$$z_1 = 105x; \quad z_2 = 56(1 - x) + 66y; \quad z_3 = 83(1 - y) + 53.$$

Следовательно, получаем уравнения:

$$105x = 56(1 - x) + 66y = 83(1 - y) + 53 = z.$$

Таблица 4

$\lambda_k a_{ik}$			$a_{ik} h_{ik}$			$z_k$
Нулевое приближение						
<b>380</b>	388	232	105×1	107×0	64×0	105
350	412	238	56×0	65×0	38×0	0
292	<b>432</b>	<b>276</b>	56×0	83×1	53×1	136
Первое приближение						
<b>380</b>	388	232	105×1	107×0	64×0	105
367	<b>432</b>	249	56×0	66×0,913	38×0	60,2
292	<b>432</b>	<b>276</b>	56×0	83×0,087	53×1	60,2
Второе приближение						
<b>367</b>	374	224	105×0,67	107×0	64×0	70,5
<b>367</b>	<b>432</b>	249	56×0,33	66×0,789	38×0	70,5
292	<b>432</b>	<b>276</b>	56×0	83×0,211	53×1	70,5

Отсюда:

$$x = \frac{1}{105}z; \quad y = \frac{36}{83} - \frac{1}{83}z.$$

Подставляя эти выражения в среднее уравнение, получаем для  $z$  уравнение:

$$164,1 - 0,533z - 0,795z = z,$$

откуда:  $z = 70,5$ , и далее:  $x = 0,67$ ;  $y = 0,789$ .

Найденные значения  $x$  и  $y$  и дают нам значения  $h_{ik}$  для второго приближения, одновременно являющегося решением задачи.

Найденное значение  $z = 70,5$  показывает максимальную величину выработки в час по всем трем видам работ при условии равенства этих выработок.

Так как нужно произвести  $20\,000\text{ м}^3$  работ каждого вида, то минимально необходимое время  $20\,000 : 70,5 = 284$  ч. Умножая найденные значения  $h_{ik}$  на 284, получаем время, в течение которого нужно занять каждый механизм по каждому виду работ и которое было приведено выше (разд. III, табл. 5).

На этом примере мы в основном показали порядок нахождения решения. Теперь сделаем некоторые замечания по поводу осуществления этой схемы.

### 5. Дополнительные указания к схеме

Прежде всего отметим следующее. Проведение схемы в приведенном выше примере было особенно просто; ее осуществление в других случаях может привести к дополнительной трудности, которую мы сейчас и рассмотрим. Переходя от нулевого приближения к первому, мы подтягивали значение  $z_2$  к  $z_3$ . При этом нам удалось, определив подходящим образом  $h_{22}$  и  $h_{23}$ , добиться равенства  $z_2 = z_3$ . Однако так будет не всегда. Для определения  $u$  мы имели уравнение, из которого нашли  $u = 0,915$ . Но, вообще, это уравнение будет иметь вид:

$$a + bu = c(1 - u) + d,$$

и его решение не обязательно будет заключено в пределах между 0 и 1, а последнее условие  $0 \leq u \leq 1$  совершенно необходимо для нас. Заметим, прежде всего, что, во всяком случае, имеем  $a < c + d$  (это неравенство равносильно тому, что  $z_2^0 < z_3^0$ , так как обе части рассматриваемого уравнения при  $u = 0$  обращаются в  $z_2^0$  и  $z_3^0$ ). Если теперь мы имеем  $a + b > d$ , то решение уравнения  $u$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq u \leq 1$ ; если же  $a + b < d$ , то решение окажется  $> 1$ . В таком случае следует принять  $u = 1$ , так как тогда, хоть мы и не добьемся равенства  $z_2 = z_3$ , но максимально приблизим  $z_2$  к  $z_3$ .

Исследование этого случая можно произвести и иначе, а именно: так как мы заинтересованы в максимальном повышении  $\min(z_2, z_3)$ , то должны подыскать наибольшее число  $t$ , при котором для некоторого  $u$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) возможно удовлетворить обоим неравенствам

$$a + bu \geq t; \quad c(1 - u) + d \geq t.$$

Так как благодаря первому неравенству, имеем:

$$u \geq \frac{t - a}{b},$$

кроме того,  $u \geq 0$ , то второе неравенство дает нам:

$$t \leq d + c(1 - u) \leq \begin{cases} c + d \\ c(1 - (t - a)/b) + b. \end{cases}$$

Решая эти два неравенства относительно  $t$  и выбирая наименьшую из полученных границ, получаем максимальное  $t$ , при котором первоначальные неравенства разрешимы.

Последний путь рассуждения пригоден и в других случаях, когда у нас получаются скрещения не двух, а нескольких  $z_k$ .

Так, в случае, когда мы два равных значения  $z_k$  подтягиваем к третьему, то (см. пример на стр. 74) уравнения, подлежащие решению, принимают вид:

$$a + bx = c + dy = e(1 - x) + f(1 - y) + g.$$

Решения  $x$  и  $y$  опять могут оказаться вне пределов 0 и 1. Так как мы заинтересованы больше всего в получении максимального  $\min(z_1, z_2, z_3)$ , то нужно опять найти максимальное  $t$ , при котором возможно удовлетворить всем неравенствам:

$$a + bx \geq t; \quad c + dy \geq t; \quad e(1 - x) + f(1 - y) + g \geq t.$$

Отсюда имеем

$$x \geq \frac{t-a}{b}; \quad y \geq \frac{t-a}{c}$$

и, кроме того,  $x \geq 0, y \geq 0$ . Тогда третье неравенство дает нам:

$$t \leq \begin{cases} e(1 - (t-a)/b) + f(1 - (t-c)/d) + g, \\ e + f(1 - (t-c)/d) + g, \\ e(1 - (t-a)/b) + f + g, \\ e + f + g \end{cases}$$

в зависимости от того, какой парой неравенств для  $x$  и  $y$  воспользоваться. Решая эти неравенства относительно  $t$  и выбирая наименьшую из получающихся оценок, мы и получаем искомое значение  $t$ -максимальное, для которого могут быть удовлетворены все три первоначальных неравенства. После того, как  $t$  определено,  $x$  и  $y$  по нему находятся легко и вычисление данного приближения заканчивается. Для перехода к следующему приближению опять среди  $z_k$  находим одно или несколько наименьших и соответственные  $\lambda_k$  увеличиваем.

Отметим, что среди неравенств, определяющих  $t$ , фактически приходится использовать первое, т. е. оно дает наименьшую оценку для  $t$  в том случае, когда возможно удовлетворить уравнениям  $z_1 = z_2 = z_3$ . Укажем еще, что рассуждения, которые мы привели здесь для случая двойного и тройного совпадения с небольшими видоизменениями, применимы и в более сложных случаях.

Изложение предыдущего п. 4 вместе со сделанными сейчас дополнительными пояснениями дает вполне определенную «железную» схему решения. Нужно все время из чисел  $z_k$  находить наименьшее (или несколько равных между собой наименьших), и его определенным, описанным выше образом подтягивать. Необходимо сказать, что буквальное следование этой схеме может быть рекомендовано для простых случаев (когда  $n$  мало), а также для сложных случаев ( $n$  велико) в конце решения, когда мы уже достаточно приблизились к нему ( $z_k$  мало разнятся). В начале же вычисления целесообразно отходить от этой схемы, например, подтягивать не одно наименьшее, а одновременно несколько малых  $z_k$ , спускать (уменьшая  $\lambda_k$ ) слишком крупные  $z_k$ , в процессе решения не добиваться скрупулезно равенства между наименьшими  $z_k$  (не решать промежуточных систем). Все эти упрощения, которые могут часто сократить время вычисления, не влияют на существование решения, так как важно найти  $\lambda_k$ , а путь их нахождения роли не играет.

В связи с этим полезно указать, что все промежуточные выкладки, связанные с определением  $\lambda_k$ , можно производить весьма неточно с 2–3 знаками (на логарифмической линейке); на результат это не повлияет. Если результат желательно получить точный, то с соответствующей точностью нужно произвести только последнее вычисление — решение системы, из которой определяются окончательные значения  $h_{ik}$ . Нужно сказать только, что если мы вычисления производим, например, с относительной погрешностью 0,01, то два произведения  $\lambda_k a_{ik}$ , отличающиеся меньше чем на 0,01 их величины, мы должны рассматривать как одинаковые.

Наконец, остановимся здесь еще на следующем обстоятельстве. Трудность решения задачи существенно зависит от значений  $n$  и  $m$ , при этом решение в особенности усложняется с увеличением  $m$ , например, как мы видели, для случая  $m = 2$

решение чрезвычайно просто при любом  $n$ . Поэтому нужно стараться  $n$  и  $m$  уменьшить. Прежде всего, если два ряда в таблице  $a_{ik}$  пропорциональны, например,  $a_{i2} = ka_{i1}$ , для любого  $i$ , то можно ввести новые  $a'_i = a_{i1}(1+k)$  и ими заменить  $a_{i1}$  и  $a_{i2}$ , т. е. уменьшить  $n$  на единицу. Иначе говоря, это означает, например, что вместо двух станков, выработки которых пропорциональны, мы вводим условный новый станок, производительность которого равна их суммарной производительности. Далее, если у нас  $m > n$ , то выгодно поменять их ролями, т. е. вместо  $a_{ik}$  ввести  $a_{ik}^* = a_{ki}$ , но при этом придется искать уже не  $\max z$ , а минимум, т. е. искать  $h_{ik}$ , чтобы оказалось  $z_1 = z_2 = \dots = z_n$  и чтобы их значение оказалось наименьшим. На конкретном языке эта замена означает, что вместо того, чтобы рассматривать задачу получения максимальной продукции в день, мы рассматриваем задачу получения заданной продукции в минимальное время; очевидно, что обе задачи равносильны.

## 6. О контроле решения

Во многих математических задачах для проверки правильности полученного решения нет надобности проверять весь ход его; о ней можно судить прямо по результату. Например, для проверки правильности решения уравнения достаточно полученное решение подставить в него. Для проверки правильности решения задачи А также достаточно привести только окончательные значения  $\lambda_k$  и произведений  $\lambda_k a_{ik}$  и  $a_{ik} h_{ik}$  для последнего приближения и убедиться в том, что  $h_{ik} > 0$  отвечают подчеркнутым — максимальным  $\lambda_k a_{ik}$  и что  $z_k$  получают равные значения. Если это действительно так, то решение найдено правильно. Наличие такого контроля полезно тем, что нахождение решения инженер или экономист могут передавать специальному расчетчику, проверить же полученное решение, как ясно из сказанного, можно за 10–15 минут без каких бы то ни было затруднений.

## 7. О приближенном решении задачи А

Решение задачи А, когда  $n$  и  $m$  не малы, оказывается все же довольно кропотливым и длительным. Поэтому желательно было бы указать методы более простые, которые позволили бы найти не точное решение задачи, но весьма близкое к нему по эффективности. Здесь мы имеем в виду только указать некоторые пути, на основе которых подобные методы могли бы быть разработаны.

Прежде всего заметим, что так как решение соответствует тому случаю, когда  $h_{ik} > 0$  лишь для пар  $(i, k)$ , отвечающих максимальным произведениям  $\lambda_k a_{ik}$ , приближенное решение мы получим, если будем допускать  $h_{ik}$  отличные от нуля для тех  $(i, k)$ , для которых произведение  $\lambda_k a_{ik}$  близко к максимальному. Поэтому первый путь для построения приближенного решения таков. В таблицах произведений  $\lambda_k^0 a_{ik}$  в каждом столбце (за исключением одного) наряду с максимальным  $\lambda_k a_{ik}$  подчеркиваем ближайшее к нему (не следует подчеркивать это ближайшее для того случая, когда оно больше относительно других отличается от своего максимального). После этого нужно попытаться определить  $h_{ik}$  для отмеченных  $(i, k)$  из условий  $\sum_k h_{ik} = 1$  и равенства  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$ . Рекомендуем читателю

проверить, что применение этого способа в примере п. 4 сразу привело бы к окончательному решению.

Другой путь основан на ином соображении.

Мы указывали уже в предыдущем п. 6, что если два столбца пропорциональны, то их можно объединить в один. Для получения приближенного решения это объединение можно совершить и тогда, когда пропорциональность имеет место лишь приблизительно. Таким образом, объединяя в группы приблизительно однородные элементы, можно существенно уменьшить  $n$  и  $m$ , и тем самым заметно упростить задачу. Решение этой упрощенной задачи, конечно, будет для первоначальной задачи лишь приближенным.

## 8. Применение метода к решению задачи В

В задаче В по сравнению с задачей А прибавляется дополнительное условие, что для найденного решения должно выполняться неравенство

$$\sum_{i,k} c_{ik} h_{ik} \leq C,$$

где  $c_{ik} \geq 0$  и  $C$  — заданные числа.

Метод разрешающих множителей применим и к этой задаче. Не входя в такие же подробности, как в задаче А, укажем на основное отличие в применении метода в данном случае.

Здесь нужно кроме  $\lambda_k$ , отвечающих  $z_k$ , ввести еще один разрешающий множитель  $\mu$ , отвечающий величине  $R = \sum_{i,k} c_{ik} h_{ik}$ .

В данном случае числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  и  $\mu$  будем называть разрешающими множителями при условии, что если для каждого  $i$  обозначить через  $t_i$  наибольшую из величин

$$\lambda_1 a_{i1} - \mu c_{i1}; \lambda_2 a_{i2} - \mu c_{i2}; \dots; \lambda_m a_{im} - \mu c_{im},$$

то, полагая  $h_{ik} = 0$ , если  $\lambda_k a_{ik} - \mu c_{ik} < t_i$ , возможно прочие  $h_{ik}$  определить из условий:

- 1)  $h_{ik} \geq 0$ ;
- 2)  $\sum_{k=1}^m h_{ik} = 1$ ;
- 3)  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$ ;
- 4)  $R = \sum_{i,k} c_{ik} h_{ik} = C^{13)}$ .

Опять утверждаем, что если разрешающие множители найдены и  $h_{ik}^*$  определены по ним указанным выше образом, то они и дают решение задачи. В самом деле, для так определенных  $h_{ik} = h_{ik}^*$  имеем:

$$\left( \sum_{k=1}^m \lambda_k \right) z^* - \mu C = \sum_k \lambda_k \sum_i a_{ik} h_{ik}^* - \mu \sum_{i,k} c_{ik} h_{ik}^* = \sum_i \sum_k (\lambda_k a_{ik} - \mu c_{ik}) h_{ik}^* = \sum_i t_i.$$

<sup>13)</sup> В случае  $\lambda = 0$  достаточно, чтобы оказалось  $R \leq C$ .



Если же теперь  $h_{ik}$  — числа, любым другим образом выбранные, при которых выполнены вышенаписанные условия 1), 2), 3) и  $R \leq C$ , то имеем:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k\right)z - \mu C &\leq \sum_k \lambda_k \sum_i a_{ik} h_{ik} - \mu \sum_{i,k} c_{ik} h_{ik} = \\ &= \sum_i \sum_k (\lambda_k a_{ik} - \mu c_{ik}) h_{ik} \leq \sum_i \sum_k t_i h_{ik} = \sum_i t_i. \end{aligned}$$

Сопоставление этого неравенства с предыдущим равенством и дает нам, что  $z \leq z^*$ , т. е. при  $h_{ik} = h_{ik}^*$  действительно достигается решение задачи.

Таким образом, опять все дело сводится к разысканию разрешающих множителей<sup>14)</sup>. Методы их нахождения примерно те же, что и в случае задачи А. Не входя здесь в подробности, проиллюстрируем эти способы и необходимые дополнительные соображения решением следующего примера.

**ПРИМЕР.** Пусть таблица  $a_{ik}$  будет та же, что и в примере п. 4 (см. табл. 2). Значения  $c_{ik}$  зададим, как указано в табл. 5; пусть  $C = 43$ . Воспользоваться решением, полученным раньше, нельзя, так как для найденных там значений  $h_{ik}$  оказывается:  $R = 12 \cdot 0,67 + 12 \cdot 0,33 + 20 \cdot 0,785 + 17 \cdot 0,215 + 14,1 \cdot 1 = 45,4 > 43$ .

Таблица 5

Значения  $c_{ik}$

$k$	$i$	1	2	3
1	1	12	21	15
2	1	12	20	11
3	1	12	17	14

В качестве нулевых начальных значений  $\lambda_k^0$  берем те же, что и раньше; в качестве начального значения для  $\mu$  можно принять, например:

$$\mu^0 = \frac{1000}{\sum_{i,k} c_{ik}} = \frac{1000}{134} = 7,45.$$

Вычисляем для данных  $\lambda_k^0$  и  $\mu^0$  величины  $\lambda_k a_{ik} - \mu c_{ik}$  (табл. 7) и в каждом столбце подчеркиваем наибольшее из полученных чисел;  $h_{ik}$ , соответствующие этим наибольшим, берем равными 1, прочие — равными 0. Как видим, отстающим является  $z_2$ .  $R$  случайно оказалось равным  $C = 43$ .

<sup>14)</sup> В данном случае, в отличие от задачи А, не всегда можно гарантировать существование разрешающих множителей. Причина этого в том, что задача В не всегда разрешима. Если речь идет об условиях 1), 2), 3') и 4), то для ее разрешимости нужно, чтобы  $\sum_i c_{ik_i} \leq C$ , где  $c_{ik_i}$  — наименьшие из чисел  $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im}$ . Заметим, что задача В будет разрешима всегда, если условие 2) заменить на условие  $\sum_k h_{ik} \leq 1$ .

Таблица 6

	Начальные значения	Поправочные множители			Окончательные значения
		I приближение	II приближение	III приближение	
$\lambda_1$	3,62	1	0,973	1	3,53
$\lambda_2$	6,25	1,063	1	1	6,65
$\lambda_3$	5,21	1	1	0,976	5,07
$\mu$	7,45	1	1	0,751	5,59

Теперь мы должны подтягивать  $z_2$ .

Ближайшим к своему максимальному оказывается  $237 - 82$ . Увеличиваем  $\lambda_2$ , снабжая множителем  $\lambda_2$ , значение которого (для того, чтобы получить совпадение) нужно определить из уравнения

$$237\varepsilon_2 - 82 = 276 - 105,$$

откуда  $\varepsilon_2 = 253 : 237 = 1,063$ . Домножаем на него первые элементы второй строки, подчеркиваем максимальные элементы. Подлежат определению  $h_{32} = u$  и  $h_{33} = 1 - u$ . Так как равенству  $z_2 = 38u = 53(1 - u) + 83 = z_3$  удовлетворить нельзя для  $0 \leq u \leq 1$ , нужно  $z_2$  и  $z_3$  максимально возможно сблизить. Для этого следует, очевидно, принять  $u = 1$ . Итак, найдено первое приближение. Здесь оказалось  $R = 40$ . Для перехода к следующему приближению нужно подтягивать  $z_{2t}$  или вместо этого опускать  $z_1$ . Опять для нахождения множителя  $\varepsilon_1$  для  $\lambda_1$  составляем уравнение  $381\varepsilon_1 - 90 = 371 - 90$ , откуда  $\varepsilon_1 = 0,973$ . Это дает переход ко второму приближению (небольшие вычисления, связанные с ним, мы не приводим). Теперь нужно опускать  $z_3$ . Таким образом, мы должны снабдить  $\lambda_3$  дополнительным множителем  $\varepsilon_3$ . С другой стороны,  $R$  у нас недостаточно велико ( $R < C$ ), нам нужно увеличить  $R$ ; для этого  $\mu$  нужно уменьшить; снабдим его множителем  $\gamma$ . Наличие двух множителей  $\varepsilon_3$  и  $\gamma$  позволит нам добиться еще двух совпадений. Но в задаче В нам и необходимо иметь на одно совпадение больше, ибо для определения остающихся  $h_{ik}$  прибавляется дополнительное равенство  $R = C$ . Итак, для определения  $\varepsilon_3$  и  $\gamma$  вводим уравнение, соответственно требованию двух совпадений:

$$438 - 149\gamma = 432\varepsilon_3 - 127\gamma, \quad 252 - 82\gamma = 276\varepsilon_3 - 105\gamma,$$

откуда  $\varepsilon_3 = 0,976$ ;  $\gamma = 0,751$ . После введения этих поправочных множителей переходим к третьему приближению. Теперь мы имеем в каждом столбце по совпадению. Вводим неизвестные  $x, y, v$ :

$$h_{11} = x; \quad h_{12} = 1 - x; \quad h_{22} = y; \quad h_{23} = 1 - y; \quad h_{32} = v; \quad h_{33} = 1 - v.$$

Уравнения  $z_1 = z_2 = z_3 = t$  и  $R = C$  запишутся тогда так:

$$105x = 56(1 - x) + 66y + 38v = 83(1 - y) + 53(1 - v) = t,$$

$$12x + 12(1 - x) + 20y + 17(1 - y) + 11v + 14(1 - v) = 43.$$

Таблица 7

Ход решения задачи В

$\lambda_k a_{ik} - \mu c_{ik}$	$a_{ik}$ и $c_{ik} \times h_{ik}$			$z_k$	$R$
Нулевое приближение					
<b>381 – 90</b> 388 – 156 231 – 111	105 12	107 21	64 15	105	43
349 – 90 412 – 149 237 – 82	56 12	66 20	38 11	0	
292 – 90 <b>432 – 127 276 – 105</b>	56 12	83 17	53 14	136	
Первое приближение					
<b>381 – 90</b> 388 – 156 231 – 111	105 12	107 21	64 15	105	40
371 – 90 438 – 149 <b>252 – 82</b>	56 12	66 20	38 11	38	
292 – 90 <b>432 – 127 276 – 105</b>	56 12	83 17	53 14	83	
Второе приближение					
<b>371 – 90</b> 378 – 156 225 – 111	105 12	107 21	64 15	61	43
<b>371 – 90</b> 438 – 149 252 – 82	56 12	66 20	38 11	61	
292 – 90 <b>432 – 127 276 – 105</b>	56 12	63 17	53 14	83	
Третье приближение					
<b>371 – 69</b> 378 – 117 225 – 85	105 12	107 21	64 15	69,6	43
<b>371 – 69 438 – 112 252 – 61</b>	56 12	66 20	38 11	69,6	
285 – 69 <b>421 – 95 269 – 79</b>	56 12	63 17	53 14	69,6	

Последнее уравнение после упрощений дает  $y = v$ , а первые принимают вид:

$$105x = 56(1 - x) + 104y = 136(1 - y) = t,$$

откуда

$$t = 69,6; \quad x = 0,662; \quad y = v = 0,49.$$

На этом вычисление третьего приближения, совпадающего с окончательным решением задачи, заканчивается. Заметим, что полученная максимальная выработка при дополнительном условии оказалась равной 69,6, т. е. несколько меньше, чем прежде найденное без дополнительных условий 70,8.

### 9. Применение метода к решению задачи С

Отличие задачи С от задачи А состоит в том, что  $z_k$  определяются более сложным образом, именно:

$$z_k = \sum_{i,l} \gamma_{ik} h_{il},$$

и опять  $h_{il}$  должны быть определены из условий:

$$h_{il} \geq 0; \quad \sum_i h_{il} = 1; \quad z_1 = z_2 = \dots = z_m \text{ максимально.}$$

Здесь, как и в задаче А, существуют разрешающие множители. В данном случае так называются числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , удовлетворяющие условию, что если для каждого данного  $i$  обозначить через  $t_i$  наибольшее из чисел

$$\sum_k \lambda_k \gamma_{ik1}; \quad \sum_k \lambda_k \gamma_{ik2}; \dots$$

и принять  $h_{il} = 0$ , когда соответствующая сумма не максимальна,  $\sum_k \lambda_k \gamma_{ikl} < t_i$ , то прочие  $h_{il}$  могут быть определены из условий:

$$h_{il} \geq 0; \quad \sum_i h_{il} = 1; \quad z_1 = z_2 = \dots = z_m.$$

Точно так же, как в двух предыдущих случаях, доказывается, что если разрешающие множители найдены и  $h_{il}$  по ним определены, как указано выше, то мы имеем решение. Таким образом, и при решении этой задачи дело сводится к разысканию разрешающих множителей, которое может проводиться теми же методами.

**ПРИМЕР.** Решим в качестве примера вторую из задач о разрезании арматуры (пример 6). Нам нужно из 100 стержней по 7,4 и 50 по 6,4 изготовить наибольшее число комплектов 1,5 + 2,1 + 2,9. Возможные способы разрезания были указаны выше. Каждой части сопоставляем свой разрешающий множитель; обозначим их:  $u$  соответствует части 1,5;  $v$  — 2,1;  $w$  — 2,9. Каждому значению  $l$  соответствует свой способ разрезания (по порядку, например,  $i = 1$ ;  $l = 3$  соответствует способ III разрезания стержня в 7,4; табл. 7), именно: 1,5 + 1,5 + 2,1 + 2,1. В данном случае  $\sum_k \lambda_k \gamma_{ikl}$  будет, очевидно,  $2u + 2v$ .

Таблица 8  
Ход решения задачи С

Стержни	Способы разрезания $\sum \lambda_k \gamma_{ikl}$	Нулевое приближение		I приближение		II приближение	
		$u = 1,5; v = 2,1; w = 2,9$		$u = 1,5; v = 2,1; w = 3$		$u = 1,5; v = 2,25; w = 3$	
		$\sum \lambda_k \gamma_{ikl}$	$h_{il}$	$\sum \lambda_k \gamma_{ikl}$	$h_{il}$	$\sum \lambda_k \gamma_{ikl}$	$h_{il}$
7,4 ( $i = 1$ )	$l = 1; I \quad 3u + w$	<b>7,4</b>	1	<b>7,5</b>	0,333	<b>7,5</b>	0,33
	$l = 2; II \quad u + 2w$	7,3	0	<b>7,5</b>	0,667	<b>7,5</b>	0,61
	$l = 3; III \quad 2u + 2v$	7,2	0	7,2	0	<b>7,5</b>	0
	$l = 4; IV \quad 2v + w$	7,1	0	7,2	0	<b>7,5</b>	0,05
	$l = 5; V \quad 3u + v$	6,6	0	6,6	0	6,75	0
	$l = 6; VI \quad u + v + w$	6,5	0	6,6	0	6,75	0,01
6,4 ( $i = 2$ )	$l = 1; I \quad 3v$	<b>6,3</b>	1	<b>6,3</b>	1	<b>6,75</b>	1
	$l = 2; II \quad 4u$	6,0	0	6,0	0	6,0	0
	$l = 3; III \quad 2u + w$	5,9	0	6,0	0	6,0	0
	$l = 4; IV \quad 2w$	5,8	0	6,0	0	6,0	0
Число частей	$z_1$ (по 1,5)	300		166,6		161	
	$z_2$ (по 2,1)	150		150		161	
	$z_3$ (по 2,9)	100		166,6		161	

Напомним, что  $\gamma_{ikl}$  — число  $k$ -х частей, которое получается при разрезании стержня  $i$ -го вида на части  $l$ -м способом, так что в данном случае  $\gamma_{113} = 2$ ;  $\gamma_{123} = 2$ . В 1 столбце табл. 8 эти суммы, отвечающие различным способам разрезания, выписаны в общем виде. В качестве начальных значений  $u, v, w$  принимаем длины стержней  $u^0 = 1,5; v^0 = 2,1; w^0 = 2,9^{15)}$ .

Вычисляем суммы  $\sum_k \lambda_k \gamma_{ikl}$  для этих данных и подчеркиваем самое крупное из полученных значений сумм (отдельно для случая  $i = 1$  и  $i = 2$ ). Естественно, максимальными оказались в обоих случаях суммы, отвечающие первому способу. Выбираем соответственные  $h_{ikl} = 1$  и берем прочие равными нулю. Иначе говоря, все стержни разрезаем по первому способу — это дает нам  $z_1 = 300; z_2 = 150; z_3 = 100$ .

Отстает  $z_3$ ; подтягиваем его. Для этого увеличиваем  $w$ , чтобы обеспечить первое совпадение. Такое  $w$  определится из равенства  $4,5 + w = 1,5 + 2w$ , откуда  $w = 3$ .

<sup>15)</sup>Вообще в задачах, связанных с уменьшением отходов, в качестве первых приближений следует брать длины (площади для двумерного случая) соответствующих частей.

Теперь вычисляем второе приближение. Так как теперь мы имеем совпадение, то  $h_{11} = x$  должны определить из равенства  $z_1 = z_2$ , т. е.

$$3x + 1 \cdot (1 - x) = x + 2 \cdot (1 - x),$$

откуда  $x = h_{11} = 1/3$ ;  $h_{12} = 2/3$ , что дает нам:

$$z_1 = \frac{100}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 100 = 166,6; \quad z_3 = \frac{100}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 100 \cdot 2 = 166,6;$$

$$z_4 = 50 \cdot 3 = 150.$$

Нужно подтягивать  $z_4$ . Легко сообразить, что для получения нового совпадения необходимо принять  $v = 2,25$ . Так переходим к третьему приближению. Здесь получилось четверное совпадение. Вводя неизвестные  $x = 100h_{11}$ ;  $y = 100h_{12}$ ;  $z = 100h_{13}$ ;  $t = 100h_{14}$  (числа стержней по 7,4, разрезанных по каждому способу), получаем для их определения такие уравнения:

$$3x + y + 2z = 2z + 2t + 150 = x + 2y + t; \quad x + y + z + t = 100.$$

Эта система неопределенна, так как неизвестных больше, чем уравнений, но произвольно выбрать одно из неизвестных нельзя, так как нарушится положительность остальных. Во всяком случае, можно принять  $z = 0$ , тогда получим  $t = 50/9 \approx 5$  (так как значения необходимо целые);  $x = 33$ ;  $y = 61$ . Остается еще один стержень; для него принимаем VI способ разрезания. Тем самым  $h_{il}$  для третьего приближения определены и решение найдено.

### 10. Непосредственное применение разрешающих множителей

До сих пор мы рассматривали разрешающие множители лишь как техническое средство для решения задач А, В и С; только через это они получали применения. Таким образом, могло показаться, что метод решения задач А, В и С, основанный на разрешающих множителях, не имеет особых преимуществ, кроме, может быть, простоты или краткости его, по сравнению с другими возможными методами. Между тем это не так; разрешающие множители имеют гораздо большее значение — они дают не только само решение задачи, но и позволяют указать ряд важных для применений характеристик найденного решения. Таким образом, решение, проведенное методом разрешающих множителей, дает гораздо больше, чем голый результат — численные значения  $h_{ik}$ . Вот на эти применения самого метода решения мы и хотим здесь обратить внимание.

Величины  $\lambda_k$  и  $t_i$ , определенные выше в процессе решения, могут быть использованы в целом ряде вопросов, связанных с применением максимального решения. Для определенности я все время буду говорить о первой интерпретации задачи А — производстве комплектов деталей. В этом случае множители  $\lambda_k$  являются показателями эквивалентности для разных деталей при максимальном распределении. Таким образом, производство  $\lambda_s$   $k$ -х деталей эквивалентно производству  $\lambda_k$   $s$ -х деталей. Производство 100 штук  $k$ -х деталей эквивалентно производству  $100\lambda_k / \sum \lambda_k$  единиц изделий. Благодаря этому, например, если ставится задача производства не

$z = z_1 = z_2 = \dots = z_m$  штук комплектов, что возможно в течение дня, а  $(z + \Delta z_1)$  штук первых деталей,  $(z + \Delta z_2)$  вторых и т. д. ( $\Delta z_n$  не слишком велики), то может быть указано время, которое эта задача требует для своего выполнения, а именно

$$1 + \frac{\sum_k \lambda_k \Delta z_k}{z \sum_k \lambda_k} \text{ дней.}$$

При этом решение этой задачи возможно, вообще говоря, если  $\Delta z_k$  невелики, с теми же отличными от нуля  $h_{ik}$ , что и в первоначальной задаче.

Таким образом, с помощью знания  $\lambda_k$  решается вопрос об изменениях, связанных с небольшими вариациями в программе. Далее, с их помощью решается вопрос о целесообразности кооперирования. Если, например, для одной группы станков при максимальном распределении отношение для  $k$ -й и  $s$ -й деталей есть  $\lambda_k/\lambda_s$ , а для другой группы станков это отношение  $\lambda'_k/\lambda'_s$  и, например,  $\lambda'_k/\lambda'_s > \lambda_k/\lambda_s$ , то представляется целесообразным произвести кооперирование — часть производства  $k$ -й детали передать с первой группы станков на вторую и, наоборот, часть производства  $s$ -й детали со второй группы на первую. Это даст рост суммарной производительности.

Аналогичным образом величины  $t_i$  являются показателями эквивалентности производительности станков в условиях максимального распределения. Именно, здесь оказывается, например, что дневная производительность  $i$ -го станка в переводе на целые комплекты равна  $t_i z / \sum t_i$ , где  $z$  — число комплектов, вырабатываемых на всех станках. Этот факт также может быть разнообразно использован при вариациях в распределении работы станков, например, при оценке потерь, происходящих при каком-либо отступлении от наивыгоднейшего варианта. Аналогичные соображения об использовании разрешающих множителей могут быть сделаны и по отношению к задачам В и С.

Наконец, упомяну здесь же, что метод разрешающих множителей можно пытаться применять и в задачах, весьма мало похожих на задачи А, В и С. Я полагаю, что, в частности, возможно их использование в различных вопросах, относящихся к составлению производственных графиков.

Так, мое внимание обратили на актуальность, например, такой задачи. В годовой программе машиностроительного завода имеется ряд серий машин. По каждой серии загрузка разных групп оборудования (токарных станков, фрезерных и т. д.) различна. В среднем, в течение года эта загрузка отвечает мощности оборудования. Как избежать в графике пиков — перегрузки в отдельные моменты некоторых видов оборудования? Для этого, очевидно, нужно распределить отдельные задания на полугодия, затем на кварталы и месяцы, с сохранением примерно среднегодового соотношения на каждый период. Для нахождения такого распределения можно, по нашему мнению, также использовать разрешающие множители. Именно, нужно ввести множители, отвечающие каждому виду работ (токарных, фрезерных и т. д.), и с помощью их варьирования добиваться равномерного распределения.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ А ДЛЯ СЛОЖНОГО СЛУЧАЯ

## (Задача Фанерного треста)

Настоящее приложение представляет расчет наивыгоднейшего распределения работы лущильных станков, произведенный по данным лаборатории Всесоюзного фанерного треста (см. пример 2). Расчет по методу разрешающих множителей выполнен А. И. Юдиным.

## 1. Условия задачи

Таблица I

№ станков	Номенклатуры материала				
	1	2	3	4	5
1	4,0	7,0	8,5	13,0	16,5
2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
3	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
4	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
5	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
6	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
7	4,0	7,0	9,0	14,0	17,0
8	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0

В табл. I помещены данные о производительности 8 лущильных станков по пяти различным номенклатурам материала, предложенные Центральной лабораторией Всесоюзного фанерного треста. Кроме того, требуется, чтобы количество материала данной номенклатуры в отношении к количеству всего материала составляло (табл. II):

Таблица II

1	2	3	4	5
10%	12%	28%	36%	14%



## 2. Преобразование условий задачи

Согласно указанному в разд. II правилу сведения задачи о выработке продукции данного ассортимента к задаче А, чтобы получить из значений табл. I значения  $a_{ik}$ , нужно все числа первого столбца поделить на 10, второго на 12 и т. д. (см. табл. II). Чтобы упростить вычисления, помножим предварительно все числа на 1260. Очевидно, что полученные числа также можно рассматривать как  $a_{ik}$ . Для того чтобы произвести указанные действия, нужно числа 1-го столбца умножить на 126, 2-го на 105, 3-го на 45, 4-го на 35, 5-го на 90.

Полученные после умножения числа  $a_{ik}$  выписаны в табл. III.

Таблица III

№ станков	Номенклатуры материала				
	1	2	3	4	5
1	504,0	735,0	382,5	455,0	1485,0
2	567,0	819,0	436,5	479,5	1575,0
3	630,0	840,0	450,0	518,0	1620,0
4	504,0	735,0	405,0	472,5	1530,0
5	441,0	682,5	382,5	444,5	1440,0
6	378,0	630,0	360,0	472,5	1350,0
7	504,0	735,0	405,0	490,0	1530,0
8	630,0	840,0	450,0	518,0	1620,0

УКАЗАНИЕ. Так как умножение целого столбца (а иногда и нескольких столбцов) на одно и то же число будет употребляться многократно, то отметим, что для таких перемножений удобно поставить на арифмометре множитель, а затем последовательно умножать его на все числа столбца. То же самое рекомендуется и при пользовании логарифмической линейкой.

Так как производительности 3-го и 8-го станков по всем видам материалов совпадают, то введем вместо них один третий станок с удвоенной производительностью (см. табл. IV).

В табл. IV производительности  $a_{ik}$  выражены в некоторых условных единицах (усл. ед.); в дальнейшем при решении математической задачи мы будем исходить из этой таблицы, причем производительности будут выражены в тех же усл. ед.

## 3. О ходе решения

Применяя метод разрешающих множителей (приложение I, п. 3, 4) для решения задачи, мы должны найти числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ . За первые приближения  $\lambda^0$  возьмем величины (табл. IV, строка 9) обратно пропорциональные суммам производительностей (табл. IV, строка 8).

ЗАМЕЧАНИЕ. Беря множители  $\lambda$  с точностью до третьего знака после запятой, мы вынуждены будем в дальнейшем считать два числа равными, если их разность не превосходит одной тысячной их величины.

Таблица IV

№ станков	Номенклатуры материала				
	1	2	3	4	5
1	504,0	735,0	382,5	455,0	1485,0
2	567,0	819,0	436,5	479,5	1575,0
3	1260,0	1680,0	900,0	1036,0	3240,0
4	504,0	735,0	405,0	472,5	1530,0
5	441,0	682,5	382,5	444,5	1440,0
6	378,0	630,0	360,0	472,5	1350,0
7	504,0	735,0	405,0	490,0	1530,0
8	630,0	840,0	450,0	518,0	1620,0
$\Sigma$	4158,0	6016,5	3271,5	3850,0	12150,0
$\frac{20\ 000}{\Sigma}$	4,810	3,324	6,113	5,195	1,646

Так как следует принимать  $h_{is} = 0$ , если  $\lambda_k a_{ik} > \lambda_s a_{is}$  для некоторого  $k$ , то для каждого приближения к  $\lambda$  мы будем выделять среди произведений  $\lambda_s a_{is}$  те значения (для каждого  $i$ ), которые больше остальных.

Если величины  $\lambda$  взяты как-либо, то, вообще говоря, на каждой строке будет только по одному выделенному (ненулевому) значению  $k$ , т. е. всего будет выделено  $n$  (в нашем случае 7) значений, уравнения же  $\sum_k h_{ik} = 1$  и  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$  накладывают на  $h_{ik}$   $n + m - 1$  (т. е. 11) условий. Ввиду этого  $\lambda_k$  должны быть так подобраны, чтобы на четырех строках было по два максимальных произведения. Тогда мы будем иметь 11 ненулевых  $h_{ik}$ , которые и определятся из вышеупомянутых 11 уравнений.

Отметим, что подбор  $\lambda_k$  усложняется тем, что на  $h_{ik}$  наложено ограничение  $h_{ik} \geq 0$ .

#### 4. Вычисление $\lambda_k$

За первое приближение  $\lambda_k^0$ , как сказано, берем числа строки 9-й табл. IV — 1-я строка табл. А.

Составим произведения  $\lambda_k^0 a_{ik}$  (табл.  $V_1$ ).

На каждой строке выделим (подчеркнем) максимальное число. Согласно сделанного нами ранее замечания, на 1-й строке числа 2443,1 (2-й столбец) и 2444,3 (5-й столбец) должны считаться равными.

Под  $k$ -м столбцом подпишем сумму производительности тех станков, для которых произведения  $\lambda_k a_{ik}$  подчеркнуты, так, например, под 1-м столбцом подпишем производительность 2-го и 3-го станков по 1-му материалу (табл. IV), т. е.  $567,0 + 1260,0 = 1827,0$ ; под 3-м столбцом будет стоять 0, так как в 3-м столбце не подчеркнуто ни одного числа. При этом на строке 8-й будем ставить производительности только тех станков, для которых подчеркнуто одно число. В табл.  $V_1$

Таблица А

№ строки		1	2	3	4	5
1	$\lambda^0$	4,810	3,324	6,113	5,195	1,646
2	$\varepsilon^1$	1	1	1,017	1	1
3	$\varepsilon^2$	1	1,083	1,083	1	1
4	$\varepsilon^3$	1	1	1	1	1,082
5	$\varepsilon^4$	1	1	1	1,111	1
6	$\varepsilon^5$	1,003	1	1,003	1,003	1
7	$\lambda$	4,824	3,600	6,753	5,789	1,781

Таблица  $V_1$ 

	1	2	3	4	5
1	2424,2	<b>2443,1</b>	2338,2	2363,7	<b>2444,3</b>
2	<b>2727,3</b>	2722,4	2668,3	2491,0	2592,5
3	<b>6060,6</b>	5584,5	5501,7	5382,0	5333,0
4	2424,2	2443,1	2475,8	2454,6	<b>2518,4</b>
5	2121,2	2268,6	2338,2	2309,2	<b>2370,2</b>
6	1818,2	2094,1	2200,7	<b>2454,6</b>	2222,1
7	2421,2	2443,1	2475,8	<b>2545,6</b>	2518,4
	1827,0	0 735,0	0	962,5	2970,0 1485,0

на строке 1-й подчеркнуто два числа, поэтому соответствующие производительности проставим не на строке 8-й, а ниже, на строке 9-й. Если бы (см. следующие таблицы) еще на какой-либо строке было подчеркнуто по несколько чисел, то производительности, им соответствующие, мы поставили бы еще ниже, т. е. на строке 10-й и т. д. Удобство такой записи объясняется тем, что нужно, чтобы на четырех строках было выделено по два числа; при этом значения  $h_{ik}$ , соответствующие выделенным числам, должны быть положительны и не превосходить единицы, а производительности по всем столбцам должны быть равны. Ввиду этого важно знать производительности по каждому столбцу, причем, если подчеркнутое число стоит в строке, в которой все остальные числа меньше его, то соответственная производительность целиком входит в производительность по данному материалу (в этом случае  $h_{ik} = 1$ ); если же есть числа, равные данному, то производительность только частично войдет в производительность строки ( $h_{ik} \leq 1$ ).

Производительности по табл.  $V_1$  имеют следующий вид: 1-й столбец 1827,0 усл. ед.; 2-й — от 0 до 735 усл. ед.; 3-й — 0; 4-й — 962,5 усл. ед. и 5-й от 2970 до 4455 усл. ед.; т. е. производительности никак не могут быть равны.

Будем подтягивать отстающие столбцы. Для этого введем к  $\lambda_k^0$  поправочные множители  $\varepsilon_k^1$ . Первым будем подтягивать 3-й столбец.

Обращаясь к табл.  $V_1$ , замечаем, что если мы будем увеличивать числа 3-го столбца, то первым подойдет к максимальному число 5-й строки. Но так как производительность 5-го станка по 3-му материалу равна всего 382,5 усл. ед., что меньше даже производительности по 2-му материалу, то ясно, что нужно увеличить числа 3-го столбца так, чтобы еще в одной строке (4-й) было достигнуто максимальное значение. Для того чтобы найти  $\varepsilon_4^1$ , поделим максимальное число в 4-й строке — 2518,4 на 2475,8, остальные  $\varepsilon_k^1$  примем равными единице (см. строку 2-ю табл. А).

После умножения значений табл.  $V_1$  на  $\varepsilon_k^1$  (именно, 3-го столбца) получаем (табл.  $V_2$ ).

Таблица  $V_2$ 

	1	2	3	4	5
1	2424,2	<b>2443,1</b>	2377,9	2363,7	<b>2444,3</b>
2	<b>2727,3</b>	2722,4	2713,7	2491,0	2592,5
3	<b>6060,6</b>	5584,3	5595,2	5382,0	5333,0
4	2424,2	2443,1	<b>2517,9</b>	2454,6	<b>2518,4</b>
5	2121,2	2268,6	<b>2377,9</b>	2309,2	2370,2
6	1818,2	2094,1	2238,1	<b>2454,6</b>	2222,1
7	2424,2	2443,1	2517,9	<b>2545,6</b>	2518,4
	1827,0	0 735,0	382,5 405,0	962,5	0 1485,0 1530,0

Теперь минимальные (примерно равные) производительности имеют материалы 2 и 3. Поэтому будем подтягивать их одновременно, т. е. положим для вторых поправочных множителей  $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = \varepsilon$ .

При выборе  $\varepsilon$  замечаем, что первым подходит к максимальному значению число 7-й строки 3-го столбца, но и на этот раз это не может нас удовлетворить, так же как и достижение максимального значения числом, стоящим во 2-й строке 2-го столбца, а потому добиваемся, чтобы число, стоящее в 3-й строке 3-го столбца, подошло к максимуму.

Находим  $\varepsilon = \frac{6060,6}{5595,2} = 1,083$ . Остальные  $\varepsilon_k^2 = 1$  (табл. А, строка 3). Домножая на эти множители, получаем значения  $\lambda_k a_{ik}$  для третьего приближения (табл.  $V_3$ ).

Увеличивая числа 5-го столбца (4-я строка табл.  $V_3$ ), получаем те же значения для четвертого приближения (табл.  $V_4$ ).

Заметим, что хотя в табл.  $V_4$  мы имеем 11 ненулевых значений  $h_{ik}$ , тем не менее, оставаясь для  $h_{ik}$  в пределах от 0 до 1, нельзя добиться равенства производительностей всех столбцов.

(Отметим, кроме того, что совпадение максимальных значений в строках 4-й и 7-й между 3-м и 5-м столбцами случайное.)

Таблица  $V_3$ 

	1	2	3	4	5
1	2424,2	<b>2645,9</b>	2575,3	2363,7	2444,3
2	2727,3	<b>2948,4</b>	2938,9	2491,0	2592,5
3	<b>6060,6</b>	6047,8	<b>6059,6</b>	5382,0	5333,0
4	2424,2	2645,9	<b>2726,9</b>	2454,6	2518,4
5	2121,2	2456,9	<b>2575,3</b>	2309,2	2370,2
6	1818,2	2267,9	2423,9	<b>2454,6</b>	2222,1
7	2424,2	2645,9	<b>2726,9</b>	2545,6	2518,4
	0 1260,0	1554,0	992,5 900,0	472,5	0

Таблица  $V_4$ 

	1	2	3	4	5
1	2424,2	<b>2645,9</b>	2575,3	2363,7	<b>2644,8</b>
2	2727,3	<b>2948,4</b>	2938,9	2491,0	2805,1
3	<b>6060,6</b>	6047,8	<b>6059,6</b>	5382,0	5770,3
4	2424,2	2645,9	<b>2726,9</b>	2454,6	<b>2724,9</b>
5	2121,2	2456,9	<b>2575,3</b>	2309,2	2564,6
6	1818,2	2267,9	2423,9	<b>2454,6</b>	2404,3
7	2424,2	2645,9	<b>2726,9</b>	2545,6	2724,9
	0 1260,0	819,0 735,0	382,5 900,0 810,0	472,5	0 1485,0 3060,0

Подтягивая 4-й столбец, добиваемся, чтобы не только в 7-й строке, но и в 4-й числа этого столбца достигли максимальных значений (табл.  $V_3$ ).

Все, что было отмечено после табл.  $V_4$ , остается в силе и по отношению к табл.  $V_5$ , хотя здесь значительно труднее обнаружить невозможность положительных решений для всех  $h_{ik}$  (для того чтобы это установить, нужно решить систему уравнений).

Увеличиваем числа 1-, 3- и 4-го столбцов одновременно. Благодаря одновременности их увеличения, мы сохраняем по два подчеркнутых значения на двух строках (3-й и 4-й); кроме того, на 1-й строке по-прежнему остаются два максимальных значения. Увеличивая же числа трех столбцов, мы добьемся того, что еще в одной строке будут два максимальных значения.

Первым достигает максимальных значений число, стоящее во 2-й строке 3-го столбца; для этого его нужно умножить на  $\varepsilon_3^3 = \frac{2938,9}{2948,4} = 1,003$  (см. строку 6-ю табл. А).

Таблица  $V_5$ 

	1	2	3	4	5
1	2424,2	<b>2645,9</b>	2575,3	2626,1	2644,8
2	2727,3	<b>2948,4</b>	2938,9	2767,5	2805,1
3	<b>6060,6</b>	6047,8	<b>6059,6</b>	5979,4	5770,3
4	2424,2	2645,9	<b>2726,9</b>	<b>2727,1</b>	<b>2724,9</b>
5	2121,2	2456,9	<b>2575,3</b>	2565,5	2564,6
6	1818,2	2267,9	2423,9	<b>2727,1</b>	2404,3
7	2424,2	2645,9	2726,9	<b>2828,2</b>	2724,9
	0 1260,0	819,0  735,0	382,5 900,0  405,0	962,5 472,5	0  1485,0 1530,0

По табл.  $V_6$  производительность 1-го столбца колеблется от 0 до 1260,0 усл. ед., 2-го от 0 до 1554 усл. ед., 3-го от 382,5 до 2124,0 усл. ед., 4-го от 962,5 до 1445,0 усл. ед. и 5-го от 0 до 1485,0 усл. ед. Значения производительностей для всех столбцов одного порядка и число ненулевых значений  $h_{ik}$  равно 11.

### 5. Вычисление $h_{ik}$

Положив  $h_{ik} = 0$ , если число, стоящее в  $i$ -й строке  $k$ -го столбца табл.  $V_6$  не подчеркнуто, получим для остальных  $h_{ik}$  уравнения:

$$1260h_{31} = 819h_{22} + 735h_{12} = 436,5h_{23} + 900h_{33} + 405h_{43} + 382,5h_{33} = \\ = 472,5h_{44} + 472,5h_{64} + 490h_{74} = 1485h_{15};$$

$$h_{12} + h_{15} = 1; \quad h_{22} + h_{23} = 1; \quad h_{31} + h_{33} = 1; \quad h_{43} + h_{44} = 1;$$

$$h_{53} = 1; \quad h_{64} = 1; \quad h_{74} = 1.$$

Таблица V<sub>6</sub>

	1	2	3	4	5
1	2431,5	<b>2645,9</b>	2583,0	2634,0	<b>2644,8</b>
2	2735,5	<b>2948,4</b>	<b>2947,7</b>	2775,8	2805,1
3	<b>6078,8</b>	6047,8	<b>6077,8</b>	5997,3	5770,3
4	2431,5	2645,9	<b>2735,1</b>	<b>2735,3</b>	2724,9
5	2127,6	2456,9	<b>2583,0</b>	2573,2	2564,6
6	1823,7	2267,9	2431,2	<b>2735,2</b>	2404,3
7	2431,5	2645,9	2735,1	<b>2836,7</b>	2724,9
	0 1260,0	0 735,0 819,0	382,5 900,0 436,5 405,0	962,5 472,5	0 1485,0

Введем неизвестные:  $x_1 = h_{21}$ ;  $x_2 = h_{15}$ ;  $x_3 = h_{23}$ ;  $x_4 = h_{44}$ .

Используя последние семь уравнений, получим для первых четырех, после приведения подобных, следующий вид:

$$1554 - 819x_3 = 2220x_2; \quad 1260x_1 = 1485x_2;$$

$$1687,5 + 436,5x_3 - 900x_1 - 405x_4 = 1485x_2;$$

$$962,5 + 472,5x_4 = 1485x_2;$$

или после сокращения:

$$740x_2 = -273x_3 + 518; \quad 33x_2 = 28x_1;$$

$$33x_2 = -20x_1 + 9,7x_3 - 9x_4 + 37,5; \quad 297x_2 = 94,5x_4 + 192,5.$$

Решая последнюю систему уравнений, получаем для  $x_i$  значения:

$$x_1 = 0,7872; \quad x_2 = 0,6679; \quad x_3 = 0,0871; \quad x_4 = 0,0620.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы имеем право вычислять значения  $x$ -ов (а следовательно, и  $h_{ik}$ ) с точностью до 4-го знака после запятой, несмотря на то, что  $\lambda_k$  были вычислены только с точностью до 3-го знака, так как  $\lambda_k$  имеют только вспомогательное значение и погрешность при их вычислении не влияет на точность вычисления  $h_{ik}$ .

Находя по  $x_i$  значения  $h_{ik}$ , получим для них следующие значения (табл. В).

Значения в строке 3 означают как время обработки данного материала на станке 3, так и на станке 8 (см. табл. I и III), впрочем, их можно, очевидно, варьировать в известных пределах.

Общая производительность по каждому материалу составляет 991,8 усл. ед.

Таблица В

	1	2	3	4	5
1	0	0,3321	0	0	0,6679
2	0	0,9129	0,0871	0	0
3(8)	0,7872	0	0,2128	0	0
4	0	0	0,9380	0,0620	0
5	0	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0
7	0	0	0	1	0

### 6. Проверка

Для того чтобы проверить максимальность  $z$ , проверим (см. п. 4 и 6), правильно ли мы выделили ненулевые значения  $h_{ik}$ . Для этого составим таблицу значений  $\lambda_k a_{ik}$  (т. е. помножим столбцы табл. IV на строчку 7-ю табл. А) и на каждой строчке выделим максимальные значения (см. табл. VI).

Таблица VI

	1	2	3	4	5
1	2431,3	<b>2646,0</b>	2583,0	2631,0	<b>2644,8</b>
2	2735,0	<b>2948,4</b>	<b>2947,7</b>	2775,8	2805,1
3	<b>6078,2</b>	6048,0	<b>6077,7</b>	5997,4	5770,4
4	2431,4	2640,0	<b>2733,0</b>	<b>2735,3</b>	2724,9
5	2127,4	2457,0	<b>2583,0</b>	2573,2	2564,6
6	1823,5	2268,0	2131,1	<b>2735,2</b>	2404,4
7	2431,3	2646,0	2735,0	<b>2836,6</b>	2724,9

Для проверки  $h_{ik}$  вычислим производительности по каждому материалу:

1-й материал  $1260 \cdot 0,7872 = 991,9$  усл. ед.

2-й «  $735,0 \cdot 0,3321 + 819 \cdot 0,9129 = 991,8$  усл. ед.

3-й «  $436,5 \cdot 0,0871 + 900 \cdot 0,2128 + 405 \cdot 0,9380 + 382,5 = 991,9$  усл. ед.

4-й «  $472,5 \cdot 0,0620 + 962,5 = 991,8$  усл. ед.

5-й «  $1485 \cdot 0,6679 = 991,8$  усл. ед.

### 7. Производительности станков

Вычислим производительности по материалам непосредственно по данным ЦЛВФТ (табл. I). Результаты даны в табл. VII.



Таблица VII

	1	2	3	4	5
1	0	2,32	0	0	11,02
2	0	7,12	0,84	0	0
3	3,94	0	2,13	0	0
4	0	0	8,44	0,84	0
5	0	0	8,50	0	0
6	0	0	0	13,50	0
7	0	0	0	14,00	0
8	3,94	0	2,13	0	0
Итого	7,88	9,44	22,04	28,34	11,02

### 8. Сравнение с простейшим решением

Чтобы вычислить экономический эффект вышеизложенного, сравним полученную производительность с той, которая получилась бы, если бы на каждом станке материалы изготавливались в данном отношении. Ведя вычисления для приведенных данных (табл. IV), нужно, чтобы на каждом станке всех материалов изготавливалось поровну. Определим, сколько каждого материала изготавливает  $i$ -й станок. Пусть  $y_i$  — искомое количество материала в усл. ед.

Тогда

$$y_i = a_{i1}h_{i1} = a_{i2}h_{i2} = a_{i3}h_{i3} = a_{i4}h_{i4} = a_{i5}h_{i5},$$

а так как

$$h_{i1} + h_{i2} + h_{i3} + h_{i4} + h_{i5} = 1,$$

то

$$y_i = \frac{1}{\frac{1}{a_{i1}} + \frac{1}{a_{i2}} + \frac{1}{a_{i3}} + \frac{1}{a_{i4}} + \frac{1}{a_{i5}}}.$$

Вычисляя  $y_i$  по таблицам Барлоу (обратных величин), получаем:

$$y_1 = 113,2; \quad y_2 = 125,0; \quad y_3 = 264,9;$$

$$y_4 = 116,5; \quad y_5 = 107,6; \quad y_6 = 101,3; \quad y_7 = 117,5$$

и общая производительность 946,0 усл. ед.

Максимальная производительность в отношении к только что вычисленной составляет 104,8%.

ЗАМЕЧАНИЕ. Такой сравнительно небольшой процент прироста объясняется тем, что производительности станков, по данным ЦЛВФТ, почти пропорциональны.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ДОБАВЛЕНИЕ  
(ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ  
РАЗРЕШАЮЩИХ МНОЖИТЕЛЕЙ)**

В приложении 1-м было установлено, что определение чисел  $h_{ik}$  по разрешающим множителям приводит к решению задачи, и был указан путь нахождения этих разрешающих множителей. Для практических целей этого, пожалуй, и достаточно; но для полноты изложения представляется важным установить тот факт, что разрешающие множители всегда существуют. Это покажет, что метод разрешающих множителей, наверное, применим к каждой задаче. Ввиду того, что незнание этого доказательства существования нисколько не может помешать ни усвоению метода, ни сознательному его применению, а также ввиду того, что для этого доказательства нужны несколько более деликатные математические средства, мы сочли целесообразным выделить его в это специальное добавление.

В изложении доказательства существования разрешающих множителей мы для краткости ограничимся рассмотрением задачи А<sup>16</sup>).

Считаем полезным привести два доказательства — аналитическое и геометрическое.

### 1. Аналитическое доказательство

Будем рассматривать системы чисел  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , подчиненные условиям  $\lambda_k \geq 0$ ;  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$ . Для каждой данной системы  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  рассмотрим произведения  $\lambda_1 a_{i1}$ ;  $\lambda_2 a_{i2}$ ;  $\dots$ ;  $\lambda_m a_{im}$  и для тех  $k$ , для которых произведение  $\lambda_k a_{ik}$  не максимально в своем ряду, положим  $h_{ik} = 0$ , прочие  $h_{ik}$  постараемся подобрать так, чтобы  $\min(z_1, z_2, \dots, z_m)$  был возможно велик. Максимальное значение этого минимума обозначим  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ . Очевидно, это ограниченная функция. Например, ясно, что  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \leq \sum_{i,k} a_{ik}$ . Эта функция имеет точную верхнюю границу — обозначим ее  $C^*$ . Существует последовательность систем  $(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \dots, \lambda_m^{(s)})$ , для которых значение  $C(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  приближается к  $C^*$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} C(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \dots, \lambda_m^{(s)}) = C^*.$$

Из последовательности систем  $(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \dots, \lambda_m^{(s)})$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) можно выбрать частичную сходящуюся; не умаляя общности, очевидно, можем считать такой самую первоначальную последовательность, т. е.

$$(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \dots, \lambda_m^{(s)}) \rightarrow (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m).$$

Далее, при каждом  $s$  существует определенная система чисел  $\{h_{ik}^{(s)}\}$ , которая приводит к значению  $C(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \dots, \lambda_m^{(s)})$ . Эти системы чисел, переходя, если надо,

---

<sup>16)</sup> Более полное математическое рассмотрение вопроса будет дано в специальной математической статье автора.

к частичной последовательности, также можем считать сходящимися к определенной системе:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} h_{ik}^{(s)} = \bar{h}_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m).$$

Так как при каждом  $s$  выполнялись необходимые условия для  $h_{ik}^{(s)}$ , то и в пределе для  $\bar{h}_{ik}$  также должны быть выполнены эти условия. Для системы  $h_{ik} = \bar{h}_{ik}$  получим:

$$\min(z_1, z_2, \dots, z_m) = \lim_{s \rightarrow \infty} \min(z_1, z_2, \dots, z_m) = \lim C(\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)}, \dots, \lambda_m^{(s)}) = C^*,$$

а потому  $C(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m) \geq C^*$ . Так как, с другой стороны, справедливо обратное неравенство, то имеем:

$$\min(z_1, z_2, \dots, z_m) = C(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_m) = C^*.$$

Теперь изменением  $\lambda_k$  можем добиться того, чтобы все  $z_k$  равнялись  $C^*$ . Действительно, если некоторое  $z_k > C^*$ , то уменьшая соответствующее  $\lambda_k$  и увеличивая пропорционально остальные, можем добиться совпадения в  $\lambda_k a_{ik}$ , за счет которого это  $z_k$  можно уменьшить. Так как прочие  $z_k$  все за раз превзойти  $C^*$  не могут, ибо это противоречило бы определению  $C^*$ , то таким способом постепенно можем прийти к таким значениям  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*$ , для которых  $h_{ik}$  возможно выбрать так, что  $z_1 = z_2 = \dots = z_m = C^*$ . После того, как мы этого добились, существование разрешающих множителей и можно считать установленным.

## 2. Геометрическое доказательство

Рассмотрим всевозможные системы  $\{h_{ik}\}$ , удовлетворяющие условиям

$$h_{ik} \geq 0; \quad \sum_{k=1}^n h_{ik} = 1.$$

Каждой системе чисел  $h_{ik}$  отвечает определенная система чисел  $z_k = \sum_i a_{ik} h_{ik}$ . Такие системы  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ , взятые для всевозможных допустимых  $\{h_{ik}\}$ , заполняют в  $m$ -мерном пространстве точек  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$  некоторое выпуклое тело  $K$  (см. рис. 2<sup>17</sup>). Рассмотрим далее другое выпуклое множество  $H_C$ , состоящее из точек, удовлетворяющих условиям  $z_1 \geq C; \dots; z_m \geq C$ , или, что то же самое,  $\min(z_1, z_2, \dots, z_m) \geq C$ .

Обозначим, как прежде, через  $C^*$  общее максимальное значение  $z$  и  $z'$  в задачах  $A$  и  $A'$  (см. приложение 1, п. 2). Тогда, так как  $C^*$  есть максимальное значение для  $\min(z_1, z_2, \dots, z_m)$ , то для всех точек тела  $K$   $\min(z_1, z_2, \dots, z_m) \leq C^*$ . Поэтому тело  $K$  не имеет общих внутренних точек с множеством  $H_{C^*}$ , так как для всех внутренних точек последнего  $\min(z_1, z_2, \dots, z_m) \geq C^*$ .

Итак,  $K$  и  $H_{C^*}$  имеют только общие граничные точки, одной из них будет  $(C^*, C^*, \dots, C^*)$ . По теореме Минковского, существует проходящая через эту точку плоскость, разделяющая эти выпуклые множества; ее уравнение имеет вид:

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_m z_m = C^*,$$

<sup>17</sup>Чертеж выполнен по данным примера 1.

где  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$  (этого всегда можно добиться), а свободный член равен тогда  $C^*$ , так как точка  $(C^*, C^*, \dots, C^*)$  лежит в этой плоскости. Кроме того, из геометрического вида области  $H_{C^*}$  ясно, что непременно  $\lambda_k^* \geq 0$ .

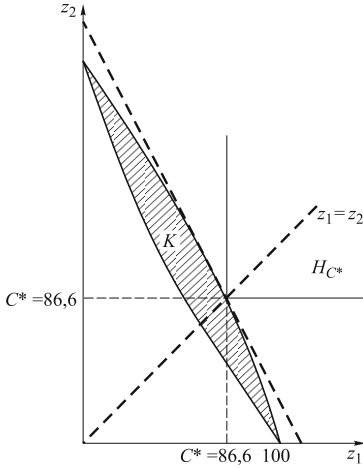


Рис. 2

Коэффициенты для этой разделяющей плоскости (на рис. 2 изображены жирно и жирным пунктиром) и являются разрешающими множителями. Действительно, пусть  $\{h_{ik}^*\}$  — система чисел, дающая  $z_1 = z_2 = \dots = z_m = C^*$ . Через  $t_i$ , как раньше, обозначим наибольшее из произведений:

$$\lambda_1^* a_{i1}; \lambda_2^* a_{i2}; \dots; \lambda_m^* a_{im}.$$

Так как тело  $K$  лежит по одну сторону от разделяющей плоскости, то для всех его точек  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$  будет:

$$\sum \lambda_k^* z_k \leq C^*,$$

или, что то же самое, для любых допустимых  $\{h_{ik}\}$

$$\sum_k \lambda_k^* \sum_i a_{ik} h_{ik} = \sum_i \sum_k \lambda_k^* a_{ik} h_{ik} \leq C^*.$$

В частности, беря  $h_{ik} = 1$ , для тех  $k$ , для которых  $\lambda_k^* a_{ik} = t_i$ , находим  $\sum_i t_i \leq C^*$ .

С другой стороны,

$$C^* = \sum_k \lambda_k^* z_k^* = \sum_k \lambda_k^* \sum_i a_{ik} h_{ik}^* = \sum_i \sum_k (\lambda_k^* a_{ik}) h_{ik}^* \leq \sum_i t_i \sum_k h_{ik}^* = \sum_i t_i,$$

при этом знак « $=$ » в неравенстве достигается только в том случае, если  $h_{ik}^* = 0$  всякий раз, когда  $\lambda_k^* a_{ik} < t_i$ , но благодаря ранее найденному неравенству  $\sum_i t_i \leq C^*$ , знак равенства здесь непременно должен осуществляться, а потому указанное обстоятельство для  $h_{ik}^*$  действительно имеет место. Итак, оказывается, что для  $h_{ik}^* = h_{ik}$  выполнено условие равенства нулю всех тех из них, которые не отвечают максимальным произведениям, а прочие таковы, что  $z_1 = z_2 = \dots = z_m$ . Это показывает, что  $\lambda_k^*$  — действительно разрешающие множители, и существование разрешающих множителей в задаче А для любого случая доказано.

# ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ НАИЛУЧШЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ

## Предисловие

Настоящее исследование имеет целью дать новые более совершенные методы экономического расчета и решения вопросов планирования в социалистическом обществе.

Эта тема возникла в связи с предыдущими работами автора. В 1939 г., в связи с консультацией по некоторым практическим вопросам производства, автором была написана брошюра «Математические методы организации и планирования производства» (Издательство Ленинградского университета, 1939 г.). В ней был дан метод, позволяющий найти решение технико-экономических вопросов такого рода, как наиболее рациональное распределение заданий по механизмам, раскрой материала, обеспечивающий минимальные отходы, распределение грузов по нескольким видам транспорта и т. п. Эти исследования продолжились в Математическом институте АН в 1940–1941 гг., и некоторые из этих вопросов получили дальнейшее развитие в специальных статьях, им посвященных. Кроме того, подверглась усовершенствованию и упрощению сама техника расчетов при решении задач этого типа.

Одновременно в связи с этим автору пришлось ближе познакомиться с условиями работы промышленности, а также с литературой по экономике и планированию. При этом, с одной стороны, обнаружилось, что ныне применяемые расчетные методы решения экономических проблем производства имеют очень существенные недостатки. С другой стороны, что методы, развитые ранее автором для специальных технико-экономических вопросов как особые приемы нахождения наилучшего решения, имеют простой и наглядный экономический смысл и гораздо более широкий круг применения. Именно это и привело постепенно автора к настоящей теме, посвященной разработке общих вопросов методики экономического расчета и планирования. Эти исследования были начаты автором в 1941 г. в плане Математического института АН, а в 1942 г., после некоторого перерыва, продолжены в ВВИТУ ВМФ, где автор сейчас работает. В настоящем виде работа содержит главным образом принципиальные основы методики экономического расчета.

Основной вывод заключается в том, что правильная система цен, наиболее целесообразно выбранная в соответствии с конкретными условиями обстановки и момента, дает средство экономического регулирования, обеспечивающее наилучшее использование ресурсов. И для нахождения такой системы цен и соответствующего плана даются определенные расчетные методы. Преимущество этих методов по сравнению с существующими в том, что благодаря учету ряда моментов, которые обычно опускаются, выбор решения согласно результатам расчета соответствует

народнохозяйственным интересам, а не противоречит им, как это часто оказывается при существующих методах.

Краткий срок, а также служебная загрузка не позволили автору довести до конца и включить в данный труд все вопросы, возникающие в связи с рассматриваемой темой. В то же время автор не считал возможным откладывать его представление, так как уже полученные результаты имеют столь принципиальный характер, что в корне меняют подход к количественному анализу экономических проблем. Главное же то, что даже в существующем виде выдвигаемая здесь более совершенная методика анализа экономических вопросов и получающиеся в связи с ней практические выводы, будучи использованы нашей промышленностью и планирующими органами, могут немедленно дать положительные результаты и существенно способствовать улучшению работы тыла.

20 сентября 1942 года.

Л. Канторович

## От автора

В 1938–1939 гг. в связи с консультацией по некоторым производственным вопросам автором была выполнена работа «Математические методы организации и планирования производства» (Изд-во ЛГУ, 1939). В ней был предложен расчетный метод, позволяющий находить решение технико-экономических вопросов такого рода, как наиболее рациональное распределение работ по механизмам, раскрой материала с минимальными отходами, распределение грузов по нескольким видам транспорта и т. п.

Эти исследования продолжались в 1940–1941 и затем в 1948–1950 гг. в Математическом институте Академии наук СССР. Некоторые из названных вопросов получили дальнейшее развитие в посвященных им специальных работах. Методы рационального раскроя были внедрены на нескольких ленинградских заводах. Подвергалась усовершенствованию и упрощению техника расчета при решении задач данного типа.

Вскоре после начала этих работ стало ясно, что развитые в них методы нахождения оптимального решения имеют простой и наглядный экономический смысл и могут найти значительно более широкий круг применения в общих вопросах методики экономического расчета и планирования. Результаты некоторых исследований в этой области были доложены автором в 1942 г. в Математическом институте АН СССР (в тот момент в Казани) и в 1943 г. в Институте экономики АН СССР в Москве.

Предлагаемая книга представляет изложение результатов упомянутых исследований, которое дополнено новыми соображениями и примерами, учитывающими экономические факты последнего времени. В ней даны только принципиальные основы методики экономического расчета.

Центральной проблемой является задача построения оптимального производственного плана, обеспечивающего достижение максимальных результатов на основе наилучшего использования наличных ресурсов, а также изучение экономических показателей такого плана.

Изложение строится в двух разрезах. С одной стороны, анализируется оптимальное решение некоторых частных планово-экономических проблем (распределение программы, мероприятия по экономии, использование оборудования, эффективность капиталовложений), которые рассматриваются в рамках одного предприятия, группы предприятий, экономического района, отрасли. Дается подход к эффективному решению этих вопросов. С другой стороны, на основе проведенного исследования этих вопросов выясняются некоторые общие принципиальные положения, относящиеся к экономическому расчету и планированию в условиях социалистического общества. Полученные выводы могут найти применение в народнохозяйственном планировании и при выборе системы экономических показателей.

Главный вывод работы заключается в том, что система оценок продукции, правильно построенная в соответствии с конкретными условиями и объективно определяемая всей конкретной обстановкой, является эффективным средством экономического анализа, направленного на наилучшее использование ресурсов. Эти оценки отвечают полностью учтенным затратам общественного труда, необходимого для производства единицы продукции при данных условиях в оптимальном плане. Для нахождения такой системы оценок и оптимального плана предлагаются эффективные подходы и специальные расчетные методы.

Преимущество этих методов по сравнению с существующими заключается в том, что благодаря количественному учету ряда факторов, которые обычно опускаются или учитываются лишь качественно, выбор решения в соответствии с результатами такого расчета находится в полном согласии с народнохозяйственными интересами.

В настоящее время исчисление необходимых показателей по предлагаемой методике еще не произведено, но автор полагает, что результаты работы могут уже сейчас оказать существенную помощь при решении многих конкретных экономических вопросов.

<<sup>1</sup>) Применимость и большая эффективность методов оптимального планирования в условиях производственного участка, цеха, предприятия, группы предприятий не вызывает сомнений. Эти методы достаточно практически проверены. Однако в деле использования методов оптимального планирования в масштабе всего народного хозяйства подобный опыт пока отсутствует. Поэтому вопрос о месте и значении этих методов в народнохозяйственном планировании не может считаться вполне выясненным, и какие-либо категорические утверждения на этот счет были бы преждевременными.

Несомненно одно — в условиях социалистического общества, где все хозяйство строится на научных, плановых основах, область применения математических методов (в частности, экстремального принципа) неизмеримо шире. Здесь в отличие от капитализма имеется принципиальная возможность применения математических методов в народнохозяйственном планировании.

Построение народнохозяйственного плана и его показателей представляет задачу исключительной сложности, именно поэтому привлечение более точных количественных методов и достижимое за счет них совершенствование средств решения этой задачи имело бы особенно большое значение. Применение математических методов в планово-экономическом анализе в условиях социалистического хозяйства ставит ряд сложных методологических проблем: выяснение роли и области применения этих методов, раскрытие экономического смысла возникающих при применении этих методов новых показателей, установление их связи и взаимоотношений с привычными экономическими категориями. Поскольку эти показатели появляются при объективном количественном исследовании экономических явлений, они должны оказаться согласованными и полностью укладываться в общие положения трудовой теории стоимости.

<sup>1</sup>) < . . . > Этот текст был добавлен после изменения В. С. Немчиновым своего предисловия.



Некоторые попытки установления таких связей делаются в настоящей книге, однако окончательное выяснение этих вопросов должно последовать в результате дальнейших исследований и творческого обсуждения данных проблем широкими кругами специалистов в области экономической теории и практических работников.>

Много существенных и полезных замечаний по данной работе было сделано ответственным редактором В. С. Немчиновым, рецензентами К. И. Клименко, Я. И. Лукомским и А. Л. Лурье, а также В. В. Новожиловым, В. А. Залгаллером, А. Л. Вайнштейном, А. С. Консоном, А. И. Каценеленбойгеном, Г. Н. Соловейчиком. Эти замечания были учтены автором при окончательной подготовке работы к печати.

Большую помощь в написании Приложений I и II оказал автору Г. Ш. Рубинштейн. В проверке примеров основного текста и расчете примеров для Приложения II, а также в просмотре окончательного текста рукописи приняли участие Л. И. Горьков, А. А. Корбут, И. В. Романовский, Л. С. Соболева, В. Н. Соколова и И. Н. Соколова.

Всем названным товарищам и другим лицам, участвовавшим в обсуждении работы, автор выражает свою признательность.

1959 г.

## Из предисловия ко второму изданию

Вышедшая впервые в 1959 году наша книга «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» представляла первую советскую монографию, в которой исследование проблем социалистической и советской экономики базировалось на идеях математического моделирования экономических процессов и систематическом использовании принципов оптимизации и двойственности (на экономическом языке — взаимосвязи цен и плана). Впрочем, начало работы автора и зарождение этих идей относится к еще более раннему времени, имея первоисточником методологию линейного программирования и его применений к оптимизационным задачам технико-экономического характера, впервые изложенную в работе 1939 года «Математические методы организации и планирования производства». Впрочем, и сама данная монография в основной части была создана значительно раньше ее выпуска в свет — в начале 1940-х годов. Книга вызвала определенный интерес у нас и за рубежом — она переведена на польский, французский, английский, испанский, румынский и словацкий языки.<sup>2)</sup>

В настоящее время математические методы в экономике, идеи оптимизации и двойственности заняли первостепенное место в советской экономической науке, а в известной мере и в экономической практике, это положение относится и к большинству социалистических стран. За эти годы методология экономического анализа привлекла большое число, по преимуществу, молодых исследователей, получила глубокое дальнейшее развитие, по ней написано много монографий и огромное число статей, многие из которых в той или иной степени генетически связаны с данной книгой. В результате данная область науки получила большое развитие, обогатилась многими ценными исследованиями, большим фактическим материалом и опытом применений, и не только превратилась в важную ветвь экономической науки, но и органически вошла в теорию и практику экономики социалистического хозяйства, особенно в такие важнейшие разделы ее как планирование, ценообразование, эффективность общественного производства, экономика труда и природопользования и др.

Эти обстоятельства поставили автора в трудное положение при решении вопроса о форме переиздания книги.

Попытка при ее переиздании систематически учесть все эти новые разработки и достижения или даже только наиболее существенные из них представляет трудную задачу. Может быть, автор когда-нибудь еще возьмется за нее, но тогда это будет не переиздание предыдущей, а совершенно новая книга. С другой стороны, конечно, нельзя совершенно не отразить происшедший за более чем 15 лет прогресс в этой области, тем более, что и сам автор продолжал работу в ней наряду со своими более молодыми коллегами.

Поэтому автор счел возможным пойти на известный компромисс. Основной текст книги при переиздании оставлен неизменным (за исключением мелких поправок), с тем, чтобы новое поколение исследователей, работающих в этой области, могло ознакомиться с ней в ее первоначальном виде. Другим побудительным мотивом в пользу этого является то обстоятельство, что, несмотря на происшедший

---

<sup>2)</sup> А также на сербский и японский языки. (Прим. ред.)

прогресс, основные положения книги не требуют коренного пересмотра и не потеряли своего значения. Форма изложения ее также сохраняет до настоящего времени оригинальный характер, так как, несмотря на то, что изложение существенно базируется на идеях математического моделирования, в основной части книги математический аппарат формально не используется, что дает возможность ознакомиться с основными ее идеями и экономическими выводами также экономисту, не вооруженному математическим аппаратом. Чтобы связать основной материал книги с имевшим место дальнейшим развитием рассматриваемых вопросов — генезисом идей и практическим использованием, а также вновь вышедшей литературой, текст дополнен комментариями в виде сносок. Эти сноски в отличие от воспроизводимых по первому изданию обозначены не значками «\*», а значками «+».

Наконец, помимо воспроизведения двух имевшихся приложений к основному тексту книги, содержащих описание основных математико-экономических моделей и методов численного решения, введено еще пять новых приложений и послесловие<sup>3)</sup>.

Автор выражает благодарность коллективам тех учреждений, в которых интенсивно развивались математико-экономические исследования и с которыми автор в той или иной форме был особенно тесно связан по работе, получал дружескую поддержку, ценные советы и вел полезные дискуссии: Ленинградский университет, Ленинградское отделение Математического института АН, Институт математики и Институт экономики и организации промышленного производства Сибирского отделения АН, ЦЭМИ АН СССР.

Наконец, автору хочется выразить признательность тем ученым, кто своим авторитетом способствовал признанию и продвижению данных работ и публикации первого издания книги, в частности, академикам В. А. Амбарцумяну, В. А. Кириллину, А. Н. Колмогорову, А. Н. Несмеянову, С. Л. Соболеву, члену-корреспонденту С. В. Валландеру.

Я также хочу отметить ту большую роль в подготовке первого издания книги, которую сыграли мои ныне покойные друзья и коллеги Ал. Л. Вайнштейн, В. В. Новожилов, А. Л. Лурье, а также ответственный редактор первого издания академик В. С. Немчинов.

1975 г.

---

<sup>3)</sup>Идея написания этих приложений не была реализована. Предполагалось, что это будут очерки по отдельным вопросам экономико-математического направления, получившим дальнейшее развитие в последующие годы в исследованиях самого автора и его коллег, работавших в сотрудничестве с ним. Планировалось, что опубликованные работы не будут буквально воспроизводиться, а это будут специально подготовленные обзоры, написанные Л. В. Канторовичем в соавторстве с его учениками: В. Л. Макаровым (Приложение 3 «Дальнейшее развитие динамической модели с дискретным временем»), В. И. Жияновым (Приложение 4 «Модели роста управляемой экономики»), Ю. И. Овсиенко (Приложение 5 «Оптимальное планирование и ценообразование»), Л. В. Алиевской (Приложение 6 «Оптимизация в отраслевом планировании и технической политике»), М. И. Вирченко (Приложение 7 «Оптимизационные модели сельскохозяйственного производства и их использование для построения экономических показателей»). (Прим. ред.)

## ВВЕДЕНИЕ

### О путях совершенствования методики планирования и экономического расчета<sup>4)</sup>

{<sup>i</sup>}<sup>5)</sup> Планирование народного хозяйства и его отдельных отраслей в масштабе государства возможно только при условии замены капиталистической собственности на средства производства собственностью общественной, социалистической. Только ликвидация капиталистических производственных отношений и замена их социалистическими создает возможность такого планирования.

В. И. Ленин был вдохновителем первых научных планов в истории Советского государства — планов электрификации и кооперирования сельского хозяйства. Гениальные ленинские идеи планирования легли в основу всех планов развития народного хозяйства СССР. Ленинской идеей строительства коммунистического общества проникнуты контрольные цифры семилетнего плана развития народного хозяйства СССР, утвержденные XXI съездом КПСС. Партия неоднократно указывала, что лишь при правильном подлинно научном планировании может быть достигнуто полное, разностороннее использование всех имеющихся ресурсов и всестороннее раскрытие преимуществ социалистического способа производства, гарантирующее победу социализма в мирном соревновании с капитализмом.

В деле планирования экономики в масштабе социалистического государства накоплен богатейший опыт. Социалистическое строительство в СССР полностью подтвердило основные принципы планирования.

Однако в практике планирования были и имеются существенные недостатки. Это относится, прежде всего, к технике и методике планирования и вообще экономического расчета. Коммунистическая партия и Советское правительство неоднократно обращали внимание на несовершенство методов планирования и построения экономических показателей, на необходимость устранения недостатков в них и настойчиво выдвигали задачу улучшения этих методов. При этом недостатки в планировании непосредственно связаны с отставанием экономической науки от потребностей развернутого строительства коммунизма.

Наличие такого отставания и неразрешенности ряда основных задач в области экономической науки признается и самими экономистами.

---

<sup>4)</sup> В рукописи 1942 г. введение имеет подзаголовок «О некоторых недостатках в методике планирования и экономического расчета и о путях их преодоления». (*Прим. ред.*)

<sup>5)</sup> Большие фрагменты текста 1942 г., не вошедшие в издание 1959 г., приводятся в сносках в конце каждого раздела — i, ii, ... , а незначительные по размеру — либо в сносках внизу страницы, либо в самом тексте и выделяются фигурными скобками — {}. Фрагменты текста, написанные специально для издания 1959 г., выделяются квадратными скобками. Редакционные отличия текстов 1942 и 1959 гг. нами не отмечаются за исключением тех случаев, когда они определенно связаны со временем написания или когда редакция была смягчена по цензурным соображениям. В концевых сносках сохранен термин редакции 1942 г. «наиболее целесообразные оценки» (н. ц. оценки), применявшийся вместо о. о. оценок. (*Прим. ред.*)

Особенно большое внимание этим вопросам было уделено в последние годы, когда был осуществлен ряд мероприятий, направленных на устранение недостатков в планировании и экономических показателях, в особенности в сельском хозяйстве, и на улучшение организации управления промышленностью. Однако задача дальнейшего совершенствования методов решения всего комплекса указанных вопросов продолжает оставаться крайне актуальной и в настоящее время. В этом заключается существенный резерв для еще более быстрого роста народного хозяйства.]

Несомненно, что правильная методика планирования должна была бы приводить к наилучшему плану, плану, дающему в максимальном количестве нужную продукцию, обеспечивающему полное и наилучшее использование всех ресурсов. Можем ли мы сказать, что у нас такой план? Что ресурсы в нем использованы наилучшим образом? Нет, нельзя!

С одной стороны, о наличии больших возможностей, непредусмотренных планом, свидетельствует работа наших передовых предприятий, которые за счет лучшего использования наличных ресурсов {и мобилизации неиспользуемых} достигают объемов выпуска продукции, намного превосходящих план.

С другой стороны, об этом свидетельствует большое количество потерь: простой рабочей силы и оборудования, потери сырья, материалов, топлива, вызванных неподходящей программой, штурмовщиной, перебоями в снабжении. Не менее значительны, чем эти прямые потери, потери косвенные, связанные с не наилучшим использованием ресурсов, которые прямо не регистрируются, а потому менее заметны. Это потери такого рода, когда в одних местах данное совершенное оборудование используется на простых работах и с малой производительностью, а в других местах, где оно могло бы дать больший эффект, его отсутствие вызывает простой или заставляет применять кустарные методы. То же самое с материалами. Особенно часты потери, связанные с негибкостью снабжения, когда отсутствие небольших количеств некоторого материала становится тормозом для всего производства.

Все эти потери в основном вызваны именно недостатками общего и производственного планирования и экономического расчета, обусловленными, как мы увидим, пороком в их методике. Если одно предприятие дает в два-три раза меньше продукции, чем другое, в равной мере оснащенное техникой, то это есть обычно результат того, что неудачно распределена программа между предприятиями или не созданы другие условия, обеспечивающие производство (снабжение полуфабрикатами, инструментом).

Потери заводов в выпуске продукции, связанные только со штурмовщиной, [оценивались в свое время]{<sup>6)</sup>} в 25 процентов. Устранение же всей совокупности указанных потерь в результате применения более совершенной техники планирования и методики экономического расчета могло бы дать в краткий срок на основе наилучшего использования только существующих возможностей увеличение выпуска конечной продукции [(национальный доход) на 30–50%]{<sup>7)</sup>}.

Вот почему задача разработки и внедрения такой методики является исключительно важной и актуальной.{<sup>8)</sup>} [Следует подчеркнуть, что для решения по-

<sup>6)</sup> {один из руководящих работников нашей промышленности оценивал}

<sup>7)</sup> {, я полагаю, до 50–70 процентов}

<sup>8)</sup> {Следует сказать, что основные недостатки в технике планирования и экономического рас-

ставленных в настоящее время народнохозяйственных задач в промышленности, сельском хозяйстве и строительстве особенно необходимо устранение недостатков в планировании и разработке экономических показателей. Проведенная перестройка управления промышленностью и строительством чрезвычайно облегчает возможность применения более совершенных методов.]

В чем же заключается основная задача и основная трудность при решении вопросов экономики и планирования в социалистическом обществе?

Все вопросы экономического характера, от правильного решения которых зависит эффективность использования ресурсов, т. е. то, сколько нужной продукции будет получено, могут быть разбиты на два вида:

1) *Правильный выбор способа изготовления данной продукции или выполнения данной работы.* От выбора производственного способа существенно зависит, какие виды ресурсов (труда, сырья и материалов, оборудования, транспорта, электроэнергии) будут использованы и в каких количествах. Например, алюминий или качественная сталь для детали или изделия, дерево или цемент для постройки, экскаватор или ручной труд для земляных работ, привозное или местное сырье? Вопросы этого рода решаются повседневно в [совнархозах] {трестах}, на заводах, в колхозах, в проектных [организациях] {конторах}, на стройках.

2) *Распределение программы, а также наличных и подлежащих производству ресурсов между отдельными предприятиями, работами и т. д.* Эта задача должна быть решена так, чтобы обеспечить нужный состав конечной продукции, чтобы не был нарушен общий баланс ресурсов, чтобы производство и расходование каждого вида конечной или промежуточной продукции были согласованы между собой с тем, чтобы наилучшим образом организовать снабжение отдельных предприятий. От решения этой задачи существенным образом зависит возможность бесперебойной работы предприятий, то, какое количество продукции будет выпущено. Этого рода вопросы решаются организациями, планирующими и осуществляющими оперативное руководство хозяйством на всех ступенях.

Обе задачи неразрывно связаны между собой.

Лишь в немногих случаях, когда данное предприятие или работа могут рассматриваться вне связи с работой других предприятий, первую задачу можно решать в отрыве от второй. Например, когда новый способ производства позволяет при том же оборудовании, но с меньшей затратой труда и материалов дать больше продукции, чем другой. Но тогда никакого экономического вопроса не возникает. Речь идет о бесспорном техническом усовершенствовании производства, и каждому ясно, что нужно предпочесть более совершенный способ.

Как правило, на практике дело обстоит иначе. Например, имеется возможность перейти на местное сырье, но при этом понизится объем выпускаемой продукции; заменить один материал другим; сократить расход топлива, затратив значительные средства на котлы новой системы. Решение подобных вопросов зависит от условий работы многих других предприятий и общих народнохозяйственных условий. Если

---

чета, о которых речь будет ниже, в условиях войны сказываются еще больше, чем в мирное время, и имеют более вредные последствия, а потому их устранение теперь является особенно необходимым. }

дорога перегружена другими перевозками, то, возможно, следует перейти на местное сырье, несмотря на связанные с этим потери. Если общие средства для капиталовложений весьма ограничены, то нужно отказаться от установки нового котла, несмотря на его преимущества. При решении, например, вопроса о замене тонны олова тремя тоннами алюминия нужно исходить не из того обстоятельства, какой материал случайно оказался на предприятии в данный момент в большем количестве, а из того, экономия какого материала имеет большую народнохозяйственную значимость. {Иначе эти вопросы решать нельзя, отказываться же от рассмотрения и использования таких возможностей значит крайне ограничить пути и средства реализации плана.}

Вторую задачу никогда нельзя решать в отрыве от первой. Общий баланс продукции и производственных ресурсов складывается из балансов отдельных предприятий и организаций; изменения в этом балансе, вызванные изменением программы одних хозяйственных единиц, могут быть произведены только за счет изменения программы и условий работы других.

Таким образом, обе эти задачи невозможно решать изолированно. Однако их правильное одновременное решение практически очень трудно осуществимо. Нельзя, решая конкретные производственные вопросы, связанные с данным предприятием, которые затрагивают и общие балансы, одновременно производить анализ последних в общегосударственном масштабе. А отказаться от рассмотрения таких вопросов — значит не использовать всех возможностей улучшения работы предприятий. В то же время при решении вопросов планирования в масштабе народного хозяйства, отрасли или области, невозможно одновременно учитывать все условия работы и все возможности сотен и тысяч отдельных хозяйственных единиц.

*В этом, в согласовании общего и частного и заключается основная трудность в решении вопросов планирования и экономики. Эта трудность была бы преодолена, если бы была дана такая методика решения этих вопросов, которая позволила бы их решать отдельно, но в то же время согласованно друг с другом, и приводила бы к оптимальной (или близкой к ней) системе плановых решений.* Как же решается данная задача в настоящее время?

Заметим, что первая из названных выше задач встречается не только в социалистическом, но и в капиталистическом обществе. При сравнении способов производства предприниматель каждый раз выбирает тот из них, который приносит ему наибольшую прибыль. Из двух возможных видов сырья выбирает тот, который дешевле; если можно сэкономить затраты труда за счет увеличения расхода электроэнергии, он подсчитывает и сравнивает затраты на то и на другое; вкладывает средства в ту отрасль, которая сулит больший процент на капитал. При этом основное влияние на выбор решения оказывают существующие на данный момент системы цен, тарифов, размер процента на капитал.

Вторая задача — составление общего согласованного баланса — {никем не ставится и не решается.\*} [в условиях капиталистических отношений производства и распределения не возникает; она и не может возникнуть при господстве част-

---

\*{Мы не касаемся роли некоторых элементов государственного капитализма, которые имеются во всех странах.}

ной собственности на средства производства.] Такое «согласование» происходит в результате ожесточенной конкурентной борьбы на рынке с огромными потерями, связанными с ней, и получающаяся система экономических решений, конечно, никак не обеспечивает наилучшего развития производительных сил для народного хозяйства страны в целом. Наоборот, в силу известных противоречий капитализма, связанных главным образом с неправильным распределением, в обычное время имеют место громадные потери производительных сил: армия безработных, незагруженное оборудование, уничтожение готовых продуктов. {Следует сказать, однако, что в период военного и предвоенного времени возможности сбыта возрастают, а в некоторых отраслях становятся неограниченными, и в такие моменты капитализм может дать довольно высокую степень мобилизации производственных возможностей.}

Как решаются эти вопросы у нас? [В социалистическом плановом хозяйстве] при выборе способов производства некоторую, но отнюдь не решающую роль играет денежная калькуляция: подсчет себестоимости по существующим ценам, сравнение объема выпуска продукции в неизменных ценах. Однако этим расчетам не придают большого значения, так как действующие цены не отражают народнохозяйственных затрат в данный момент (далеко не безразлично затратить ли на 100 руб. алюминия, или на 100 руб. черного металла, или же израсходовать 100 руб. на оплату труда — нельзя одно заменить другим!).

Такое несоответствие цены вещей действительной их народнохозяйственной значимости в данный момент и в данной обстановке вызвано тем, что эта цена определена для других условий. Кроме того, действующие цены, построенные на основе средней себестоимости, имеют еще и тот недостаток, что в них не учтена ограниченность возможностей производства в данный момент многих видов продукции: последнее обстоятельство неизбежно должно играть существенную роль в вопросе об использовании такой продукции.

Наконец, совершенно недостаточно отражена в цене роль оборудования (подробнее об этом см. в тексте, § 5 главы I). Вследствие этого приходится принимать во внимание дополнительно целый ряд моментов: дефицитность материалов, перегруженность транспорта, значимость продукции и др. В результате во многих случаях правильное с народнохозяйственной точки зрения решение находится в противоречии с результатами денежной калькуляции. Поскольку все указанные моменты — дефицитность, перегруженность, значимость и т. п. — учитываются лишь качественно, зачастую трудно сказать, какое решение, в самом деле, правильно с точки зрения народного хозяйства, и тогда выбор решения производится субъективно или случайно. Очень часто решения оказываются вынужденными, принятыми под давлением существующих традиций или в связи с негибкостью распределения, когда, несмотря на бесспорные преимущества некоторого производственного способа, от него приходится отказываться из-за отсутствия часто небольших средств и материалов, необходимых для его осуществления.

[На фоне грандиозных успехов нашей промышленности и сельского хозяйства все эти трудности и недостатки порой не так заметны. Между тем их устранение весьма существенно: оно должно способствовать дальнейшему повышению темпов развития экономики.]



При решении второй задачи — рационального распределения программы и ресурсов — также встречаются значительные трудности. Заявки и потребности отдельных предприятий на материалы, оборудование, электроэнергию, транспорт, средства для капиталовложений оказываются в значительном несоответствии с наличными возможностями. Такое несоответствие связано с тем, что, решая вопрос о целесообразности применения данного фактора и подавая заявки на него, предприятия обычно не учитывают или учитывают не в должной мере его реальное наличие и потребность в нем других предприятий ввиду отсутствия правильных методов такого учета.

При этом нет определенных показателей, характеризующих действительную степень важности каждой заявки, или же эти характеристики носят чисто качественный характер: «очень нужно», «абсолютно необходимо». Ввиду этого, заявки частью урезаются на тех предприятиях, которые считаются менее важными, частью механически сокращают на определенное число процентов без объективного анализа того, какие потери влечет неудовлетворение данной заявки. Кроме того, немаловажную роль играют такие случайные и субъективные моменты, как удачное время подачи заявки, настойчивость в требованиях и т. п.

В результате этих дефектов распределения пропорциональность в балансах существенно нарушается (если не в плане, то при его фактической реализации), что является причиной важнейших потерь: простоев рабочей силы, штурмовщины (из-за перебоев снабжения), омертвления средств (из-за некомплектности), кустарщины и связанного с ней понижения производительности труда из-за необеспеченности инструментом. При этом многие потери явно устранимы (например, на одном предприятии подолгу не разгружаются вагоны из-за отсутствия автотранспорта, на другом — перевозки на сотни километров производятся автомашинами из-за нехватки вагонов и т. п.). Все потери такого рода являются следствием того, что методы распределения не гарантируют обеспечения данным фактором тех мест, где его использование максимально эффективно, а его отсутствие влечет особенно большие потери.

Такие же трудности возникают при решении вопросов о распределении производственной программы. Отсутствуют достаточно обоснованные показатели, позволяющие установить, какой вид продукции является наиболее подходящим для данного предприятия и какой объем программы является выполнимым и наиболее целесообразным. В результате этого в вопросах распределения программ нередко элементы случайности и механического подхода [разверстки, уравниловки, планирования по достигнутому уровню] (увеличение программного задания на всех предприятиях, скажем, на 10% по сравнению с предыдущим годом независимо от наличия ресурсов оборудования {и без анализа других важных моментов}).

С этим связан и ряд других недостатков. В частности, многочисленные показатели работы предприятий, как это уже [неоднократно] отмечалось в экономической печати, не дают достаточно правильной характеристики их деятельности. Так, реализация нужных с народнохозяйственной точки зрения мероприятий (экономика дефицитного материала, использование местного топлива, переход с полуфабрикатов на сырье, самообеспечение инструментом) приводит к ухудшению некоторых или даже всех основных показателей работы предприятий (товарной продукции, себестоимости, производительности труда).[\*]

\*[Так, несмотря на большие возможности экономии металла за счет производства профиль-

[Трудности и недостатки в оценке экономической эффективности являются также серьезным препятствием в деле внедрения новой техники.]

Можно с определенностью утверждать, что существующая практика решения вопросов экономики предприятий и планирования не обеспечивает наилучшего использования ресурсов и максимального повышения выпуска продукции[, не реализует полностью преимуществ социалистической системы хозяйства].

Многими недооценивается роль самой методики и техники решения вопросов планирования и экономики, основной недостаток которой состоит в том, что она не дает объективных критериев [и эффективных средств], позволяющих найти оптимальное решение, а потому дефекты в плане в известной мере являются неизбежными. Если, благодаря гениальной интуиции общего [опыту центрального] руководства, основные директивы определяются {прозорливо и} правильно, то при их реализации на низовых уровнях {где вопросы приходится решать рядовым работникам,} отсутствие полноценных объективных методов приводит к многочисленным ошибкам. Выбираются не лучшие из возможных решений, что имеет следствием ряд потерь, а в результате промышленность далеко не полностью использует все свои возможности. Поэтому и выдвигается задача построения методики, дающей объективный подход и обеспечивающей правильное решение планово-экономических вопросов.

Эта методика, раз к ней предъявляется требование, чтобы она была объективной, неизбежно должна быть количественной, так как при одних исходных цифровых данных решение должно быть одним, при других — другим (1 тонну олова заменить 1 тонной алюминия стоит, а 30 тоннами — не стоит, и качественно тут никак не подойдешь!). Таким образом, ясно, что эта методика должна представлять некоторую *систему экономического расчета*.<sup>{ii}</sup>

[Настоящая работа направлена на выяснение лишь некоторых принципов и средств такой методики. Ее детальная разработка потребует еще значительной исследовательской работы, обобщения и анализа огромного фактического материала и богатого опыта работы планирующих органов. Эту задачу можно разрешить лишь усилиями большого коллектива ученых разных специальностей и практических работников. Цель данной работы — выявить некоторые особенности и возможности экономического расчета в социалистическом обществе, которые имеют, по нашему мнению, существенное значение, но в настоящее время в должной мере не используются и не учитываются.]

В отношении основных экономических категорий руководящими для автора были, с одной стороны, важнейшие положения и методы анализа экономической теории Маркса, с другой — положение об объективном характере экономических законов социализма. Конечно, автор не ставит своей задачей теоретический анализ основных экономических категорий социалистического общества. Поставленная задача носит значительно более узкий и практический характер: первоначальная разработка метода экономического расчета, позволяющего систематически нахо-

---

ного проката с минусовыми допусками, а также за счет использования тонкостенных труб, они реализуются недопустимо медленно, так как предприятия при существующем порядке учета продукции в тоннаже не заинтересованы в этом. См. выступления Л. И. Брежнева, В. И. Устинова и Н. Н. Подгорного на XXI съезде КПСС (Стенографический отчет, т. I, с. 121, 130, 418).]

дить решения, близкие к оптимальным; выяснение подхода к построению методики решения экономических вопросов, которая способствовала бы лучшему и более полному использованию наших возможностей, увеличению выпуска нужной продукции.]

Во главу угла мы ставим конечную цель — дать наилучший (оптимальный) план, т. е. план, обеспечивающий максимальный при данных ресурсах выпуск нужной продукции. Такой подход, нам представляется, отвечает самой природе социалистического общества {и находится в полном соответствии с основным экономическим законом социализма}. Последовательное проведение этой точки зрения приводит к вполне осуществимому и доступному методу решения данного вопроса, а также к возможности построения важной системы показателей, объективно и наглядно отражающей соотношение народнохозяйственных ценностей на данный момент (система объективно обусловленных оценок). Эта же система показателей одновременно дает возможность с большей гибкостью и удобством оперативно решать вопросы, возникающие в процессе реализации плана, и притом так, чтобы использование ресурсов постоянно оставалось наилучшим.

Как при исследовании вопроса, так и для проверки правильности полученных положений {руководящее значение} имело [существенное значение] изучение {20-летнего} опыта Советской экономики и решений Партии и Правительства по экономическим вопросам.

Важным пробным камнем был анализ некоторых вопросов, в которых отдельными Советскими органами были допущены ошибки, исправленные затем {Центральным руководством} [директивными органами]. {Экономический} [Предварительный] анализ этих вопросов [показывает, что экономический расчет], произведенный по данному методу, полностью подтверждает правильность этих указаний. И, вероятно, если бы эти органы имели в своем распоряжении такую, более совершенную методику расчета, они могли бы и не допустить указанных ошибок. [Ряд подобных вопросов рассмотрен нами в тексте книги.]

Анализ проблем и изложение методов автор строит не отвлеченным образом, а приходит к основным выводам на основе рассмотрения ряда отдельных вопросов, позволяющих выявить тот или другой важный аспект. Чтобы избежать излишних усложнений и затемняющих суть дела подробностей, вопросы эти взяты в совершенно схематизированном виде. Та или иная конкретная оболочка придана им лишь для наглядности и облегчения понимания. Но при рассмотрении каждого вопроса полученные основные выводы, которые для удобства выделены, связываются с конкретными вопросами нашей действительности и некоторыми экономическими мероприятиями {Советской власти} [партии и правительства]. Попутно указывается та роль, которую может сыграть применение получаемых выводов, и та польза, которую они могут дать.

[Систематически применяемое рассмотрение планово-экономических вопросов в абстрагированной и упрощенной форме, состоящее по сути дела в замене самого вопроса некоторой моделирующей его схемой, чрезвычайно облегчает анализ, позволяет произвести его достаточно полно, применить объективные расчетные методы и сделать отчетливые количественные выводы. В то же время сами выводы непосредственно относятся лишь к рассматриваемой схеме. Неполное отражение в

этой схеме сложности реальной экономической проблемы, каких-то ее сторон и соображений, могущих иметь существенное значение, не позволяет прямо и безоговорочно применять полученные выводы на практике. Вместе с тем мы полагаем, что эти схемы позволяют достаточно точно учесть важнейшие экономические факторы, а сделанные предпосылки весьма приближены к реальным условиям. Поэтому полученные выводы, хотя и имеют в известной мере условный характер и требуют внесения определенных коррективов при их использовании, все же принесут практическую пользу. Эту сторону применяемого подхода, которая является обычной при использовании метода абстракций в научном исследовании, читатель должен постоянно иметь в виду.]

Изложение подразделяется на следующие части. В главе I рассматриваются вопросы распределения программы между предприятиями при специальных предположениях, когда решение вопроса — нахождения наилучшего плана — может быть достигнуто с использованием одних только оценок продукции. Здесь вводится основное для всего дальнейшего понятие объективно обусловленных оценок, которые естественно и неразрывно связаны с наилучшим (оптимальным) планом. Соотношение этих оценок для двух видов работ представляет тот реальный эквивалент, по которому одна работа может заменяться другой в оптимальном плане], что соответствует и соотношению затрат, необходимых для выполнения той и другой работы в данной обстановке, если эти затраты учтены правильно и полно. При этом в данных условиях указанное соотношение может быть установлено путем правильного разделения затрат между совместно производимыми видами продукции без детального анализа структуры этих затрат]. Попутно излагается для простейших случаев сама численная методика нахождения оптимального плана и объективно обусловленных оценок. Эта методика достаточно наглядна и доступна, однако цифровой анализ играет в ней большую роль, и необходимо в него вникнуть, так как без этого трудно понять основной смысл вводимых понятий.

Далее отмечаются некоторые свойства этих оценок и указываются их применения. Наиболее существенными свойствами являются конкретность оценок (их значения определяются и меняются с обстановкой), а также реальность даваемых ими соотношений.

В главе II рассматривается общая задача составления производственного плана без сделанных в главе I упрощающих предположений. Здесь выясняется необходимость введения объективно обусловленных оценок для всех видов затрачиваемых производственных факторов, причем в каждом из параграфов рассматривается отдельно роль каждого фактора.

Особенно важен § 5, где речь идет о наилучшем использовании оборудования и вводится основное понятие прокатной оценки оборудования. Там же показывается, что именно недооценка роли оборудования и недостаточный учет его в затратах представляет один из наиболее существенных пороков используемых ныне показателей и цен.

В последнем параграфе в полном объеме рассматривается проблема, связанная с наилучшим использованием наличной производственной базы, т. е. проблема планирования на небольшой период времени. Основной вывод состоит в широкой применимости в социалистическом обществе принципа рентабельности, если

пользоваться системой оценок, правильно отражающей соотношение народнохозяйственных ценностей в данных конкретных условиях. [В этой же главе выясняется основное преимущество развиваемой методики, заключающееся в органическом сочетании метода балансов и стоимостного расчета, а также рассматриваются пути практического использования данной методики и отмечаются те вопросы и трудности, которые связаны с ее реализацией.] {Там же идет речь и о вопросах практического использования данной методики.}

В главе III трактуются вопросы расширения производственной базы, т. е. планирования капиталовложений. Решение этих вопросов определяется выбором плана наиболее эффективного использования средств на вложения с тем, чтобы обеспечить наиболее быстрый рост мощности производственной базы в нужном направлении и соответственно максимальный выпуск продукции нужного состава. Показывается, что правильная методика расчета эффективности вложений имеет исключительное значение для их наилучшего использования.

[Наконец, в Приложении I дается формулировка и анализ тех математических задач, которые возникают в рассмотренных планово-экономических вопросах, а также математическое обоснование некоторых положений, приведенных в предыдущих главах. В Приложении II описаны способы решения этих задач, нужные для осуществления в более сложных случаях той методики экономического расчета, которая излагается в основном тексте.]

Таким образом, в работе рассматривается только круг вопросов, относящихся к экономической оценке способов производства и планированию. Автор не исследует некоторых других вопросов, тесно связанных с ними, например, вопрос о выборе показателей работы предприятия, согласованных с народнохозяйственными интересами так, чтобы улучшению работы предприятия (с точки зрения общего плана) отвечало улучшение показателя и обратно, {хотя вскользь об этом в тексте и говорится}. Но и в этом и во многих других вопросах также может оказаться полезной та же методика, а главное — знание реальной и конкретной системы народнохозяйственных оценок для продукции и производственных факторов.

В настоящей [книге]{работе} разработаны лишь принципы [объективной] методики решения вопросов экономического расчета и планирования. Деталей техники практического ее использования мы не рассматриваем, так как эти вопросы [еще недостаточно исследованы и] должны решаться в процессе самой практической реализации работы в зависимости от условий и степени постепенности ее осуществления. Некоторые конкретные практические выводы по отдельным вопросам, которые могут быть рекомендованы к немедленному применению, приведены в самом тексте работы, однако число таких вопросов может быть умножено. {iii}

[В работе затрагивается довольно широкий круг экономических вопросов, так или иначе соприкасающихся с задачей оптимального планирования; однако многие из них разработаны еще недостаточно, и относящиеся к ним выводы и предложения имеют лишь самый предварительный характер.]

Мы полагаем, что ознакомление с предлагаемым подходом будет способствовать обсуждению, дальнейшей разработке и практическому использованию этого, как нам представляется, весьма перспективного пути.]

<sup>i</sup> Вся история экономического развития Советского государства, а в особенности эпоха грандиозного строительства Сталинских пятилеток, является лучшим доказательством того, что сам принцип социалистического планирования в масштабе большого государства себя полностью оправдал. Однако сказанное нельзя отнести к технике и методике планирования и, вообще, экономического расчета, к которым могут быть предъявлены большие претензии.

Тов. Сталин еще в 1929 году ставил задачу разработки более совершенной методики при составлении балансов. На большие недостатки методов планирования, необходимость их преодоления обращал внимание и тов. Молотов в докладе на XVIII съезде ВКП(б). Однако в результате исключительного отставания теоретической работы в области экономики, которое неоднократно отмечалось в печати, эти указания не выполнены, и методы, применяемые в планировании, имеют крупные недостатки.

<sup>ii</sup> Задачей настоящей работы и является наметить принципы методики такого расчета. В отношении основных экономических категорий и методов руководящими для автора были, с одной стороны, основные положения и методы анализа экономической теории К. Маркса, с другой стороны, основное указание тов. Сталина о том, что закон стоимости полностью сохраняет свою силу для социалистического общества, положившее конец всякой вредной болтовне на этот счет.

Однако автор не ставит своей задачей теоретический анализ основных экономических категорий социалистического общества, да и не считает ее посильной для себя при его эрудиции в области политической экономии. Задача, которую мы ставили, более узкая и практическая — дать метод экономического расчета, позволяющий прийти к наилучшему плану, дать методику решения экономических вопросов, которая позволила бы еще лучше и полнее использовать наши возможности и дать еще больше нужной продукции.

При анализе указанной совокупности вопросов мы отказываемся от всяких априорных предпосылок и традиций.

<sup>iii</sup> И даже сейчас, пока еще не определены необходимые показатели в соответствии с данной методикой, выводы работы могут дать правильный подход к расчету и тем самым оказать существенную помощь при решении почти каждого конкретного экономического вопроса.

В заключение укажем еще раз, что автор рассматривает свой труд главным образом не как теоретическое исследование, а как практическое предложение, направленное на улучшение работы промышленности и рассчитанное на скорейшее использование на пользу Родине.

# ГЛАВА I

## Распределение производственной программы и оценка продукции

### § 1. Задача о наилучшем распределении программы между несколькими предприятиями

**Постановка задачи.** В качестве первого вопроса технико-экономического характера, для решения которого важны правильные методы экономического расчета, возьмем задачу о распределении производственной программы между несколькими предприятиями. [При этом мы считаем, что возможны различные варианты решения вопроса — одно и то же изделие может быть поставлено на производство на нескольких предприятиях. Ставится задача выбора оптимального распределения, при котором каждое предприятие было бы наилучшим образом приспособлено к выпуску изделия, производство которого включается в его программу, и в результате общие затраты стали бы минимальны.

Поскольку производство различных изделий в известной мере взаимосвязано, то взаимозависимы и затраты на их изготовление. Поэтому требует также решения вопрос о распределении затрат между изделиями и об объективном определении необходимых затрат на каждое изделие.]

Чтобы выяснить существо дела и метод решения, мы рассмотрим данную задачу на конкретном примере при ряде упрощающих предположений.

[ПРИМЕР. Дать наилучшее распределение программы между предприятиями при следующих условиях.]

1. Требуется поставить на производство два изделия: № 1 и № 2; потребность в них неограниченна, но нужно, чтобы они поступали в определенном соотношении (задание по ассортименту), например, изделий № 1 вдвое больше, чем изделий № 2.

2. Производство этих изделий может быть поставлено на предприятиях типа *А, Б, В, Г, Д*. Число предприятий каждого типа и их производственные возможности по выпуску изделий № 1 и изделий № 2 даны в табл. 1. [Считается, что каждое предприятие должно производить только один вид изделий (в данный период времени).]

Производственные затраты предприятия в целом (кроме сырья и основных материалов), а именно: зарплата (число рабочих постоянно), электроэнергия, топливо, расходы, связанные с оборудованием, прочие цеховые и общезаводские расходы, включая амортизацию, примерно одни и те же, будет ли на предприятии поставлен выпуск одного или другого изделия.

3. Все необходимые материалы имеются в нужном количестве. Расход основных материалов (а также технологической энергии и топлива, если они требуются) на единицу данного изделия один и тот же на предприятиях всех типов и составляет, скажем, 10 руб. на единицу изделия № 1 и 15 руб. на единицу изделия № 2 (последние цифры, впрочем, не очень важны для дальнейшего анализа).

4. Вопросы транспорта не играют существенной роли (например, все предприятия и мастерские находятся в одном или нескольких близко расположенных населенных пунктах либо стоимость весовой единицы изделий и основных материалов достаточно высока).

[Короче говоря, существенно, что мы рассматриваем случай, когда все производственные затраты могут быть разделены на две группы: неизменные для данного предприятия, независимые от того, какой вид продукции производится, и пропорционально зависящие, имеющие определенное значение для единицы изделия каждого вида независимо от того, где оно производится.]

Таблица 1<sup>1)</sup>

**Число предприятий и производственные  
возможности ежемесячного выпуска изделий**

Тип предприятия	Число предприятий	Производственная мощность одного предприятия при изготовлении изделия		Относительная трудоемкость изготовления одного изделия по сравнению с другим	
		№ 1	№2	№2 к №1	№ 1 к № 2
<i>A</i>	5	100 000	15 000	6,7	0,15
<i>B</i>	3	400 000	200 000	2	0,5
<i>B</i>	40	20 000	2500	8	0,125
<i>Г</i>	9	200 000	50 000	4	0,25
<i>Д</i>	2	600 000	250 000	2,4	0,41

Требуется: 1) определить возможный объем производственной программы, 2) наилучшим образом распределить программу между предприятиями, [3) произвести научно обоснованное разделение затрат между изделиями].

Ясно, что наилучшим планом является тот, в котором соблюдается заданный программой ассортимент, а выпуск продукции наибольший. Этому плану, очевидно, будет отвечать и наименьшая себестоимость, так как стоимость материалов во всех случаях одна и та же, а сумма затрат на работу предприятий постоянна, так что на каждое изделие придется тем меньшая их доля, чем большим будет выпуск продукции.

Общий план и суммарный выпуск продукции существенно зависит от способа распределения программы по предприятиям. Приведем в качестве примера один такой план.

В этом плане (табл. 2) распределение произведено так, что на предприятиях каждого типа изделия № 1 и № 2 производится примерно в нужном соотношении, т. е. программа «разверстана» по группам предприятий.

<sup>1)</sup>В варианте 1942 г. столбцов 5 и 6 в табл. 1 нет. (Прим. ред.)



Таблица 2

## Разверстка программы

Тип предприятия	Изделия № 1		Изделия № 2	
	Число предприятий	Общий выпуск	Число предприятий	Общий выпуск
<i>A</i>	1	100 000	4	60 000
<i>B</i>	2	800 000	1	200 000
<i>B</i>	10	200 000	30	75 000
<i>Г</i>	2	400 000	7	350 000
<i>Д</i>	1	600 000	1	250 000
<b>Всего</b>		2 100 000		935 000

Таблица 3

## Неудачный план

Тип предприятия	Изделия № 1		Изделия № 2	
	Число предприятий	Общий выпуск	Число предприятий	Общий выпуск
<i>A</i>	—	—	5	75 000
<i>B</i>	3	1 200 000	—	—
<i>B</i>	—	—	40	100 000
<i>Г</i>	—	—	9	450 000
<i>Д</i>	1	600 000	1	250 000
<b>Всего</b>		1 800 000		875 000

В табл. 3 приведен другой план, в котором выпуск обоих изделий еще меньше — неудачный план.

**Оптимальный план.** Различных планов может быть составлено довольно большое число. Требуется выбрать наилучший. Как его найти? Очевидно, это будет план, при котором каждое предприятие будет выпускать по возможности тот вид продукции, для которого оно наиболее приспособлено. Чтобы найти такой план, рассуждаем следующим образом. Если мы на всех предприятиях поставим на производство изделия № 1, то произведем его (см. табл. 1):

$$5 \times 100\,000 + 3 \times 400\,000 + 40 \times 20\,000 + 9 \times 200\,000 + 2 \times 600\,000 = 5\,500\,000 \text{ шт.}$$

Но нам нужно иметь также и изделие № 2; следовательно, часть предприятий нужно отвести под производство изделия № 2. При этом мы, конечно, получим уже меньше изделий № 1. Насколько меньше? Переводя предприятие типа *A* с изделия № 1 на № 2, мы вместо 100 тыс. изделий № 1 получаем 15 тыс. изделий № 2 или вместо одного изделия № 1 — 0,15 изделий № 2; аналогично, для предприятия типа *B* — 0,5; типа *B* — 0,125; типа *Г* — 0,25; типа *Д* — 0,41 изделий № 2 вместо изделия № 1 [(см. табл. 1, последний столбец)].

Таблица 4

## Оптимальный план

Тип предприятия	Изделия № 1		Изделия № 2	
	Число предприятий	Общий выпуск	Число предприятий	Общий выпуск
<i>A</i>	5	500 000	—	—
<i>B</i>	—	—	3	600 000
<i>B</i>	40	800 000	—	—
<i>Г</i>	6	1 200 000	3	150 000
<i>Д</i>	—	—	2	500 000
<b>Всего</b>		<b>2 500 000</b>		<b>1 250 000</b>

Как видим, целесообразнее всего перевести предприятия типа *B* на изделие № 2, но этого недостаточно: мы получим 600 тыс. изделий № 2 и 4,3 млн изделий № 1. Следующими переводим оба предприятия типа *Д*, но и этого мало, так как получаем 600 тыс. + 500 тыс. = 1,1 млн изделий № 2, а изделий № 1 — 3,1 млн, т. е. почти втрое, а не вдвое больше. Следующее по величине отношение 0,25 отвечает предприятиям типа *Г*; однако, если мы переведем все 9 предприятий этого типа на изделия № 2, то получим их слишком много. Чтобы прийти к нужному соотношению, следует 6 предприятий этого типа отвести под изделия № 1 и 3 под изделия № 2. Приходим к плану, который приведен в табл. 4, — оптимальному плану, плану, дающему наибольший выпуск продукции.

Этот план дает заметно большее (на 25–30%) количество продукции, чем те планы, которые приведены в табл. 2 и 3.

**Объективно обусловленные оценки.** Заслуживает внимания сам метод, с помощью которого мы пришли к оптимальному плану. Поставим вопрос о затратах, связанных с работой по изготовлению изделий № 1 и № 2[\*]. Очевидно, при этом надо учитывать относительную трудоемкость обоих изделий. [В рассматриваемых условиях она на каждом предприятии обратно пропорциональна его производственной мощности по этому изделию<sup>+</sup>. Для разного типа предприятий эта величина имеет различные значения.]<sup>2)</sup>

На предприятии типа *A* за время, затрачиваемое на одно изделие № 1, можно изготовить 0,15 ед. изделия № 2, т. е. для этого предприятия оно в 6,7 раза более трудоемко, чем изделие № 1. Таким же образом оно в 2 раза более трудоемко

\*[Важно обратить внимание на то, что если, как в данном примере, производство изделий взаимосвязано (хотя бы косвенно), то вопрос о необходимых затратах по изготовлению каждого изделия может анализироваться только одновременно и совместно для всех изделий. Перемещая производство некоторого изделия на другое предприятие и уменьшая затраты на него, мы можем при этом изменить затраты и на другое изделие.]

<sup>+</sup>В сделанных при постановке данной задачи предположениях эти отношения отражают не только соотношение трудоемкости изготовления изделий, но и всех затрат на изготовление.

<sup>2)</sup>{Очевидно, при этом надо учитывать относительную трудоемкость изготовления обоих изделий. Но эта трудоемкость может быть оценена различным образом.}

для предприятия типа *B*, в 8 раз — для *B*, в 4 раза — для *G*, в 2,4 раза — для *D* (см. табл. 1). Какую же цифру следует принять за относительную трудоемкость, рассматривая весь комплекс предприятий? Нужно учесть, что на предприятиях типа *A* мы изделие № 2 фактически не производим (по плану табл. 4), наоборот, на предприятии типа *D* не производится изделие № 1. Единственное из указанных отношений, которое реализуется фактически в оптимальном плане, это 4 — для предприятий типа *G*<sup>3)</sup>.

[Поэтому естественно остановиться на указанном соотношении и для всего комплекса предприятий. Действительно, стоимостные соотношения для различных видов продукции должны определяться необходимыми затратами на их производство, т. е. в конечном счете — затратами труда. Поскольку построенный план оптимален в данных условиях, затраты, производимые в нем, можно считать необходимыми. Возможность непосредственного сопоставления затрат на изготовление изделий № 1 и № 2 на предприятиях типа *G* (и только на них, поскольку именно здесь производятся оба изделия одновременно) позволяет установить соотношение затрат на эти изделия и соответственно соотношение оценок для них в данных условиях. Определенные таким образом оценки продукции будем называть объективно обусловленными оценками (сокращенно — о. о. оценками). В данном случае мы установили только отношение этих оценок 4 : 1, так что если, например, оценка изделия № 1 равна *a*, то для изделия № 2 она равна *4a*. Важно отметить, что это отношение было выбрано не случайно, оно объективно определяется данными условиями и выявлено в процессе анализа оптимального плана.

Впоследствии (глава II), когда мы рассмотрим вопрос о нахождении абсолютных значений объективно обусловленных оценок, будет установлено, что о. о. оценка определяется размером полностью учтенных необходимых затрат на производство продукции в данных условиях.

Нам представляется оправданным применение в данных обстоятельствах термина «оценка», а не «стоимость» или «цена», так как построенные оценки имеют в какой-то мере ограниченный, локальный характер, ибо анализ затрат и построение плана мы производим не для народного хозяйства в целом, а лишь в пределах рассматриваемого комплекса предприятий. Поэтому такой анализ не является достаточно полным для установления стоимостных соотношений. Следует подчеркнуть, что мы устанавливаем здесь оценку не для изделий, а только для работ по их изготовлению, и применение термина «цена» в подобных условиях не является общепринятым. По этой же причине мы считаем более уместным в данном случае термин «необходимые затраты» труда на продукцию, а не «общественно необходимые», так как анализ затрат здесь производится не для общества в целом, а только в пределах данного комплекса предприятий в определенных условиях. При рассмотрении народного хозяйства в целом не было бы надобности во введении такого специального термина.

---

<sup>3)</sup>{, т. е. реальная оценка трудоемкости изготовления изделия № 2 по сравнению с изделием № 1 есть 4. Остановимся на этом соотношении оценок работы по изготовлению изделий № 1 и № 2, т. е. примем оценку работы по изготовлению изделия № 1 равной *a*, оценку же работы для изделий № 2 — *4a*. О том, чему следует принять равной оценку самих изделий, мы здесь не говорим (об этом речь идет дальше), и пока это не играет роли — нам важно только соотношение оценок.}

Таблица 5

**Объем чистой продукции предприятий за месяц  
при оценках изделий, равных  $a$  и  $4a$**

Тип предприятия	Поставлено на производство	
	изделие № 1	изделие № 2
<i>A</i>	<b>100 000 <math>a</math></b>	60 000 $a$
<i>B</i>	400 000 $a$	<b>800 000 <math>a</math></b>
<i>B</i>	<b>20 000 <math>a</math></b>	10 000 $a$
<i>Г</i>	<b>200 000 <math>a</math></b>	<b>200 000 <math>a</math></b>
<i>Д</i>	600 000 $a$	<b>1 000 000 <math>a</math></b>

Будем исходить из найденного соотношения — примем оценку изделия № 1 равной  $a$ , изделия № 2 равной  $4a$ . Точнее говоря, эти цифры отражают оценки не самих изделий, а оценку чистой продукции, т. е. работы по изготовлению данных изделий[\*]. Попытаемся исчислить в этих оценках месячную продукцию предприятия каждого типа при поставке на нем производства того или другого изделия. Результаты приведены в табл. 5, причем цифры, соответствующие способу, принятому в оптимальном плане, выделены.

Как мы видим, в оптимальном плане каждое предприятие использовано таким образом, что объем произведенной им чистой продукции является наибольшим. Можно сказать, что при решении вопроса об использовании предприятий и распределении программы мы следуем, если исходить из указанных оценок, принципу наибольшей рентабельности [— получению максимальной по ценности (чистой) продукции при данных затратах, что означает здесь и получение максимальной прибыли. Это соответствует и минимуму затрат на единицу произведенной продукции].

Результаты, к которым мы пришли при рассмотрении этого примера, остаются верными и могут быть установлены и для других подобных случаев, в частности, при любом числе предприятий и видов изделий. Таким образом, можно сделать следующие выводы.

**Вывод 1\*\*.** Среди всех возможных способов распределения программы всегда имеется наилучший — оптимальный план. При таком способе соотношение отдельных видов продукции отвечает условию, данному в задании, а общий выпуск продукции больше (не меньше), чем для всякого другого плана, выдерживающего то же соотношение. Себестоимость же продукции меньше (не больше), чем при любом другом плане распределения.

\*[Под чистой продукцией мы понимаем продукцию, созданную на данном предприятии, т. е. из всей стоимости произведенной продукции исключается стоимость материальных элементов, потребленных предприятием (перенесенная стоимость). Иначе говоря, в продукцию мы включаем не само изделие, а его изготовление. Например, чистой продукцией швейной фабрики является не пальто, а «пошив пальто» (в стоимостном выражении это ближе к тому, что принято называть условно-чистой продукцией).]

\*\*Все выводы, которые мы делаем здесь и ниже, предполагают, конечно, что соблюдены те условия, о которых шла речь в постановке задачи.

Вывод 2. С оптимальным планом связаны определенные оценки каждого вида продукции, точнее, оценки работы по изготовлению одного изделия каждого вида — объективно обусловленные оценки (сокращенно — о. о. оценки).

Эти оценки таковы, что если исходить из них, то оказывается, что в оптимальном плане соблюден принцип рентабельности, т. е. в нем каждое предприятие производит тот вид изделий, который обеспечивает ему наибольшую величину чистой продукции.

[Принцип рентабельности, как он здесь изложен, применяется в несколько более широком понимании по сравнению с общепринятым. Необходимо разъяснить такое понимание принципа рентабельности, а также его значение и роль, которая ему здесь принадлежит.

Под принципом рентабельности или, лучше сказать, наибольшей рентабельности мы разумеем выбор экономического, хозяйственного, планового решения на основе эффекта, выраженного одним показателем в стоимостной форме: выбор технологии, отвечающей наименьшей себестоимости; программы, обеспечивающей при данных затратах максимальный объем продукции в ценностном выражении или максимальное накопление; выбор наиболее дешевого сырья и материалов и т. д.

Выводы, к которым приводит принцип рентабельности, существенным образом зависят от исходной системы оценок.

Этот принцип господствует в условиях капитализма, где он опирается на действующую систему рыночных цен. В СССР он имеет ограниченное применение даже при расчете по государственным отпускным ценам, ибо иногда по различным причинам приходится отказываться от этого принципа. Решающими в подобных вопросах являются не те или иные показатели *данного участка*, а интересы *народного хозяйства в целом* и учет эффекта для него.

В социалистическом обществе большая рентабельность должна являться не самоцелью (как при капитализме), а средством достижения наилучшего результата или минимальных затрат для всего общества. В связи с этим предлагаемый порядок применения этого принципа — на основе системы о. о. оценок, построенных в соответствии с конкретной обстановкой и поставленными задачами, — подчиняет данный принцип требованию наилучшего выполнения задач общего плана.

Отметим диалектический характер произведенного анализа. После первоначального отказа от того, чтобы руководствоваться рентабельностью, задача построения оптимального плана вновь привела нас к выводу о необходимости (для достижения общего оптимума) применения этого принципа на каждом участке, но при условии, что стоимостные показатели исчисляются на основе о. о. оценок, построенных в соответствии с данной обстановкой и задачами[\*].

Рассматриваемый в этом параграфе вопрос о правильном распределении программы между предприятиями имеет большое практическое значение: как показывает опыт, затраты на аналогичное изделие на одном предприятии часто бывают в 2–3 раза выше, чем на другом, даже при одинаковой их технической оснащен-

---

\* [Сделанный вывод о необходимости применения о. о. оценок относится к рассматриваемым частным экономическим вопросам. Некоторые соображения о значении полученных выводов для народного хозяйства в целом и особенно для ценообразования приведены в § 8 главы II.]

Таблица 6

**Объем товарной продукции предприятий в рублях за месяц  
при ценах изделий 20 руб. и 35 руб.**

Тип предприятия	Производство изделий № 1		Производство изделий № 2	
	Число изделий	Товарная продукция	Число изделий	Товарная продукция
<i>А</i>	100 000	2 000 000	15 000	525 000
<i>Б</i>	400 000	8 000 000	200 000	7 000 000
<i>В</i>	20 000	400 000	2000	70 000
<i>Г</i>	200 000	4 000 000	50 000	1 750 000
<i>Д</i>	600 000	12 000 000	250 000	8 750 000

ности. Кроме недостатков в организации производства, это, несомненно, вызвано неприспособленностью предприятий к производству определенных изделий и игнорирование этого обстоятельства при распределении программы.]

**Использование иных («априорных») оценок.** [Объективно обусловленные оценки носят имманентный, внутренний характер, они полностью определяются условиями рассматриваемой задачи.

Наряду с ними существуют другие оценки продукции, построенные независимо от данной задачи распределения программы, которые по отношению к ней могут быть поэтому названы априорными, внешними. В частности, в качестве такого рода оценок можно рассматривать действующие цены или себестоимость данных изделий.] Возникает естественный вопрос: так ли необходимы объективно обусловленные оценки, и нельзя ли было воспользоваться не ими, а какими-либо имеющимися оценками? Покажем, что это не всегда приводит к удовлетворительным результатам.

Предположим, что отпускные цены для изделий № 1 и № 2 были установлены ранее на основе условий производства предприятий типа *Б*. Ясно, что себестоимость работы по изготовлению изделия № 2 на предприятии этого типа вдвое выше, чем для изделия № 1, например 20 руб. и 10 руб. А полная себестоимость, если учесть еще материалы, будет  $20 + 15 = 35$  руб. для изделия № 2 и  $10 + 10 = 20$  руб. для изделия № 1.

Попытаемся построить план, исходя из этих цен.

Подсчитав продукцию предприятий каждого типа в случае постановки на производство того или другого изделия (табл. 6), убеждаемся, что для всех предприятий большая продукция получается при производстве изделия № 1, т. е. для предприятий всех типов включение в программу изделия № 1 «выгоднее», чем изделия № 2. Если бы мы здесь последовали принципу рентабельности, то на всех предприятиях надо было бы поставить производство изделия № 1. Но тогда мы вовсе не имели бы нужных изделий № 2, т. е. было бы не выполнено задание по ассортименту. Это заставляет отказываться от рентабельности и ставить на производство изделия № 2, хотя это и невыгодно для предприятий. При этом определенный вывод о том, на каких именно предприятиях следует поставить на производство изделия № 2, сделать трудно. Поскольку изделия № 2 все же нужны, хотя и невыгодны для

предприятий всех типов, задание по производству изделия № 2 разверстывается между предприятиями разных типов. Таким образом и получается тот или иной случайный план вроде того, что приведен в табл. 2.

[Отметим, что к таким же неудовлетворительным результатам могут привести и оценки, построенные на основе средней себестоимости на всех предприятиях, где производится данная продукция, даже если при их исчислении исходить из оптимального плана (ср. главу II, § 6, стр. 190–192).]

Итак, при использовании каких-либо априорных оценок, отличных от о. о. оценок, не удастся одновременно следовать принципу рентабельности и удовлетворить ассортиментному условию (в то время как для о. о. оценок получалась полная гармония). Нахождению оптимального плана эти априорные оценки также не способствуют, а скорее дезориентируют. Например, кажется вполне оправданным, если этот вопрос рассматривается изолированно, поставить на предприятии типа *Б* производство изделия № 1, и предприятие *Б*, стремясь увеличить объем товарной продукции, будет этого добиваться. Между тем, если так будет сделано, план окажется далеко не оптимальным.

*Вывод 3. Исходя из каких-либо (априорных) оценок, отличных от объективно обусловленных, обычно не удастся одновременно следовать принципу рентабельности и обеспечить выпуск нужной продукции (удовлетворить ассортиментному заданию). Применение принципа рентабельности при таких оценках может неправильно ориентировать в выборе плановых решений.*

Выше мы видели, что к оптимальному плану приводит сопоставление оценок произведенного объема работ, если при этом использованы о. о. оценки. Важно подчеркнуть, что для правильной ориентации при распределении программы существенными были оба обстоятельства: чтобы сопоставление велось по оценке объема выполненных работ, т. е. по произведенной чистой продукции, и чтобы для отдельных работ были использованы правильные их оценки. При нарушении какого-либо из этих условий, — если бы мы пользовались правильными оценками продукции, но сопоставление производили бы не по чистой, а по товарной продукции или, производя сопоставление чистой продукции, пользовались бы неправильными оценками для отдельных видов продукции, — в обоих случаях мы были бы дезориентированы в вопросах построения оптимального плана.

Следует сказать, что при практическом решении вопроса об определении производственной программы часто пользуются ценами, установленными несколько лет назад при других условиях. При этом оказывается, что некоторые изделия «выгодны» для предприятий — позволяют легко выполнить план по валовой продукции, другие «невыгодны».<sup>{4}</sup> [Резкие различия в рентабельности вызывают у хозяйственников стремление к перевыполнению производственных заданий по рентабельной продукции в ущерб производству важных для народного хозяйства, но нерентабельных для предприятия изделий. Известно, например, что в связи с существовавшей нерентабельностью производства некоторых швейных изделий детского ассортимента план по их выпуску часто не выполнялся[\*].]

<sup>4)</sup> {Первые, «выгодные», предприятия стараются включить в план и задание по ним перевыполнить, а от вторых «отпихиваются».

\* [Выступление А. Н. Косыгина на XXI съезде КПСС (Стенографический отчет, т. I, с. 160).]

Искажение оценки эффективности работы увеличивается еще и тем, что она ведется по валовой или товарной, а не по чистой продукции. Все это далеко не способствует ни целесообразному распределению программы, ни заинтересованности предприятий в правильном (ассортиментном) выполнении ее[\*]. [При распределении программы или размещении данного заказа используют также непосредственное сопоставление затрат, добываясь минимума себестоимости. Этот путь также не гарантирует получения оптимального распределения. Действительно, оптимальное решение обеспечивает минимум суммарных затрат всего производственного комплекса на всю произведенную продукцию — именно то, в чем заинтересовано общество в целом! В то же время, если мы рассмотрим затраты на каждый отдельный продукт, то найденное (оптимальное) размещение его производства, вообще говоря, не гарантирует общего минимума затрат. Поэтому анализ затрат на один изолированно взятый продукт часто не приводит к оптимальному решению. Для правильного решения необходим одновременный анализ распределения всей программы во всем комплексе с учетом задач и интересов всего социалистического общества, и именно на основе этого анализа должны устанавливаться показатели, по которым производится сопоставление. Тогда оценка частных решений, согласно этим показателям, обеспечивает выбор решений в соответствии с общими интересами (всего комплекса). Это и дает то гармоничное сочетание общих и местных интересов, которое достижимо только при социализме]\*\*].

Эти принципы постоянно реализуются и используются в практике социалистического строительства. Метод построения оптимального плана и о. о. оценок дает средство для более точного и систематического нахождения необходимых показателей и тем самым более полного использования возможностей и преимуществ социалистической системы хозяйства.]

Критерий оптимальности плана. Рассмотрим теперь вопрос о том, как установить, что данный план является оптимальным.

Непосредственное сравнение со всеми другими планами, как правило, неосуществимо, так как число возможных планов может быть огромным. Приведем удобный метод для этой цели, воспользовавшись вышеприведенным примером. О том, что план, приведенный в табл. 4, является оптимальным, мы знали уже при его нахождении; однако, если бы это и не было известно заранее, мы могли бы в этом убедиться, опираясь на две его особенности. Во-первых, для этого плана соблюдено заданное соотношение по видам продукции (ассортиментное задание), во-вторых, для него соблюден принцип рентабельности (табл. 5) при некоторых оценках продукции ( $a$  и  $4a$ ).

\*[Эти соображения подтверждают правильность имевших место выступлений печати в пользу замены валовой и товарной продукции на чистую при характеристике объема работ, выполненных предприятием за данный период, т. е. учета только вновь созданной стоимости (без перенесенной). Это мероприятие, конечно, целесообразно, но при одновременном совершенствовании системы оценок отдельных видов продукции.]

\*\*[Здесь мы имеем характерный пример возможного возникновения противоречий при планировании в нашем хозяйстве (между частными интересами — улучшения условий производства одного продукта — и общими интересами — выполнения всей программы). Как все такие противоречия, оно не носит в условиях социализма антагонистического характера. Это противоречие разрешается тем, что показатели, на основе которых производится сопоставление частных решений, должны устанавливаться, исходя из задач и интересов общества в целом.]



На основании именно этих двух признаков мы можем утверждать, что план оптимален. Предположим противное. Пусть имеется некоторый другой план распределения программы, при котором также соблюдено нужное соотношение, но общий выпуск продукции еще больше. В таком случае в этом «гипотетическом» плане намечен больший выпуск каждого изделия как № 1, так и № 2, чем для плана, приведенного в табл. 4. Тогда, какие бы оценки ни принять для каждого изделия, суммарная оценка чистой продукции для этого гипотетического плана будет выше, чем для плана табл. 4. В частности, так должно получиться, если воспользоваться оценками  $a$  и  $4a$ . Но общая оценка всей продукции складывается из оценок продукции отдельных предприятий; поэтому, по крайней мере, для одного предприятия при гипотетическом плане объем продукции (по оценкам  $a$  и  $4a$ ) был бы выше, чем в плане, данном в табл. 4. Однако это невозможно, ибо, как показывает табл. 5, при ином использовании любого предприятия, чем это сделано в табл. 4, его продукция не сможет получить более высокой оценки, поскольку в плане (табл. 4) каждое предприятие использовано так, что оценка произведенной продукции является наибольшей. Приведенное рассуждение доказывает, что план, дающего больше продукции, быть не может, а потому план, данный в табл. 4, оптимален. Рассуждение, которое нами проведено сейчас, является общим[\*], а потому мы приходим к выводу 4, существенно дополняющему вывод 2.

**Вывод 4.** Если для некоторого плана: а) соблюдено поставленное заданием ассортиментное соотношение (по видам продукции); б) при некоторых оценках изделий соблюден принцип рентабельности, то тогда, во-первых, данный план оптимален, т. е. не может быть плана, при котором выполнен ассортимент, а объем продукции больше, и даже вообще такого плана, который бы давал больше продукции каждого вида, чем данный план, и, во-вторых, указанные оценки являются объективно обусловленными оценками.

Из приведенного утверждения следует, что для неоптимального плана с выполненным ассортиментным соотношением не может быть оценок, при которых соблюдается принцип рентабельности (если бы такие оценки нашлись, план был бы оптимальным). Что получится, если все же попытаться искать такие оценки для плана, который не является оптимальным? Попытаемся, например, сделать это для плана, приведенного в табл. 3. Пусть эти оценки будут  $m$  для единицы изделия № 1 и  $n$  — для № 2. Так как одно из предприятий типа  $D$  используется для производства изделия № 1, а другое — для производства изделия № 2, то если бы принцип рентабельности соблюдался, оба изделия должны были бы быть равно рентабельными, иначе говоря, оценка чистой продукции в обоих случаях должна была бы быть одинаковой, т. е.  $600\,000m = 250\,000n$ , откуда  $n = 2,4m$ .

Попробуем теперь проверить, будет ли соблюдено условие рентабельности для предприятия типа  $B$ . Получаем, что оценка продукции для используемого способа (при производстве изделия № 2) равна  $2500n$ , или  $6000m$ , так как  $n = 2,4m$ ; для неиспользуемого способа (производство изделия № 1)  $20\,000m$ , т. е. принцип рентабельности явно нарушен, ибо  $2500n = 6000m < 20\,000m$ . Также непосредственно ясно, как можно построить план, дающий больше обоих изделий. В самом деле,

---

\*[Математическая форма этого рассуждения дана в Приложении I.]

Таблица 7

## Улучшенный план (по сравнению с планом табл. 3)

Тип предприятия	Изделия № 1		Изделия № 2	
	Число предприятий	Общий выпуск	Число предприятий	Общий выпуск
<i>А</i>	—	—	5	75 000
<i>Б</i>	3	1 200 000	—	—
<i>В</i>	40	800 000	—	—
<i>Г</i>	—	—	9	450 000
<i>Д</i>	—	—	2	500 000
<b>Всего</b>		<b>2 000 000</b>		<b>1 025 000</b>

переводя предприятия типа *Д* с изделия № 1 на № 2, мы на каждую добавочную единицу изделия № 2 теряем 2,4 ед. изделия № 1, но зато, переводя предприятия типа *В* с изделия № 2 на изделие № 1, вместо каждой единицы изделия № 2 мы выигрываем 8 ед. изделия № 1. Очевидно, совмещая два таких изменения, мы и получим план, дающий больший выпуск и того и другого изделия. Такой улучшенный план приведен в табл. 7. Как видим, в нем объем продукции по каждому изделию на 11–17% больше, чем в прежнем плане.

Таким образом, попытка разыскания оценок для неоптимального плана не удалась — при их нахождении мы встретились с противоречивыми требованиями. Обнаружив невозможность нахождения оценок, мы одновременно установили, каким перемещением программы может быть построен план, дающий больше каждого из изделий, и тем самым обнаружили, точнее в данном случае, подтвердили, что план не оптимален. Таким образом, получаем:

*Вывод 5. Если для некоторого плана оказывается невозможным найти оценки, при которых соблюден принцип рентабельности (для этих оценок получаются противоречивые условия), то это показывает, что данный план не оптимален, т. е. имеется план, при котором объем продукции по каждому виду изделий больше, чем для данного плана. При этом произведенный анализ указывает возможный путь улучшения плана.*

Итак, оказывается, что рассмотрение оценок дает весьма простой критерий оптимальности данного плана. Именно, сопоставляя выводы 4 и 5, получаем:

**ПРАВИЛО.** Для решения вопроса о том, является ли данный план оптимальным, нужно попытаться найти такие оценки продукции, чтобы по этим оценкам было выполнено условие рентабельности для данного плана. Тогда: а) если такие оценки найдутся, то план оптимален — никакой другой план, выдерживающий тот же ассортимент, не даст большего объема продукции, б) если найти такие оценки невозможно (для них получатся противоречивые условия), то план не оптимален — имеется план, дающий больший выпуск каждого изделия.

**Методы нахождения оптимального плана и о. о. оценок[\*].** В случае двух видов изделий для нахождения оптимального плана достаточно того простого и удобного метода, которым мы воспользовались выше. Однако в случае большего числа видов продукции, а также для задач, с которыми мы встретимся в дальнейшем, подобного метода не имеется. Здесь приходится пользоваться некоторыми специальными приемами, основанными на связи между оптимальным планом и соответствующими ему о. о. оценками. Хотя эти расчетные приемы сравнительно просты и не требуют ничего, кроме арифметических операций, все же они отличаются известным своеобразием, что заставляет специально остановиться на них. Это тем более полезно, что ознакомление с расчетом позволит глубже вникнуть в смысл понятия о. о. оценок. Поэтому, не затрагивая сложных случаев, мы изложим здесь основные способы расчетов.

Несмотря на то что для случая двух видов продукции, как было сказано, решение осуществимо прежним способом, мы предпочитаем предлагаемые способы расчета изложить предварительно для этого простейшего случая, используя тот же пример. Решение более сложного примера такого рода дано в § 2[\*\*].

1. **ВЫБОР ПОДХОДЯЩИХ ОЦЕНОК.** Как мы указывали выше, для каждого типа предприятия получается своя относительная оценка трудоемкости работы (затрат) по изготовлению изделия № 2 по сравнению с изделием № 1, именно (см. табл. 1): 6,7 — для *A*; 2 — для *B*; 8 — для *B*; 4 — для *Г*; 2,4 — для *Д*.

Какая из этих оценок является наиболее правильной?

Попробуем взять оценку 2,4. Сравнивая оценки продукции предприятий, найдем цифры, сведенные в табл. 8.

Из табл. 8 видим, что, следуя принципу рентабельности, мы должны на предприятиях типов *A*, *B*, *Г* поставить изделие № 1, на предприятиях типа *B* — изделия № 2, а на предприятиях типа *Д* по нашему желанию то или другое изделие, от чего и зависит, сколько мы получим изделий каждого вида. Но даже в наиболее благоприятном случае, поставив на обоих предприятиях типа *Д* производство изделий № 2, получим их 1,1 млн, а изделий № 1 — 3,1 млн шт., т. е. мы не сможем выполнить заданное ассортиментное соотношение[\*\*\*]. Поэтому оценку для изделия № 2 нужно увеличить. Беря оценку 4, получаем вместо таблицы 8 таблицу 5, а тогда, как мы видели, ассортиментное соотношение (2 : 1) выполнимо; приходим к оптимальному плану (табл. 4).

2. **ДРУГОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОЦЕНОК.** Разница по сравнению с предыдущим заключается в том, что мы подбираем оценку, исходя не из специально найденных чисел, а из любых.

Удобнее всего первое приближение для оценок найти так. Подсчитаем общую продукцию предприятий, если все они будут производить только изделия № 1 или только изделия № 2. Получим соответственно 5500 тыс. шт. и 1725 тыс. шт., т. е.

\*[Этот пункт (стр. 129–136) при первом чтении может быть пропущен.]

\*\*[Общее рассмотрение расчетных методов нахождения оптимального плана и о. о. оценок дано в Приложении II.]

\*\*\*[Таким образом, хотя получаемый план «рентабельный» — он построен по принципу рентабельности, исходя из некоторой системы оценок, — однако он не удовлетворяет ассортиментному соотношению, а потому не оптимален.]

Таблица 8

**Объемы чистой продукции предприятий и возможного  
выпуска изделий при использовании оценок 1,0 и 2,4**

Предприятия		Чистая продукция при производстве		Число изделий в рентабельном плане	
Тип	Число	изделий № 1	изделий № 2	№ 1	№ 2
<i>А</i>	5	<b>100 000</b>	36 000	500 000	—
<i>Б</i>	3	400 000	<b>480 000</b>	—	600 000
<i>В</i>	40	<b>20 000</b>	6000	800 000	—
<i>Г</i>	9	<b>200 000</b>	120 000	1 800 000	—
<i>Д</i>	2	<b>600 000</b>	<b>600 000</b>	(1 200 000)	(500 000)
Всего			Минимум Максимум	3 100 000 4 300 000	600 000 1 100 000

Таблица 9

**Объемы чистой продукции предприятий и возможного  
выпуска изделий при использовании оценок 1 и 3**

Предприятия		Чистая продукция при производстве		Число изделий в рентабельном плане	
Тип	Число	изделий № 1	изделий № 2	№ 1	№ 2
<i>А</i>	5	<b>100 000</b>	45 000	500 000	—
<i>Б</i>	3	<b>400 000</b>	<b>600 000</b>	(1 200 000)	(600 000)
<i>В</i>	40	<b>20 000</b>	7500	800 000	—
<i>Г</i>	9	<b>200 000</b>	<b>150 000</b>	(1 800 000)	(450 000)
<i>Д</i>	2	<b>600 000</b>	<b>750 000</b>	(1 200 000)	(500 000)

изделий № 1 примерно втрое больше. Это означает, что трудоемкость изготовления изделия № 2 в среднем примерно втрое больше, чем изделия № 1. Поэтому зададимся, например, оценками 1 и 3 и составим такую же таблицу, как и выше; при этом выделим не только цифры, отвечающие максимальной оценке, но и близкие к ним (табл. 9). В последних случаях в результате может оказаться выбранным как одно, так и другое изделие. Поэтому число изделий в этих случаях проставлено для обоих вариантов (соответствующие цифры заключены в скобки).

Теперь будем пытаться выполнить заданный ассортимент. Прежде всего под изделия № 2 следовало бы отвести те предприятия, для которых общая оценка продукции по этому изделию намного выше, чем по изделию № 1, но таких нет. Затем

те, для которых по изделию № 2 она выше, хотя бы и не намного — это предприятия типа *Б* и *Д*. Объем продукции по изделию № 2 на них составит 1,1 млн шт. — этого недостаточно (по изделию № 1 имеем 3,1 млн шт.). Поэтому нужно использовать частично и предприятия типа *Г*, для которых общая оценка продукции по изделию № 2, хотя и ниже, но близка к оценке продукции по изделию № 1. Таким образом и получим план, данный в табл. 4. Так как предприятия типа *Г* используются на производстве и того и другого изделия, то, сравнивая рентабельность, получаем оценки 1 и 4. При помощи этих оценок на основании вывода 5 устанавливаем, что план из табл. 4 оптимален.

3. Способ последовательного улучшения плана. Этот способ состоит в следующем. Исходим из некоторого плана, дающего примерное выполнение ассортимента. Как было описано выше, выясняем, является ли он оптимальным. Если оказывается, что план не оптимален, то одновременно обнаруживается, как его следует изменить, чтобы получить лучший план. [Именно, сопоставление оценок для используемых и неиспользуемых способов при проверке рентабельности плана, как мы видели, приводит к противоречивым неравенствам. Рассматривая два (или в общем случае несколько) из возможных способов выбора производимой продукции, сопоставление которых привело к противоречивым соотношениям для оценок, мы обнаруживаем возможность улучшения плана за счет включения какого-либо ранее неиспользованного в плане способа (и частичного или полного исключения некоторых из используемых) при обязательном сохранении заданного соотношения по составу продукции. Это изменение осуществляем в такой мере, пока либо применение исключаемого способа не будет сведено к нулю, либо наращиваемый способ не будет использован максимально.] В результате приходим к новому плану, дающему продукцию нужного состава в большем объеме, чем первоначальный. По отношению к этому плану вновь производим ту же проверку и, если он не оптимален, опять улучшаем его. Таким образом, в результате нескольких улучшений приходим к оптимальному плану и одновременно получаем о. о. оценки.

Покажем этот прием на том же примере, исходя из плана, приведенного в табл. 3. Одно улучшение мы уже сделали и пришли к плану из табл. 7. Проверяем, является ли он оптимальным. Пусть оценки для изделий № 1 и № 2 будут  $m$  и  $n$ . Так как на предприятиях типа *А* поставлено производство изделия № 2, оно должно быть рентабельно, т. е. должно быть:  $100\,000m \leq 15\,000n$ , или  $n \geq 6,7m$ .

Поскольку на предприятиях типа *Б* поставлено производство изделия № 1, то мы должны иметь  $400\,000m \geq 200\,000n$ , или  $n \leq 2m$ . Эти условия противоречивы: в первом случае одно изделие № 2 предпочитают 6,7 изделиям № 1, во втором — два изделия № 1 одному изделию № 2. Это показывает и путь улучшения плана. Нужно предприятия типа *А* перевести на изделие № 1, а зато, чтобы примерно сохранить ассортимент, одно предприятие типа *Б* перевести на изделие № 2. Соответствующий план дан в табл. 10.

Опять проверяем, является ли план оптимальным.

Так как предприятия типа *Б* используются в плане для изделий № 1 и № 2, то оба должны быть одинаково рентабельны:  $400\,000m = 200\,000n$ ;  $n = 2m$ , например,  $m = 1$ ;  $n = 2$ . Пользуясь этими оценками, проверяем условие рентабельности для прочих предприятий — оно нарушается для предприятий типа *Г*. Опять исправляем

Таблица 10

**План перевода предприятий на другие изделия  
при сохранении ассортимента**

Тип предприятия	Изделия № 1		Изделия № 2	
	Число предприятий	Общий выпуск	Число предприятий	Общий выпуск
<i>A</i>	5	500 000	—	—
<i>B</i>	2	800 000	1	1 200 000
<i>B</i>	40	800 000	—	—
<i>Г</i>	—	—	9	450 000
<i>Д</i>	—	—	2	500 000
Всего		2 100 000		1 150 000

план. {<sup>5)</sup>} [Переводя предприятие типа *B* на изделия № 2, увеличиваем число изделий № 2 на 200 тыс. и уменьшаем число изделий № 1 на 400 тыс., но, переводя три предприятия типа *Г* с изделий № 2 на изделие № 1, увеличиваем число этих изделий на 600 тыс. и уменьшаем число изделий № 2 на 150 тыс. В результате число изделий № 1 увеличится на 200 тыс. и № 2 на 50 тыс. с сохранением ассортиментного соотношения. Поскольку мы можем перевести не одно, а оба предприятия типа *B* на изделия № 2, а для компенсации изменить вид продукции на шести предприятиях типа *Г*, то получим вдвое больший эффект. В результате приходим к плану, данному в табл. 4.]

Так как предприятия типа *Г* используются и для одного и для другого изделий, оценки будут 1 и 4; убедившись, что и для остальных типов предприятий выбрано наиболее рентабельное по этим оценкам изделие, видим, что план оптимален. Процесс улучшения закончен.

4. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. Наряду с расчетными методами могут быть указаны и простые графические приемы для проверки оптимальности данного плана, а также для нахождения оптимального плана и о. о. оценок. Хотя эти приемы могут быть практически использованы только при двух, в крайнем случае, трех видах продукции, мы приводим их, так как графическое рассмотрение делает более наглядным смысл и свойства оценок.

Для выяснения оптимальности плана исходим из следующего. Вопрос о том, будет ли для данного предприятия более рентабельным выпуск изделия № 1 или № 2, зависит от оценок для этих изделий. Если принять оценку для изделия № 1 равной  $m = 1$ , то решение определится оценкой  $n$  для изделия № 2. Так, для предприятий типа *Д*, если  $100\,000m > 15\,000n$ , т. е. при  $n < 6,7$ , более рентабельным будет изделие № 1, при  $n > 6,7$  — изделие № 2. Также и для остальных типов предприятий. Таким образом, откладывая соответствующие числа на чертеже, можно указать области значений  $n$ , благоприятствующие изделию № 1 и изделию № 2. На

<sup>5)</sup> {Переводим предприятия *B* на изделия № 2 и, чтобы не нарушить ассортимент, переводим 6 предприятий *Г* на изделия № 1; в результате сразу приходим к плану, данному в табл. 4.}

рис. 1 эти области указаны для всех типов предприятий (слева от разделяющей точки области, благоприятствующей изделию № 1, справа — изделию № 2).

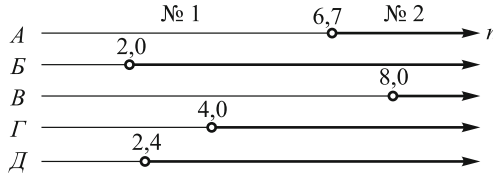


Рис. 1

Рассмотрим теперь некоторый план (например, план табл. 4). Выбор определенного изделия для предприятия данного типа означает, что  $n$  должно лежать в области, благоприятствующей этому изделию.

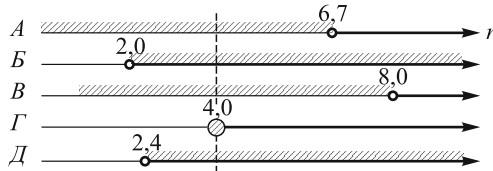


Рис. 2

Отметим штриховкой для каждого типа предприятий область значений  $n$ , соответствующую изделию, для выпуска которого используется предприятие этого типа в рассматриваемом плане (рис. 2)[\*].

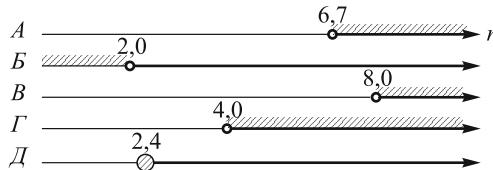


Рис. 3

Если данный план оптимален (и только в том случае), то должна существовать оценка, при которой все используемые способы производства продукции рентабельны. На рис. 2, отвечающем плану табл. 4, такая общая всем этим областям точка ( $n = 4$ ) имеется (соответствующая линия отмечена пунктиром); следовательно, план оптимален. На рис. 3, вычерченном в соответствии с планом табл. 3, такой линии провести нельзя — план не оптимален. Для нахождения оптимального плана можно применить следующее построение, в общем повторяющее тот расчет, по которому этот план был найден с самого начала (стр. 119).

\*[Например, для предприятий типа А, занятых на изготовлении изделий № 1, отмечена область слева от делящей точки, соответствующей  $n = 6,7$ . Для предприятий типа Г, используемых на изготовлении обоих видов изделий, отмечена лишь сама точка деления, так как указанное их использование рационально только при  $n = 4$ .]

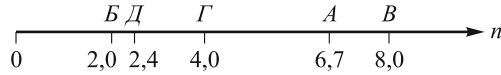


Рис. 4

Прежде всего (рис. 4) для каждого типа предприятий отмечаем границу «области влияния» изделия № 1 и изделия № 2 (границы, уже отмеченные на рис. 1). Сначала все предприятия ставим на изделие № 2, получаем, как легко рассчитать, 1725 тыс. этих изделий, изделий № 1 — 0. Соответствующую точку (I) отмечаем на рис. 5. Наиболее высокую относительную оценку изделий № 2 имеем (см. рис. 4) для предприятий *В*. Поэтому, если требуются изделия № 1, то на их производство нужно, прежде всего, перейти предприятиям *В*. Переводя их на изделия № 1, получаем новую точку (II); продолжая так, строим точки I, II, III, IV, V, VI. Координаты этих точек соответствуют объемам продукции, указанным в табл. 11.

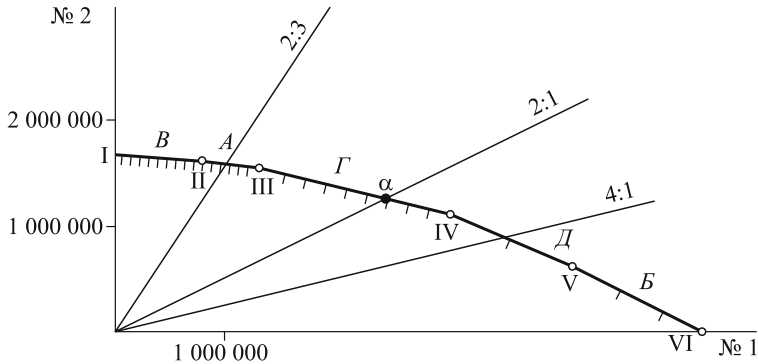


Рис. 5

Далее строим ломаную линию, соединяющую эти точки. Каждое звено ломаной разделим на равные части соответственно числу предприятий данного типа (за исключением первого звена, где одно деление соответствует четырем предприятиям типа *В*). Теперь, каково бы ни было ассортиментное соотношение для продукции, сразу можем найти оптимальный план. Так, для случая отношения, равного 2 : 1 (изделий № 1 вдвое больше), проводя соответствующую этому отношению прямую, в пересечении получаем точку  $\alpha$ , отвечающую оптимальному плану. На рис. 5 видно, что по изделиям № 1 выпуск составляет 2,5 млн шт., по изделиям № 2 — 1,25 млн. Изделия № 1 должны производиться на предприятиях типа *В*, *А* и на шести предприятиях типа *Г*, изделие № 2 — на прочих, т. е., как и следовало ожидать, получаем план табл. 4. Отметим, что наклон (абсолютная величина углового коэффициента) отрезка III–IV, равный  $1 : 4 = 0,25$ , дает отношение о. о. оценок изделий № 1 и № 2.

Линия I–II–III–IV–V–VI ограничивает вместе с осями некоторый многоугольник на плоскости. Это многоугольник возможных планов, так как объемы продукции по каждому плану, осуществимому в данных условиях (например, по приведенным в табл. 2 и 3), изображаются некоторой точкой этого многоугольника и,



Таблица 11

**Продукция при рациональном последовательном  
переводе предприятий на производство изделий № 1**

Точки	Изделия		Изделия в процентах к их общему числу	
	№ 1	№ 2	№ 1	№ 2
I	0	1 725 000	0	100
II	800 000	1 625 000	33	67
III	1 300 000	1 550 000	46	54
IV	3 100 000	1 100 000	74	26
V	4 300 000	600 000	88	12
VI	5 500 000	0	100	0

наоборот, каждая точка этой фигуры соответствует объемам продукции некоторого возможного плана.

То же графическое решение можно получить и иным путем, пользуясь не плоским чертежом, а линейным. Именно для тех же точек I–VI вместо абсолютных величин продукции по каждому изделию найдем его процентную долю (табл. 11).

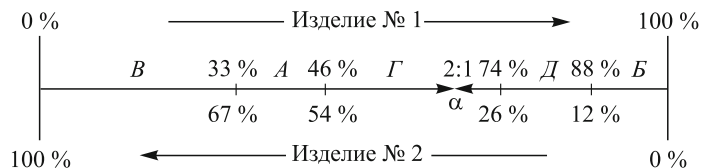


Рис. 6

Точки I–VI нанесем на рис. 6, исходя именно из найденной доли изделия № 1. Если теперь нам требуется определить оптимальный план для некоторого ассортиментного соотношения, например 2 : 1, то изображаем это отношение на чертеже (67% и 33% — точка  $\alpha$ ) и сразу видим, что в оптимальном плане для изделия № 1 должны быть использованы предприятия типа B, A, и частично Г (на рис. 6, слева от точки  $\alpha$ ), т. е. план табл. 4.

### Особенности о. о. оценок.

**Конкретность о. о. оценок.** Укажем некоторые важные свойства о. о. оценок, на которых основаны их применения и которые выявляют их смысл и значение. Прежде всего о. о. оценки конкретны — они определяются конкретной обстановкой и находятся в зависимости от всех условий задачи: заданного ассортимента по продукции, числа предприятий каждого типа, плановой производственной мощности по каждому изделию. Изменение любого из этих условий может повлечь изменение о. о. оценок. Проследим, например, за изменением о. о. оценок в зависимости от изменения ассортиментного условия.

Рассмотрим тот же пример, но при условии, что изделий № 2 требуется в полтора раза больше, чем изделий № 1, т. е. задается отношение 2 : 3 вместо 2 : 1. В этом случае, рассуждая как выше, видим, что для получения оптимального плана нужно на производство изделий № 2 перевести остальные предприятия типа *Г*, но и этого оказывается недостаточно, нужно еще добавить два предприятия типа *Д*. Тогда изделий № 1 будет 1100 тыс. шт., изделий № 2 — 1580 тыс. шт., т. е. нужное соотношение 2 : 3 практически выполнено (см. также рис. 5)<sup>+</sup>.

Далее, так как в данном случае предприятия типа *А* используются для изготовления как изделия № 1, так и № 2, то о. о. оценка определяется из условий равной рентабельности для предприятий этого типа по обоим изделиям и оказывается равной  $n = 6,7$  (считаем  $m = 1$ ), т. е. она уже определяется соотношением затрат на предприятиях типа *А*. Как видим, о. о. оценка возросла. Это естественно — при увеличении потребности в изделии № 2 пришлось для его изготовления использовать и предприятия, менее приспособленные для него, те, где его изготовление сравнительно труднее (в сопоставлении с изделием № 1); следовательно, относительные затраты на него возросли.

Пусть теперь задано ассортиментное соотношение 4 : 1, т. е. потребность в изделиях № 2 уменьшилась. В этом случае нужно все предприятия типа *Г* перевести на изделие № 1, а, кроме того, одно из предприятий типа *Д*. В полученном плане (оптимальном при данном соотношении) выпуск по изделию № 1 составит 3700 тыс. шт., по изделию № 2 — 850 тыс. шт. О. о. оценка определится из условий равной рентабельности (по обоим изделиям) предприятий типа *Д* и станет равной  $n = 2,4$  ( $m = 1$ ). Уменьшение о. о. оценки опять естественно, так как мы сохранили производство изделий № 2 только на предприятиях, наиболее приспособленных для него, где относительная трудоемкость его изготовления ниже. Полученные результаты можно сформулировать так:

*Вывод 6. Объективно обусловленные оценки конкретны и динамичны, они определяются всеми условиями: ассортиментным заданием по продукции, числом предприятий каждого типа, плановой производственной мощностью и изменяются при изменении этих условий. В частности, при изменении ассортиментного задания увеличение потребности в некотором виде изделия связано с относительным повышением затрат, и потому и с повышением о. о. оценки для него; уменьшение потребности — с понижением о. о. оценки[\*].*

Нужно отметить, что указанное положение фактически неоднократно учитывалось в различных экономических мероприятиях партии и правительства. Так, в 1936 г. в связи с поставленной задачей дальнейшего развития легкой промышленности потребовалось расширить посевы хлопка. Для этого заготовительная цена на хлопок была резко повышена, и на многих участках, которые раньше отводились

<sup>+</sup>Чтобы удовлетворить этому соотношению более точно, второе предприятие типа *А* нужно не полностью перевести на изделие № 1, а часть времени использовать для производства изделия № 1.

\*[Следует специально указать, что эти последние положения, справедливые в условиях рассматриваемой схематизированной задачи, в реальных условиях в силу ряда неучтенных обстоятельств не всегда применимы.]

под зерновые, стало более выгодным выращивать хлопок. Это благоприятствовало увеличению площадей под данную культуру.

Можно привести и другие подобные примеры<sup>+</sup>. Следует сказать, однако, что такие изменения отдельными органами проводились далеко не во всех случаях, когда это было целесообразно, да и сама величина нужного изменения цены определялась в известной мере субъективно.

Устойчивость о. о. оценок. Попробуем произвести небольшое изменение в ассортиментном условии, например соотношение 2 : 1 заменим соотношением 4 : 3. В этом случае, как легко убедиться, оптимальный план получаем, переведя дополнительно три предприятия типа  $\Gamma$  (всего их будет шесть) на производство изделия № 2. Получим изделий № 1 — 1,9 млн шт., изделий № 2 — 1,4 млн шт. (соотношение выполнено почти точно). Так как опять оба изделия производятся на предприятиях типа  $\Gamma$ , то о. о. оценки остаются теми же самыми (1 и 4). Можно убедиться, что небольшие изменения других условий (числа предприятий, производственных мощностей) также не повлияют на значения о. о. оценок или изменят их незначительно. Нужно сказать, что если бы мы взяли более жизненный пример с большим числом типов предприятий или если бы соотношения производственных мощностей по изделиям различались и для предприятий одного типа, то число возможных значений для оценки  $n$  (считаем  $m = 1$ ) было бы не 5 (как выше: 8; 6,7; 4; 2,4; 2), а гораздо больше. В таком случае при небольших изменениях в условиях оценка могла бы измениться, но не намного, так как она бы заменилась на одно из возможных соседних значений. Таким образом, получаем важное свойство о. о. оценок, которое мы будем называть устойчивостью.

*Вывод 7. О. о. оценки обладают известной устойчивостью, т. е. при небольших изменениях условий задачи (ассортиментное соотношение, число предприятий, производственные мощности) соотношение о. о. оценок, как правило, остается неизменным либо меняется незначительно.*

Это свойство является чрезвычайно полезным особенно в следующих двух случаях. Во-первых, оно позволяет при нахождении оптимального плана и о. о. оценок сначала ограничиться только важнейшими и наиболее существенно представленными типами предприятий, дающими основную массу продукции, и, решая такую упрощенную задачу, определить значение о. о. оценок. После этого вопрос об использовании остальных предприятий можно решать на основе уже найденных оценок, так как из-за малости объема их продукции они существенно не повлияют на оценки. Таким образом, придем к оптимальному плану или лишь незначительно отличающемуся от него. Во-вторых, при оценке изменений, связанных с работой какого-либо отдельного предприятия (увеличение его мощности, временная остановка и т. п.), можно производить расчет, исходя из существующих значений о. о. оценок, не принимая во внимание тех изменений в них, которые могут произойти в результате учета перемен на этом предприятии.

---

<sup>+</sup>Такое же благоприятное действие оказало повышение заготовительных цен на некоторые сельскохозяйственные продукты согласно решениям январского (1965 г.) Пленума ЦК. Также весьма эффективным оказалось предусмотренное повышение цен на продукцию со знаком качества.

[Уместно в этой связи обратить внимание на то, что в постановлении Пленума ЦК КПСС в июле 1958 г. и в докладе товарища Н. С. Хрущева «Об отмене обязательных поставок и натуроплаты за работу МТС, о новом порядке, ценах и условиях заготовок сельскохозяйственных продуктов» подчеркивается важность построения научно обоснованной системы цен, отражающей динамику изменения производственных условий и затрат с обеспечением в то же время необходимой стабильности цен<sup>+</sup>.]

РЕАЛЬНОСТЬ о. о. ОЦЕНОК. В нашем примере соотношение оценок для работ по изготовлению изделий № 1 и № 2 было 1 : 4. Это соотношение является не фикцией, а может быть действительно реализовано, т. е. вместо четырех изделий № 1 может быть изготовлено одно изделие № 2 и наоборот. В самом деле, достаточно привести одно предприятие типа Г с изделия № 1 на № 2, и вместо 200 тыс. изделий № 1 мы изготовим 50 тыс. изделий № 2. Таким же образом при обратном переводе мы получим вместо изделий № 2 по тому же эквиваленту (1 : 4) соответствующее число изделий № 1\*. Каждое из этих изменений переведет наш оптимальный план в другой план, также оптимальный, но отвечающий несколько иному ассортиментному соотношению. Итак, имеем:

*Вывод 8. Соотношение о. о. оценок реально, т. е. по эквиваленту, определяемому этими оценками, изготовление некоторого количества единиц одной продукции может быть заменено изготовлением соответствующего количества единиц другой и обратно. Точнее, если для двух изделий отношение о. о. оценок для работ по их изготовлению есть  $m : n$ , то можно, вообще говоря, произвести такое изменение в плане, что количество первых изделий сократится на некоторое число  $pn$  штук, а количество вторых изделий увеличится на  $pm$  штук. При этих изменениях план остается оптимальным (для измененного ассортиментного условия).*

Это свойство о. о. оценок весьма удобно в том отношении, что делает ясным, какого характера изменения в плане возможны. Следует сказать, что обычные цены у нас далеко не всегда обладают этим свойством. Если по плану предусмотрено получение лесоматериалов на 1000 руб., то далеко не всегда удастся получить вместо них цемент на ту же сумму. [В частности, отражением такой нереальности цен является жесткая регламентация затрат по статьям — отсутствие возможности замены одних материалов и услуг другими по этим ценам.]

Однако дело не только в том, что отсутствует право на такую замену или она неосуществима из-за отсутствия необходимых материальных фондов, а в том, что по существу имеется определенная уверенность, что даже равные по стоимости продукты неэквивалентны по их народнохозяйственной значимости и подлинным размерам затрат, необходимым для их производства<sup>[\*\*]</sup>.

<sup>+</sup>Значение научно обоснованных цен подчеркивается и в решениях XXIV съезда Партии.

<sup>\*</sup>Такая реализуемость соотношений о. о. оценок лишний раз свидетельствует о том, что они правильно отражают соотношение затрат на изготовление изделий в данных условиях (в оптимальном плане).

<sup>\*\*</sup>[Неоспоримым свидетельством такого положения является сохраняющаяся длительное время плановая убыточность некоторых предприятий, в частности тяжелой промышленности. Видимо, имеются основания считать, что если предприятие, изготовляя на 1000 руб. черного или цветного металла, производит при этом затрат (других видов) на 1500 руб., то все же это оправданно.]

Такая невозможность реализации соотношения цен имеет следствием и то, что построенные на них расчеты нередко оказываются нереальными, а сделанные на их основании выводы — практически неверными или неосуществимыми.

### Применения о. о. оценок.

ИЗМЕНЕНИЯ В ПРОГРАММЕ. О. о. оценки, благодаря своим особенностям и связи с оптимальным планом, могут с успехом использоваться при решении различных вопросов планово-экономического характера.

Предположим, что прежняя программа (изделий № 1 — 2,5 млн шт., изделий № 2 — 1,25 млн шт.) изменена и дано новое задание: изделий № 1 — 3 млн шт., изделий № 2 — 1 млн шт.

Выполнима ли эта программа? Так как изменение небольшое, воспользуемся прежними оценками (1 и 4). Оценивая прежнее задание, получаем:

$$2\,500\,000 \times 1 + 1\,250\,000 \times 4 = 7\,500\,000.$$

Новое задание:

$$3\,000\,000 \times 1 + 1\,000\,000 \times 4 = 7\,000\,000.$$

Из расчета видим, что задание не только выполнимо, но может быть и перевыполнено на  $(7\,500\,000 - 7\,000\,000) : 7\,000\,000 \approx 7\%$ . В самом деле, переводя три предприятия типа Г с изделия № 2 на изделие № 1, получим 3,1 млн изделий № 1 и 1,1 млн изделий № 2, т. е. перевыполним поставленное задание.

Другой пример. Три предприятия типа А снимаются с производства данных изделий. Требуется оценить, как это отразится на выполнении программы при сохранении прежних условий, в частности, ассортиментного задания. Так как предприятия типа А в плане (табл. 4) были использованы на производстве изделия № 1, продукция трех выбывших предприятий оценивается так:  $3 \times 100\,000 \times 1 = 300\,000$ . При оценке общей продукции в 7 500 000 видим, что общий выпуск сокращается на 4%, т. е. число изделий № 1 должно сократиться на 100 000 (4% от 2 500 000), а число изделий № 2 на 50 000.

В действительности в результате выбытия трех предприятий типа А число изделий № 1 сократится на 300 тыс. Чтобы восстановить ассортимент, одно предприятие типа Г переводим с изделия № 2 на изделие № 1. Тогда получим план (опять оптимальный), в котором выпуск изделий № 1 будет 2,4 млн шт., изделий № 2 — 1,2 млн шт., т. е. выпуск снизится, в самом деле, на 4%.

*Вывод 9. О. о. оценки могут быть использованы для определения возможности выполнения программы при тех или иных (небольших) изменениях в плановом задании или производственных мощностях. Именно для решения вопроса нужно оценить измененное задание (или производственные мощности), пользуясь имеющимися значениями о. о. оценок, соответствующими оптимальному плану.*

СРАВНЕНИЕ СПОСОБОВ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА. О. о. оценки находят применение и в решении другого важного вопроса — о выборе одного из нескольких возможных способов организации производства, дающих различную продукцию. Рассмотрим несколько примеров.

1. К данной группе предприятий присоединяется новое предприятие типа *Е*. Если на нем производить изделия № 1, то оно выпустит их 450 тыс. шт., если изделия № 2, то 150 тыс. шт. Что предпочтительнее?

Сравним чистую продукцию для обоих вариантов по о. о. оценкам. Получаем  $450\,000 \times 1 = 450\,000$  и  $150\,000 \times 4 = 600\,000$ . Следовательно, на предприятии *Е* целесообразнее производить изделия № 2. Так как их прибавится 150 тыс. шт., то чтобы не нарушить ассортиментного соотношения, переводим одно предприятие типа *Г* с изделия № 2 на № 1. Тогда у нас получится:

$$2\,500\,000 + 200\,000 = 2\,700\,000 \text{ изделий № 1 и}$$

$$1\,250\,000 + 150\,000 - 50\,000 = 1\,350\,000 \text{ изделий № 2.}$$

Полученный план опять оптимален, так как в нем выполнено заданное соотношение (2 : 1) и соблюдается принцип рентабельности (при оценках 1 и 4).

2. На одном из предприятий типа *Д* предложен новый способ организации производства, при котором совмещается производство обоих изделий. Намеченный выпуск: 550 тыс. изделий № 1 и 150 тыс. изделий № 2. Целесообразно ли использовать этот способ?

Чистая продукция предприятия при прежнем его использовании (для производства изделий № 2) составляла:  $250\,000 \times 4 = 1\,000\,000$ ; при предлагаемом —  $550\,000 \times 1 + 150\,000 \times 4 = 1\,150\,000$ . Таким образом, сопоставление, основывающееся на о. о. оценках, показывает, что предлагаемый способ предпочтительнее. И действительно, используя его, нетрудно построить план, в котором выпуск продукции всей группы предприятий по обоим видам изделий будет больше, чем первоначальный.

3. Предлагается кооперирование предприятий *А* и *Б*, при котором общий их выпуск составит 250 тыс. изделий № 2. Целесообразно ли оно?

Оценивая продукцию, имеем:  
при прежнем использовании предприятий:

$$100\,000 \times 1 + 200\,000 \times 4 = 900\,000;$$

при предлагаемом:

$$250\,000 \times 4 = 1\,000\,000.$$

Кооперирование целесообразно. Правильность сделанного вывода подтверждает план, приведенный в табл. 12, где, благодаря кооперированию трех пар предприятий *А* и *Б*, мы получили увеличение общего выпуска продукции.

Любопытно посмотреть, что мы получим, если попытаемся решить те же вопросы, исходя из априорных оценок (или цен), отличных от объективно обусловленных. Воспользуемся, например, оценками 20 и 35. Тогда, оценивая в первом случае продукцию предприятия типа *Е* при производстве изделий № 1, получим:  $450\,000 \times 20 = 9\,000\,000$  руб., при производстве изделия № 2:  $150\,000 \times 35 = 5\,250\,000$  руб. Приходим к выводу, что нужно поставить на производство изделия № 1, в противоположность ответу, данному выше. Вывод, конечно, неправильный. Если мы последуем ему, получим заведомо не оптимальный план. Во втором примере при использовании априорных оценок случайно получается правильный вывод (тот же, что и по о. о. оценкам).

Таблица 12

## Кооперирование предприятий А и В

Тип предприятия	Число предприятий	Продукция	
		Изделия № 1	Изделия № 2
<i>А</i>	2	200 000	—
<i>А + В</i>	3 + 3	—	750 000
<i>В</i>	40	800 000	—
<i>Г</i>	8 ; 1	1 600 000	50 000
<i>Д</i>	2	—	500 000
<b>Всего</b>		2 600 000	1 300 000

В примере 3, сравнивая общую товарную продукцию предприятий *А* и *В*, фактическую и проектируемую, получим соответственно:

$$100\,000 \times 20 + 200\,000 \times 35 = 9\,000\,000 \text{ руб. и } 250\,000 \times 35 = 8\,750\,000 \text{ руб.,}$$

т. е. предлагаемый способ дает снижение выпуска продукции и должен быть отвергнут. Вывод, конечно, неправильный, ибо кооперирование позволяет превысить программное задание на 4%, что ясно из табл. 12. Неправильность выводов, к которым приводят априорные оценки, вызвана тем, что в отличие от о. о. оценок они не конкретны, не учитывают всей обстановки (например, резко возросшей потребности в данном изделии и т. п.)[\*].

[В ряде случаев не дает возможности прийти к правильным выводам в подобных вопросах также сопоставление себестоимости продукции на данном предприятии со средними ее значениями.]

**Вывод 10.** *О. о. оценки позволяют сравнивать два способа организации производства, дающие различную продукцию, в частности решать вопрос о том, целесообразно ли в данных условиях применение некоторого вновь предлагаемого производственного способа, дает ли его использование увеличение выпуска продукции.*

*Для такого сравнения нужно, пользуясь о. о. оценками, исчислить результативную (чистую) продукцию для обоих производственных способов и выбрать тот способ, для которого суммарная оценка продукции выше (принцип рентабельности). Решение подобных вопросов при помощи априорных оценок (или цен), отличных от объективно обусловленных, может привести к неверному заключению.*

[Этот вывод, конечно, не следует понимать так, что существующие методы экономического анализа нельзя применять в данных вопросах, а лишь в том смысле, что метод о. о. оценок позволяет при надлежащих условиях ближе подойти к оптимальному решению. Обычные методы дадут тем лучшие результаты, чем ближе используемые в них оценки (цена, себестоимость) приближаются к о. о. оценкам.

\*[Зависимость о. о. оценок от потребности в продукции, отражаемой ассортиментными требованиями, определяется тем, что ассортиментные условия влияют на объективно обусловливаемое распределение затрат между изделиями, производство которых взаимосвязано.]

При этом, поскольку в приложениях важны только относительные значения о. о. оценок (результат сравнения не изменится, если они будут пропорционально изменены), то априорные оценки приведут к правильным выводам, даже если они не совпадают с о. о. оценками, а только пропорциональны им.]

Отметим еще, что при помощи о. о. оценок может решаться вопрос о перераспределении программы. Предположим, что в двух различных группах предприятий программа распределена наилучшим образом между отдельными предприятиями. Тогда, если отношения о. о. оценок для обеих групп окажутся различными, например  $1 : 4$  и  $1 : 3$ , то это покажет, что целесообразно произвести перераспределение программы: часть задания по выпуску изделия № 2 передать с первой группы на вторую, а по изделию № 1 — наоборот, со второй на первую. В результате суммарный выпуск продукции по обеим группам возрастет по каждому изделию.

**Более сложные случаи.** Рассмотренный пример был особенно прост для решения, так как в нем речь шла о распределении программы только по двум изделиям. Следует сказать, что в более сложных задачах, когда речь идет о распределении программы по нескольким изделиям, тот способ, при помощи которого мы первоначально отыскивали оптимальный план, неприменим.

*Однако все выводы, касающиеся о. о. оценок, а также основанные на них методы нахождения оптимального плана, полностью сохраняют силу и для случая, когда имеется не два, а большее число изделий.*

Соответствующий пример с несколькими видами продукции дан в следующем параграфе, в задаче по существу того же характера, но несколько иначе формулируемой.

[Систематическое изложение расчетных методов нахождения оптимального плана дано в Приложении II.]

## § 2. Распределение и выбор средств для производства работ

**Постановка задачи.** Пользуясь тем же методом, мы рассмотрим сейчас вопрос об оптимальном распределении средств для выполнения совокупности работ. Для выявления существа дела мы опять-таки рассматриваем его в схематизированном виде.

Пусть необходимо одновременно выполнить некоторую совокупность работ (сельскохозяйственных, земляных, работ по транспортировке). По своему характеру и условиям эти работы могут быть разбиты по нескольким видам (для сельскохозяйственных работ: пахота, боронование, сев, уборка урожая; для земляных работ: планировка участка, рытье котлованов, рвов, кюветов; для транспорта — транспортировка разного типа грузов на различные расстояния и пр.). Для выполнения этих работ могут быть использованы различные средства (тракторы разных типов, комбайны, жнейки — для сельскохозяйственных работ; экскаваторы, грейдеры, скреперы, лопаты — для земляных работ; грузовые автомашины, самосвалы, транспортеры, узкоколейка, тачки — для транспорта).

Большинство средств и видов транспорта может быть использовано на нескольких видах работ; при этом имеются нормативные показатели их производительности



Таблица 13

## Нормы выработки и объемы работ

Машины		Нормы дневной выработки по видам работ		
Тип	Число	I	II	III
<i>A</i>	20	4	10	11
<i>B</i>	50	0,4	—	10
<i>B</i>	30	—	4	6
<i>Г</i>	100	0,4	2,5	2,5
Объемы работ		5000	10 000	10 000

сти на различных работах. Правда, для каждого вида работ какие-то средства являются более эффективными (дают меньшую себестоимость, относительно большую производительность и т. д.). Однако далеко не всегда именно эти средства имеются в нужном количестве. Во многих случаях, когда мы заинтересованы в ускорении работ и связаны определенным машинным парком, оказывается нужным полностью использовать все наличные средства, даже если они мало приспособлены для данной работы, и требуется, пользуясь именно ими, обеспечить выполнение данной совокупности работ в кратчайший срок. В таких условиях приходится отказываться от применения каждого средства исключительно на тех работах, для которых оно наиболее приспособлено.

Вопросом о наилучшем распределении средств в описанных условиях мы и займемся. Рассмотрим конкретный числовой пример с небольшим числом видов работ и средств (машин).

**ПРИМЕР.** Дневная норма выработки каждой машины (средства) по каждому виду работ, на которых она может быть применена, дана в табл. 13. Там же приведен объем работ (выраженный в единицах измерения, соответствующих данному виду работ: га, куб. м, тонно-километры).

Требуется указать оптимальное распределение имеющихся средств, т. е. такое, которое позволит выполнить всю совокупность работ в кратчайший срок.

Этот пример по существу не отличается от примера § 1, так как отдельные машины здесь играют роль предприятий, а объем работ каждого вида соответствует числу изделий.

**РЕШЕНИЕ.** Поскольку число работ больше двух, мы не можем найти оптимальный план первоначальным способом, а должны использовать способ, основанный на применении объективно обусловленных оценок. Воспользуемся вторым приемом (стр. 131 и ниже). Прежде всего нужно определить, хотя бы грубо, значения этих оценок. Для этого подсчитываем суммарную дневную выработку всех механизмов по каждому виду работ. Получаем:

$$\begin{array}{llll}
 \text{Для работы} & \text{I вида} & 20 \times 4 + 50 \times 0,4 + 100 \times 0,4 = 140. \\
 \gg & \gg & \text{II} & \gg \quad 20 \times 10 + 30 \times 4 + 100 \times 2,5 = 570. \\
 \gg & \gg & \text{III} & \gg \quad 20 \times 11 + 50 \times 10 + 30 \times 6 + 100 \times 2,5 = 1150.
 \end{array}$$

**Таблица 14**  
**Дневная выработка машины**  
**на каждой работе**  
**по оценкам 8, 2, 1**

Машины	Работы		
	I	II	III
<i>A</i>	<b>32</b>	20	11
<i>B</i>	<b>3,2</b>	—	<b>10</b>
<i>B</i>	—	<b>8</b>	<b>6</b>
<i>Г</i>	<b>3,2</b>	<b>5</b>	2,5

**Таблица 15**  
**Дневная выработка машины**  
**на каждой работе**  
**по оценкам 25, 4, 1**

Машины	Работы		
	I	II	III
<i>A</i>	<b>100</b>	40	11
<i>B</i>	<b>10</b>	—	<b>10</b>
<i>B</i>	—	<b>16</b>	6
<i>Г</i>	<b>10</b>	<b>10</b>	2,5

Так как трудоемкость работ обратно пропорциональна выработке, а суммарные выработки относятся примерно как 1 : 4 : 8, естественно в качестве грубых приближений для относительных оценок трудоемкости принять обратные отношения 1 : 1/4 : 1/8 или 8, 2, 1. Пользуясь этими условными оценками, исчислим дневную продукцию каждой машины по каждому виду работ (табл. 14). Исчислим также общий объем работ и суммарную мощность машин по этим оценкам.

Для общего объема работ получим:

$$5000 \times 8 + 10\,000 \times 2 + 10\,000 \times 1 = 70\,000 \text{ усл. ед.}$$

Поскольку дневная выработка машин на разных работах различна, подсчитываем ее грубо, полагая, что каждая машина используется наилучшим образом, т. е. выбираем наибольшее число в каждом ряду. Тогда для общей дневной выработки найдем  $20 \times 32 + 50 \times 10 + 30 \times 8 + 100 \times 5 = 1880$ .

Отсюда можем ориентировочно получить (заниженное против действительно необходимого) время выполнения всей совокупности работ:  $70\,000 : 1880 = 37$  дней.

Теперь определяем средства выполнения каждой работы. Для I работы прежде всего используем машину *A*, так как для машины *A* именно эта работа является наиболее подходящей (см. табл. 14). Однако общая выработка этих машин на данной работе за 37 дней составит только  $20 \times 37 \times 4 = 2960$ , тогда как нужно 5000. Следовательно, нужно привлечь еще машину, а именно машину *Г*, поскольку для нее оценка выработки на I работе сравнительно близка к максимальной ( $3,2 < 5$ ). Выработка машин *Г* на I работе составит:  $100 \times 37 \times 0,4 = 1480$ . Но и этого недостаточно, а потому придется на этой работе использовать частично и машины *B*. Для II работы наиболее подходящими являются машины *B* и *Г*, которых оказывается достаточно; для III работы — машины *B*, которых также хватает. Мы наметили, какие из машин мы предполагаем использовать в оптимальном плане для соответствующего вида работ (в табл. 14 соответствующие цифры выделены жирным шрифтом). Отсюда легко определить значение о. о. оценок.

Примем по-прежнему для I вида работ оценку  $m = 8$ . Так как мы наметили, что машины *Г* будут использоваться и для I и для II работ, то оценка II работы

Таблица 16

## Оптимальный план

Машины	Работы			Всего машин
	I	II	III	
<i>A</i> число	20	—	—	20
выработка	3520			
<i>B</i> число	27	—	23	50
выработка	475		10 120	
<i>B</i> число	—	30	—	30
выработка		5280		
<i>Г</i> число	57	43	—	100
выработка	1003	4720		
Вся выработка	4998	10 000	10 120	

$n$  должна быть такова, чтобы мы получили одинаковую оценку выработки (равную рентабельность) на обеих работах, т. е. (см. табл. 13) мы должны иметь  $0,4m = 2,5n$ ;  $0,4 \times 8 = 2,5n$ , или  $n = 1,28$ . Далее, поскольку мы намечаем машину *B* использовать на I и III работах, то оценку  $p$  работы III получим из условия  $0,4 \times 8 = 10 \times p$ ; отсюда  $p = 0,32$ .

Итак, для оценок работ получаем отношение  $8 : 1,28 : 0,32$  или  $25 : 4 : 1$ . Повторяем те же подсчеты, что и выше, исходя уже из этих оценок. Оценка выработки машин (в новых условных единицах) дана в табл. 15.

Оценка общего объема работ:

$$5000 \times 25 + 10\,000 \times 4 + 10\,000 \times 1 = 175\,000 \text{ усл. ед.},$$

а дневной выработки всех машин:

$$20 \times 100 + 50 \times 10 + 30 \times 16 + 100 \times 10 = 3980 \text{ усл. ед.}$$

Отсюда время выполнения работ определится в  $175\,000 : 3980 = 44$  дня.

Проверяем, действительно ли все работы смогут быть выполнены за это время. Удобнее начать с III работы. Она должна выполняться машиной *B*, для этого потребуется 1000 машино-дней, или  $1000 : 44 = 23$  машины. Остальные машины *B* должны быть направлены на I работу.

На II работе машины *B* за 44 дня выполнят  $30 \times 44 \times 4 = 5280$  единиц. Остальные 4720 должны быть выполнены машиной *Г*, на что нужно  $4720 : (44 \times 2,5) = 43$  машины. Остальные 57 машин *Г* должны быть направлены на I работу. Тогда на I работе 20 машин *A*, 27 машин *B* и 57 машин *Г* дадут:

$$44 \times (20 \times 4 + 27 \times 0,4 + 57 \times 0,4) = 4998,$$

т. е. действительно за 44 дня вся совокупность работ будет выполнена. Соответствующий план приведен в табл. 16. В том, что план оптимальный, а оценки объективно обусловленные, легко убедиться, проверив два обстоятельства: во-первых, выполнение заданного программой соотношения. Это непосредственно ясно из табл. 16. Во-вторых, как видно из табл. 15, машины использованы наиболее рентабельным способом (дают максимальную выработку, если пользоваться оценками работ 25, 4, 1). Эти два обстоятельства, как нам уже известно (вывод 4), обеспечивают то, что план оптимальный, а оценки объективно обусловленные.

**Оценки выработки машин и применения этих оценок.** На этом примере, так же как на предыдущем, можно было бы продемонстрировать свойства о. о. оценок (выводы 6, 7, 8), а также привести аналогичные прежним примеры использования о. о. оценок для решения различных вопросов, связанных с изменениями плана. Приведем только один пример такого рода, на котором, однако, выясним некоторую новую сторону вопроса. Пусть требуется в дополнение к указанному выполнить работу нового IV вида в количестве 2500 ед., причем она может выполняться либо машиной *B* (норма 8 физ. ед. в день), либо машиной *Г* (норма 3 ед. в день). Какую именно машину следует применить? Ввиду того что объем работ невелик по сравнению со всем планом, можно, благодаря устойчивости оценок, воспользоваться для решения уже найденными их значениями. Из табл. 15 видим, что оценка дневной производительности для машины *B* равна 16, и поэтому, так как для выполнения 1 ед. IV работы машиной *B* нужно потратить  $1/8$  дня, затраты на 1 ед. составят  $16 \times 1/8 = 2$  усл. ед. Поскольку оценка машины *Г* равна 10, то при ее использовании ( $1/3$  дня на ед. IV работы) затраты составят  $10/3 = 3,3$  усл. ед. Таким образом, правильнее выполнять работу IV машиной *B*, и соответственно оценка единицы IV работы равна 2. Насколько увеличится срок выполнения всех работ из-за присоединения IV работы? Оценка объема работ IV вида  $2500 \times 2 = 5000$  усл. ед. Так как ежедневная суммарная выработка всех машин составляет 3980 усл. ед., то дополнительно придется затратить  $5000 : 3980 = 1,26$  дня, т. е. всего вместе с прежними работами 45,264 дня.

Отметим, что при решении данного вопроса была получена наряду с оценками единицы работы каждого вида также оценка рабочего дня каждой машины. А именно: это есть выраженная в условных единицах дневная выработка данной машины на тех работах, на которых она используется в оптимальном плане, в нашем примере (табл. 15): 100 — для *A*, 10 — для *B*, 16 — для *B*, 10 — для *Г*. Эти оценки, как видим, только что помогли решить вопрос о выборе подходящей машины для IV работы. Мы произвели выбор, следуя принципу рентабельности, исходя именно из этих оценок. Сказанное можно сформулировать так:

**Вывод 11.** При распределении машин по работам наряду с единицей каждого вида работ получает о. о. оценку и каждая машина, вернее, ее производительность. Именно эта оценка равна измеренной в условных единицах дневной выработке данной машины на тех работах, где она занята в оптимальном плане.

При помощи этих оценок может, в частности, решаться вопрос о выборе подходящего средства для данной работы. При его решении нужно руководствоваться принципом минимума затрат (или наибольшей рентабельности) — оценить затраты,

исходя из машинного времени, нужного для выполнения единицы работ, а также о. о. оценки машины, и из всех возможных средств выбрать то, для которого затраты минимальны.

[Пользуясь одновременно оценками продукции и оценками производительности машин, мы можем и иным образом охарактеризовать оптимальный план и применяемые в нем способы. Именно, если мы для данного производственного способа (выполнение определенной работы при помощи данной машины) произведем сопоставление общей оценки выработки с оценкой затрат (затрачиваемого машинного времени по о. о. оценкам), то окажется, что для используемых в оптимальном плане способов эти оценки совпадают (например, для машины  $B$  на работе II вида:  $4 \times 4 = 16 \times 1$ ); напротив, для неиспользуемых способов оценка выработки ниже, точнее, не больше (например, для работы II на машине  $A$ :  $4 \times 10 < 100 \times 1$ ).

Иначе говоря, в оптимальном плане используются только оправданные (безубыточные) способы, в которых получаемая продукция оправдывает произведенные на нее затраты; напротив, неиспользуемые способы, как правило, не оправданы; во всяком случае оценка продукции для них меньше или равна оценке произведенных затрат (все по о. о. оценкам).

Это положение имеет понятный экономический смысл — о. о. оценки определяют необходимые в данных условиях затраты на продукцию, поэтому в оптимальном плане можно ограничиться применением оправданных способов, в которых затраты на единицу продукции находятся на уровне этих необходимых затрат.]

Более подробно остановимся на применении о. о. оценок в другом вопросе, которого в первом примере мы не касались.

**Распределение средств по участкам.** Предположим, что работы тех же видов, что и в рассмотренном примере, производятся на трех участках. Машины распределены между этими участками и известен план работы каждого из них. Соответствующие данные приведены в табл. 17. В предпоследнем столбце указана занятость каждого вида машин, используемых на данной работе; в последнем — срок выполнения работ на данном участке.

Нетрудно проверить, что на каждом участке наличные средства использованы наилучшим образом, т. е. план выполняется в кратчайший срок. В этом легко убедиться; в частности, распределение работ на первых двух участках, вообще, единственно возможное при условии полного использования имеющихся машин.

Рассматривая всю совокупность работ и средств на трех участках, видим, что всего работ I вида  $3000 + 2000 = 5000$  ед., II вида —  $10\,000$  ед., III вида —  $10\,000$  ед.; машин  $A$  имеется  $10 + 10 = 20$ , машин  $B$  —  $50$ ,  $B$  —  $30$ ,  $\Gamma$  —  $100$ , т. е. точно такое же задание и те же средства, что и в рассмотренной выше задаче. Почему же здесь задание требует в среднем 61 день, в то время как там оказывалось достаточным 44 дня? Все дело в том, что средства неудачно распределены между участками. Чтобы выполнить работу в 44 дня, их надо было бы распределить иначе, например на первый участок дать 17 машин  $A$  и 23 машины  $B$  и т. д. Такое распределение приведено в табл. 18. [Тогда машины будут применяться только так, как они использовались в оптимальном плане табл. 16. В других случаях может оказаться

Таблица 17

## Распределение средств по участкам

Участок	Средства	Программа работ	Распределение средств по работам (в машино-днях)	Срок (в днях)
1-й	$A - 10$ $B - 50$ $B - 10$	I – 3000 II – 4000	450 (A), 3050 (B) 160 (A), 610 (B)	61
2-й	$\Gamma - 100$	I – 2000 III – 2000	5000 (Г) 800 (Г)	58
3-й	$A - 10$ $B - 20$	II – 6000 III – 8000	600 (A) 30 (A), 1260 (B)	63

Таблица 18

## Оптимальное перераспределение средств по участкам для сокращения сроков выполнения работ

Участок	Средства	Программа работ	Распределение средств по работам (в машино-днях)	Срок (в днях)
1-й	$A - 17$ $B - 22$	I – 3000 II – 4000	748 (A) 1012 (B)	44
2-й	$A - 3$ $B - 32$ $\Gamma - 57$	I – 2000 III – 2000	132 (A), 1188 (B) 220 (B), 2508 (Г)	44
3-й	$B - 18$ $B - 7$ $\Gamma - 48$	II – 6000 III – 8000	308 (B), 1892 (Г) 792 (B)	44

более удобным произвести не перераспределение средств, а перераспределение программы между участками либо частично перераспределение средств, частично — программы.]

[Если нам известен некоторый план распределения средств и работ по участкам, то рациональность или нерациональность его могут быть сразу обнаружены при попытке построения для него системы о. о. оценок работ или машин.

Для плана, данного в табл. 17, составляя соотношения для оценок работ (исходя из того, что машины A, а также машины Г используются на работах I и III вида), получаем противоречивые соотношения

$$4m = 11n, \quad 0,4m = 2,5n.$$

Следовательно, это нерациональный план (ср. вывод 5). Напротив, наличие для плана табл. 18 системы оценок, согласованной с принципом рентабельности ( $m = 25$ ;  $n = 4$ ;  $p = 1$ ), подтверждает его рациональность.]

Важно отметить, что неудачность такого распределения оказалась бы незамеченной, если бы мы не провели специального анализа оптимальности общего плана, так как на первый взгляд все обстоит наилучшим образом: машины полностью загружены, нормы выполняются. Неудачность же плана заключается как раз в том, что в одном месте совершенная машина используется на сравнительно простой работе, а на другом участке сложная и трудоемкая работа выполняется вручную или простейшими машинами. Но именно это может легко остаться незамеченным, так как на первом участке применение сложной машины на легкой работе будет рентабельно (по принятой калькуляции), а так как машина налицо, то ее использование на этой работе закономерно. На втором участке выполнение трудоемкой работы вручную или простейшей машиной также вполне оправданно, раз соответствующей совершенной машины на участке нет. (К потерям от такого неудачного распределения средств обычно добавляются еще и потери от неизбежных простоев.)

Именно такого рода потери, связанные с не наилучшим распределением средств или работ, занимают у нас весьма значительное место.

Так, [в прошлом] в период сева в близко расположенных районах в одном из них даже на легких работах (боронование) использовались тракторы, раз в данном месте их было достаточно и они были обеспечены горючим; а в другом — [даже пахоту частично приходилось производить лошадьми] {приходится вручную вскапывать землю вместо пахоты, если тракторов не хватает}.

Нередко там, где имеется экскаватор, он используется для рытья небольших котлованов и других мелких работ, требующих частых перемещений, поэтому коэффициент его загрузки невелик. В другом месте, где тот же экскаватор мог бы быть полностью загружен, значительные объемы земляных работ производятся вручную. Такое же положение нередко имеет место на транспорте и на других работах.

Следует сказать, что рассмотренная выше схема решения данного вопроса, построенная на укрупненных показателях и не учитывающая ряда частных особенностей, не исчерпывает, конечно, до конца вопроса о рациональной организации работ и выборе средств.

Конкретный детальный план работ должен учесть все условия каждой работы, особенности работы отдельных механизмов, затраты на каждом виде работ и пр. Однако предварительно составленный схематизированный план по укрупненным данным и полученные при этом значения о. о. оценок, учитывающие всю совокупность работ, могут существенно помочь при составлении такого конкретного плана. Давая основную ориентировку в том, для каких видов работ какие средства в основном нужно использовать, он поможет правильнее распределить средства между рядом крупных участков в зависимости от объема и вида их работ. Таким образом, в результате составления подобного общего плана появится возможность при анализе каждого конкретного вопроса (выбор средств для данной работы и т. п.) учесть, хотя бы грубо, но объективно и притом количественно, конкретные особенности общей обстановки (преобладающие виды работ в других местах, ограниченность средств того или иного вида и т. д.). Это позволит получать значительно лучшие

результаты, чем при обычном порядке решения этих вопросов в отрыве друг от друга, и избежать имеющихся в настоящее время значительных потерь\*.

[На каждом участке в отдельности обычные методы экономического анализа в сочетании с опытом позволяют во многих случаях использовать наличные средства достаточно эффективно, т. е. получить план, близкий к оптимальному, без применения расчетных способов нахождения оптимального плана. Однако одновременный учет условий и ресурсов на нескольких участках при обычных методах трудно осуществим, поэтому возможности повышения эффективности за счет перераспределения часто остаются нереализованными. Такое объединенное использование производственных мощностей и перераспределение программ (специализация, кооперирование) стало более реальным на местах после создания совнархозов. Несомненно, привлечение методов оптимального планирования для решения этих вопросов должно оказаться весьма плодотворным.]

---

\*К анализу этого же вопроса мы возвращаемся ниже (глава II, § 5).



## ГЛАВА II

### Максимальное выполнение программы при данных ресурсах. Оценки производственных факторов

#### § 1. Общие положения

**Постановка вопроса.** Лишь сравнительно в немногих случаях мы находимся в таких условиях, как в задаче, рассмотренной в главе I, а именно, когда все затраты разделяются на: 1) постоянные, не зависящие от принятого способа организации производства и от того, какой вид продукции производится на данном участке (в примерах — затраты на работу предприятий, машин), 2) пропорционально зависящие, имеющие определенное значение для единицы продукции каждого вида, какой бы ни был избран производственный способ [(в примерах — затраты на материалы, одинаковые, независимо от того, на каком предприятии данный вид изделий производится)].

Обычно изменение способа изготовления продукции существенно меняет и затраты как по объемам, так и по составу: по одним статьям они увеличиваются, по другим снижаются. В таких случаях приведенный в главе I метод решения, основанный только на установлении объективно обусловленных оценок продукции, без анализа отдельных видов затрат, оказывается недостаточным. В вопросах такого рода приходится подвергать полному рассмотрению все основные производственные факторы.

Вопрос ставится следующим образом. Данный участок народного хозяйства (предприятие, отрасль, [экономический] район) располагает на планируемый период определенными ресурсами основных производственных факторов (рабочая сила, оборудование, производственные мощности, сырье, материалы, электроэнергия, природные источники). [По некоторым видам затрат вместо ограничений на ресурсы могут действовать ограничительные нормы их расхода на единицу продукции.] Перед участком поставлено определенное задание по выпуску продукции в определенном ассортименте, либо задача выполнения некоторой программы работ с указанием очередности их выполнения. Данная программа может быть по-разному распределена по производственным агрегатам, причем одна и та же продукция может производиться различными способами, использующими разные виды ресурсов.

Задача состоит в построении оптимального плана, т. е. такого распределения задания и такого выбора способов изготовления продукции, при которых в заданный срок (при данных ресурсах) будет достигнуто максимально возможное выполнение или перевыполнение программы.

С вопросами такого типа мы встречаемся, например, в следующих случаях. Если предприятие располагает определенным комплексом средств и ему задана программа, то перед ним стоит задача выполнения максимально напряженного плана

при данных средствах за счет наилучшей организации производства и наилучшего выбора возможных технологических процессов. В частности, такого рода задача возникает при выполнении обязательств, принятых по {Всесоюзному соц.} соревнованию. Аналогичные задачи встречаются и при планировании работы группы предприятий.

Другой вопрос такого же рода возникает при реализации плана строительства, когда нужно, исходя из имеющихся средств (наличной рабочей силы, намеченного производства строительных материалов, имеющегося парка механизмов и транспорта), за счет наилучшего их распределения и использования выполнить наибольшую часть плана строительства.

[В условиях текущего планирования, поскольку приходится исходить из наличного состояния производственных ресурсов, затраты на продукцию должны определяться не потенциально возможными лучшими способами, а способами, реально осуществимыми в данной обстановке и при данных условиях. При выборе возможных технологических процессов и способов организации производства необходимо учитывать ограничительные условия — имеющиеся виды производственного оборудования, наличные производственные мощности и т. п. В связи с этим весьма важную роль играет анализ производственных факторов, используемых в процессе производства или влияющих на него.]

В данном разделе нам будет удобнее, в отличие от того, как мы строили изложение в главе I, сначала сформулировать основные выводы, к которым приводит анализ данной проблемы, и лишь затем проиллюстрировать этот анализ на конкретных примерах, выясняя при этом особенности и роль отдельных факторов.

**Классификация производственных факторов.** Распределение производственной программы и выбор производственных способов существенно влияют на возможный объем выполнения задания. Среди всех способов организации производства всегда существует оптимальный способ (план), обеспечивающий наибольшее выполнение производственного задания. Для нахождения такого оптимального плана основное значение имеет правильное распределение программы и наличных производственных факторов (ресурсов).

Эти производственные факторы по характеру их использования обычно могут быть сведены к четырем группам:

I. Факторы, *пропорционально зависящие*, расходуемые на единицу продукции каждого вида в количестве, не зависящем ни от выбора производственных способов, ни от общего выпуска продукции. Например, в автомобильном производстве на каждую машину требуется определенное число шин, поступающих с другого завода. [Предполагается, что производство обеспечено такими факторами в необходимом объеме.]

II. Факторы, *неизменно расходуемые*. К ним мы причисляем такие факторы (виды затрат), которые затрачиваются в одинаковом размере независимо от объема выпуска продукции и избранных производственных способов (управленческие расходы, охрана, освещение, отопление и пр.).

III. *Не лимитирующие* (избыточные) факторы, которые в данных условиях остаются излишними при любом выборе производственных способов (например, некоторые виды оборудования, вода), и их излишек не может быть использован.

IV. *Существенно-переменные* факторы, имеющиеся в ограниченном количестве, расход которых на единицу продукции зависит от выбранного производственного способа, но для каждого способа предполагается не зависящим от объема произведенной продукции[\*]].

Именно по отношению к факторам последней категории существенно ставить вопрос об их наилучшем использовании.

Наиболее важными из факторов этой группы являются: рабочая сила (по категориям), производственные мощности по отдельным видам оборудования, электроэнергия, горючее, некоторые материалы, производственные площади, а также во многих случаях земля, вода и другие природные богатства.

Число затрачиваемых или используемых факторов довольно велико, однако при анализе затрат обычно удается сократить их число, объединяя ряд затрат одним измерителем (например, час работы машины со всеми связанными с этим затратами: час труда рабочего, обслуживающего машину, время использования самого станка, смазка, ремонт и прочее обслуживание, электроэнергия).

[Мы говорим об использовании данного фактора независимо от того, фактически ли он расходуется при изготовлении продукции (материалы) или он только занимает, одалживается на данный период (оборудование, производственные площади, земля в сельском хозяйстве).

Среди всех производственных факторов совершенно особое место занимает труд, являющийся единственным источником создаваемой стоимости. При этом наряду с непосредственными затратами живого труда мы должны учитывать и затраты овеществленного труда, представленные такими факторами, как материалы, услуги и износ оборудования. Кроме того, поскольку производительная сила живого труда зависит от условий его применения, в частности, от привлекаемого оборудования, и поскольку производственные мощности и площади, которыми мы располагаем, ограничены, мы не можем не учитывать при организации производства их использование как особый вид затрат, ибо отсутствие такого учета сделает план нереальным.

При анализе задачи построения оптимального плана, очевидно, могут быть исключены из рассмотрения как пропорционально зависящие, так и неизменно расходуемые факторы, поскольку их затраты при данной программе не зависят от выбора варианта плана[\*\*], а также нелимитирующие факторы, поскольку сокращение их затрат не имеет значения. Таким образом, важен анализ затрат лишь существенно-переменных факторов.

В схематизированной форме задача построения оптимального плана на некоторый период (задача текущего планирования) может быть поставлена следующим образом.

---

\*[Последнее условие относительно факторов IV группы представляет некоторое ограничение, не всегда достаточно точно выполняющееся, но в известной мере необходимое для данного анализа (иначе говоря, предполагается линейная зависимость затрат таких факторов от объема выпуска продукции при данном способе).]

\*\*[Это означает, по существу, что в качестве продукции рассматривается не само изделие, а его изготовление на основе расхода по неизменным нормам материалов, полуфабрикатов и пр.]

Даны ресурсы на планируемый период, т. е. имеются (или поступают) в известных количествах определенные виды производственных факторов. Требуется произвести некоторые виды продукции в заданной пропорции (ассортименте). Для каждого вида продукции имеется один или несколько технологически допустимых способов ее изготовления, относительно каждого из которых известна структура затрат, т. е. указано, в каком количестве затрачиваются (расходуется или одалживаются) используемые в данном способе производственные факторы на единицу продукции.

Требуется составить оптимальный план, т. е. указать, какие количества продукции каждого вида должны быть произведены отдельными способами так, чтобы при этом суммарные затраты производственных факторов не превзошли заданных ресурсов, а продукция была произведена в данном ассортименте и максимально возможном объеме. Эта задача, представляющая идеализированную и упрощенную модель реальной задачи текущего производственного планирования, и рассматривается в дальнейшем, и формулируемые ниже выводы относятся непосредственно к ней. Для реальной задачи производственного планирования эта модель представляет (и то не всегда) лишь известное приближение[\*]. Поэтому полученные выводы также могут применяться лишь с известной осторожностью. Однако эти выводы, как обычно и бывает при научном анализе, имеют существенное значение как для количественного, так и для принципиального, качественного анализа реальных плановых задач.]

**Объективно обусловленные оценки производственных факторов.** Вопрос об использовании ресурсов, имеющихся в ограниченном количестве, расход которых зависит от выбора производственного способа, встречался уже в примере § 2 главы I. Возвратимся к решению, полученному в этой задаче. Мы построили оптимальный план и о. о. оценки для единицы каждого вида работ, причем оптимальный план характеризовался тем, что каждая машина использовалась в нем наиболее рентабельным способом — оценка выработки была наиболее высокой. Наряду с этим мы получили оценку дня работы — дневной производительности — каждой машины, т. е. для затрат производственного фактора (вывод 11). При этом оказалось, что оптимальный план может быть охарактеризован и при помощи таких оценок, как удовлетворяющий принципу рентабельности в том смысле, что для каждого вида работ используются те машины, применение которых связано с минимальными затратами, если в затратах день работы каждой машины учитывается по указанным оценкам.

Как мы увидим в дальнейшем, это же положение справедливо и для иных производственных факторов, а именно: каждому фактору отвечает своя оценка, и оптимальный план строится по принципу минимума затрат. Для этих оценок имеют место утверждения, сходные с теми, которые были высказаны относительно оценок продукции. Сформулируем их в виде следующих выводов.

---

\*[Например, лишь приближенно можно считать рост затрат (существенно-переменных факторов) на производство продукции при данном способе пропорциональным объему выпуска (даже если постоянные затраты исключены).]

**Вывод 12.** Имеется определенная система оценок (о. о. оценки) переменных факторов (видов затрат), связанная с оптимальным планом таким образом, что при этих оценках он удовлетворяет принципу рентабельности (минимума затрат). Именно, для производства каждого вида продукции (или работы) использованы те способы, в которых сумма затрат производственных факторов (по о. о. оценкам) является наименьшей.

Наоборот, если в некотором плане организации производства: 1) полностью используются производственные факторы IV группы, 2) выполнено ассортиментное задание по продукции и 3) имеется система оценок существенно-переменных факторов, при которой для данного плана соблюден принцип рентабельности, то этот план оптимальный, а оценки — объективно обусловленные.

Таким образом, при помощи сходных приемов, подобных изложенным выше, о. о. оценки могут быть использованы как для проверки оптимальности данного плана, так и для нахождения оптимального. Далее, для о. о. оценок производственных факторов сохраняются те же свойства, которые были сформулированы для о. о. оценок продукции в выводах 6, 7, 8.

**Вывод 13.** Объективно обусловленные оценки производственных факторов конкретны, т. е. определяются всей совокупностью условий (ресурсы этих факторов, производственная программа, освоенные способы производства). В частности, уменьшение ресурсов некоторого фактора или увеличение доли продукции, на которую он существенно расходуется, связаны, как правило, с ростом о. о. оценки этого фактора. При небольших изменениях в условиях о. о. оценки обычно не меняются или меняются незначительно (устойчивость). Соотношение о. о. оценок производственных факторов может быть, вообще говоря, реализовано, т. е. за счет расходования некоторого количества одного из факторов может быть экономлено соответствующее (по эквиваленту, определяемому о. о. оценками) количество другого фактора (реальность о. о. оценок).

Объективно обусловленные оценки производственных факторов могут быть использованы для решения разнообразных вопросов, связанных с планом. Соответствующие примеры будут даны ниже при рассмотрении более конкретных вопросов. Там же будет более подробно проанализирован экономический смысл о. о. оценок отдельных производственных факторов.

[В ряде случаев требования к плану могут быть иными, чем получение максимума продукции нужного состава при заданных ресурсах. Например, мы можем быть заинтересованы при заданном объеме выпуска в максимальном уменьшении затрат на единицу продукции (при данном их соотношении), в максимальном уменьшении затрат одного вида, например, труда, при соблюдении заданных лимитов на остальные. Более близка к реальности постановка задачи, в которой лишь некоторые основные виды продукции и затрат планируются в натуральной форме, а остальные учитываются суммарно в стоимостной форме. Некоторые из перечисленных задач непосредственно сводятся к уже рассмотренным (например, первая), для других это не так. Однако очень существенно, что применяемые методы анализа, а также общие выводы относительно существования системы о. о. оценок, характеризующих оптимальный план, полностью распространяются и на эти задачи.]

Остановимся еще на одном вопросе. Мы видели в примере § 2 главы I, что оценки производственных факторов были определены через оценки продукции. Наоборот, если известны о. о. оценки производственных факторов, то с их помощью можно найти оценки продукции, подсчитав величину затрат на единицу продукции при способе, принятом в оптимальном плане.

Таким образом, о. о. оценки определены и для производственных факторов, и для продукции. Однако, как мы видели (выводы 2 и 12), для характеристики оптимального плана часто оказывается вполне достаточно одной из этих систем оценок. Отметим более сложный случай, когда это не так. Именно, когда производственные способы позволяют одновременно получать несколько видов продукции и нельзя указать, какие из затрат должны быть отнесены к одному виду продукции, а какие — к другому (обработка комплексного сырья, распиловка бревен на различные пиломатериалы, работа многостаночника сразу по нескольким деталям и т. п.). В этом случае для характеристики оптимального плана приходится привлекать обе системы оценок. Именно, он характеризуется так:

**Вывод 14.** *При наличии комплексного выпуска продукции с оптимальным планом связана определенная система о. о. оценок производственных факторов и всех видов продукции. При этом для оптимального плана соблюден принцип рентабельности, т. е. для всех используемых в оптимальном плане производственных способов оценка суммы затрат совпадает с общей оценкой продукции и больше или равна ей для неиспользуемых способов[\*].*

[Отметим, что этот общий критерий оптимальности плана охватывает и два упомянутых частных случая, когда можно ограничиться только оценками продукции или только оценками затрат. Применение его к задаче такого рода проиллюстрировано на примере в § 2 главы I (стр. 146).]

## § 2. Оценка производственного фактора, повышающего эффективность труда

**Постановка задачи.** Рассмотрим вопрос об использовании ресурсов, когда имеется лишь два переменных лимитирующих фактора: труд и некоторый производственный фактор, повышающий эффективность труда. Ресурсы последнего фактора ограничены, и ставится задача его наилучшего использования. Довольно часто роль такого фактора может играть электроэнергия, горючее и др. Мы рассматриваем вопрос в чистом виде, когда решающую роль играет недостаток именно этого фактора и речь идет об оценке мероприятий по его экономии. Переменным, помимо указанного фактора, является только труд; относительно прочих факторов (оборудование и др.) полагаем, что они имеются в достаточных количествах. Такая задача встречается довольно часто, поэтому указание методики для ее решения представляет самостоятельный интерес, помимо того, что она играет определенную

---

\*[В данном выводе имеется в виду, что возможности применения используемых способов не ограничены или, во всяком случае, не исчерпаны. Если это не так и имеются ограничения по использованию некоторых способов, то для полностью использованных способов в приведенную формулировку вводится корректив: для таких способов оценка продукции больше или равна сумме затрат (см. по этому поводу Приложение I, стр. 330).]

**Таблица 19**  
**Затраты труда и электроэнергии**

Задания	Вариант А		Вариант Б	
	Затраты труда (час)	Расход электроэнергии в $kBm \cdot ч$	Затраты труда (час)	Расход электроэнергии в $kBm \cdot ч$
I	300	4000	500	2000
II	500	9000	1000	3000
III	500	8000	800	5000
IV	1000	6000	2000	2000
V	1000	6000	1500	3000
VI	200	2000	500	1000
VII	100	1500	200	500

роль в общей цепи наших выводов. Эту методику мы продемонстрируем на конкретном примере.

**ПРИМЕР.** Рассмотрим вопрос о составлении месячного плана работы некоторого участка предприятия, которому задана определенная программа — выполнить последовательно ряд производственных заданий (I, II, ..., VII). Единственными переменными факторами являются рабочая сила (одного вида) и электроэнергия. Число рабочих часов в месяц 5 тыс., лимит электроэнергии 21 тыс.  $kBm \cdot ч$ .

Затраты труда и электроэнергии, нужные для выполнения каждого из заданий, даны в табл. 19. Ввиду недостатка электроэнергии, наряду с основным, энергоемким вариантом А выполнения задания, может быть использован другой, трудоемкий — вариант Б, экономящий энергию за счет увеличения затрат труда.

Например, электросварку и электрорезку металла можно заменить клепкой и механической резкой; некоторые виды работ можно перевести на менее энергоемкие, хотя и менее производительные станки [закалку электрическими методами заменить термической закалкой и т. п.].

Требуется составить оптимальный план работы данного участка, т. е. выбрать производственные способы, обеспечивающие максимальное выполнение программы (наибольшего числа заданий), не выходя за пределы заданных ресурсов. По существу, требуется правильно выбрать способы необходимой экономии электроэнергии.

Действующие цены и тарифы в таких случаях часто не обеспечивают возможности находить правильное решение вопроса. Например, пусть они составляют 2 руб. за час рабочего времени и 14 коп. за  $kBm \cdot ч$  электроэнергии[\*]. Тогда окажется, что для всех заданий энергоемкий вариант А связан с меньшими затратами.

\*[Так как этот и другие приводимые иллюстративные примеры имеют условный характер и их назначение — продемонстрировать принципы методики, то все цены, тарифы и прочие числовые данные взяты произвольно.] (В связи с этим данные, относящиеся к ценам и тарифам, сохранены в прежнем масштабе цен, действовавшем до января 1961 года. — Примечание 1974 г.). В тексте 1942 г. в этом примере взяты 7 коп. для 1  $kBm \cdot ч$  и 1 руб. для часа рабочего времени. (Прим. ред.)

Таблица 20

## Случайный план

Задания	Избранный вариант	З а т р а т ы	
		труда (в часах)	электроэнергии (в $\text{кВт} \cdot \text{ч}$ )
I	A	300	4000
II	A	500	9000
III	B	800	5000
IV	B	2000	2000
V	B	1500	3000
Всего		5100	23 000

Таблица 21

## Эффективность экономии

Задания	При переходе от варианта A к варианту B		
	Экономия электроэнергии (в $\text{кВт} \cdot \text{ч}$ )	Перерасход рабочей силы (в часах)	Дополнительные затраты труда на 1 $\text{кВт} \cdot \text{ч}$
I	2000	200	0,10
II	6000	500	0,08
III	3000	300	0,10
IV	4000	1000	0,25
V	3000	500	0,17
VI	1000	300	0,33

Так, для I задания имеем  $300 \times 2 + 4000 \times 0,14 = 1160 < 500 \times 2 + 2000 \times 0,14 = 1280$  и т. д. Поэтому, если исходить из указанных цен, то трудно определить, на каких заданиях нужно сэкономить энергию, и решение может оказаться случайным. Например, для первых заданий будет выбран энергоемкий вариант, обеспечивающий быстрое выполнение работ, а для последующих — трудоемкий, с тем, чтобы не выйти из заданного лимита электроэнергии. Такой план дан в табл. 20.

Этот план обеспечивает выполнение только пяти заданий при небольшом перерасходе рабочего времени (сверхурочные) и лимита электроэнергии.

**Оптимальный план и о. о. оценки.** Поставим теперь задачу разыскания оптимального плана. Воспользуемся для этой цели первым из основанных на о. о. оценках способов. Оценку рабочего часа примем равной единице, и будем подбирать о. о. оценку для электроэнергии. Для каждого задания выясним, сколько рабочих часов тратится для экономии 1  $\text{кВт} \cdot \text{ч}$  электроэнергии при переходе от способа A к B. Соответствующий расчет приведен в табл. 21.

Для выполнения, скажем, шести заданий способом A требуется 35 тыс.  $\text{кВт} \cdot \text{ч}$  электроэнергии. Чтобы не выйти из лимита (21 тыс.) нужно сэкономить



Таблица 22

## Оптимальный план

Задания	Избранный вариант	З а т р а т ы	
		труда (в часах)	электроэнергии (в $\kappa\text{Вт} \cdot \text{ч}$ )
I	<i>Б</i>	500	2000
II	<i>Б</i>	1000	3000
III	<i>Б</i>	800	5000
IV	<i>А</i>	1000	6000
V	<i>Б</i>	1500	3000
VI	<i>А</i>	200	2000
В с е г о		5000	21 000

14 тыс.  $\kappa\text{Вт} \cdot \text{ч}$ . Из табл. 21 ясно, что экономия с наименьшими затратами труда получается при переводе на способ *Б* последовательно II, I, III, V заданий. Их и достаточно перевести на этот способ, так как полученная экономия составит:

$$6000 + 2000 + 3000 + 3000 = 14\,000 \quad \kappa\text{Вт} \cdot \text{ч}.$$

Полученный в результате план (табл. 22) и является оптимальным для данного случая. Как видим, в нем по сравнению со случайным планом выполнено дополнительно VI задание, и нет перерасхода ни электроэнергии, ни рабочей силы. Легко понять также, что план, найденный из условия максимального выполнения программы, требует и минимальных затрат труда для выполнения намеченного числа заданий при соблюдении лимита электроэнергии. Параллельно нами, по существу, определено и значение о. о. оценки  $m$  для 1  $\kappa\text{Вт} \cdot \text{ч}$  электроэнергии (оценку рабочего часа  $n$  примем равной 1).

Для экономии 1  $\kappa\text{Вт} \cdot \text{ч}$  электроэнергии мы пожертвовали в V задании 0,17 рабочего часа. Поэтому  $m > 0,17$ . С другой стороны, мы не пошли на экономию 1  $\kappa\text{Вт} \cdot \text{ч}$ , когда для этого требовалось 0,25 рабочего часа (IV задание), так что  $m < 0,25$ . В данном примере для оценки  $m$  мы не получили определенного значения, а установили только то, что она заключена в пределах между 0,17 и 0,25. Любое число в этих пределах и можно принять за значение о. о. оценки для 1  $\kappa\text{Вт} \cdot \text{ч}$ . Пусть  $n = 0,2$ . Легко убедиться, что при таких оценках  $n$  и  $m$  в плане, приведенном в табл. 22, используются производственные способы с минимальной суммой затрат. Это вновь подтверждает, что данный план оптимален. {Отметим, что для нахождения оптимального плана мы могли воспользоваться любым из предложенных в § 1 главы I способов.}

В этом простом случае мы могли бы получить оптимальный план и путем непосредственного сравнения затрат труда и электроэнергии во всех возможных вариантах производственных планов. Таких планов (сочетаний способов) 32 для пяти и 64 для шести заданий. Но, конечно, этот путь совершенно неприемлем в более сложных случаях, где пришлось бы сравнивать миллионы решений. В том-то и заключается преимущество методов, основанных на о. о. оценках, что они позволяют обходиться без непосредственного сопоставления всех планов. [Существенно

также и то, что они столь же успешно применимы и в более сложных случаях, например, когда нужно одновременно учитывать несколько факторов.

Оценка определенного вида продукции или услуг должна соответствовать необходимым затратам (в конечном счете, труда), связанным с ее получением. Каков в данном случае смысл полученной о. о. оценки электроэнергии?

Нужно сказать, что в условиях текущего планирования, когда приходится исходить из наличной производственной базы, получение дополнительной продукции данного вида за счет производства неосуществимо, если возможности ее производства полностью исчерпаны. Но имеется другой реальный путь ее получения — за счет экономии или замены ее другой продукцией (или другим фактором) в каком-то из вариантов использования. Связанные с этим затраты и определяют тогда о. о. оценку; в данном случае, например, эту оценку определяют затраты, связанные с экономией электроэнергии в IV и V заданиях (0,17–0,25)[\*]. Впрочем, как будет установлено ниже, эта оценка должна совпадать и с полными затратами на производство электроэнергии.]

Мы могли бы на этом же примере проиллюстрировать и все свойства о. о. оценок. Так, оценка электроэнергии зависит от всех условий задачи. Нетрудно убедиться, что если бы лимит электроэнергии был не 21 тыс., а, например, 26 тыс.  $\kappa\text{Вт}\cdot\text{ч}$  (в данном случае это изменение существенно), то о. о. оценка равнялась бы не 0,2, а 0,1. Наоборот, уменьшение лимита повысило бы о. о. оценку для нее (вывод 13).

**Применения о. о. оценок.** Укажем на этом примере возможные применения о. о. оценок. Так, если для некоторой работы предложен новый способ ее выполнения, требующий иных затрат, то легко решить вопрос о его целесообразности. Пусть, например, для III задания предложен способ *B*, требующий 1100 рабочих часов и 1500  $\kappa\text{Вт}\cdot\text{ч}$  электроэнергии. Целесообразно ли его применение в данных условиях? Сравнивая по о. о. оценкам затраты, убеждаемся, что в способе *B* затраты меньше, чем в использованном в плане способе *B* (и тем более, чем в способе *A*). В самом деле:

$$1100 + 1500 \times 0,2 < 800 + 5000 \times 0,2 < 500 + 8000 \times 0,2.$$

(1400) (1800) (2100)

И действительно, применение этого способа, как показывает план, приведенный в табл. 23, позволяет дополнительно выполнить и VII задание.

Любопытно, что если бы мы воспользовались априорными оценками (ценами 2 руб. и 14 коп.), то показалось бы, что способ *B* требует больших затрат, чем оба прежних способа *A* и *B*:

$$1100 \times 2 + 1500 \times 0,14 > 800 \times 2 + 5000 \times 0,14 > 500 \times 2 + 800 \times 0,14.$$

(2400) (2300) (2120)

\*[Отметим, что здесь мы имеем два разных значения. 0,25 чел-ч/ $\kappa\text{Вт}\cdot\text{ч}$  — для затрат, связанных с перерасходом электроэнергии, и 0,17 чел-ч/ $\kappa\text{Вт}\cdot\text{ч}$  — для выигрыша при ее экономии. Такой случай нетипичен, но может реально встретиться (ср. Приложение I, стр. 327).]

Таблица 23

План с использованием способа *B* для III задания

Задания	Избранный вариант	З а т р а т ы	
		труда (в часах)	электроэнергии (в кВт · ч)
I	<i>B</i>	500	2000
II	<i>B</i>	1000	3000
III	<i>B</i>	1100	1500
IV	<i>A</i>	1000	6000
V	<i>A</i>	1000	6000
VI	<i>A</i>	200	2000
VII	<i>B</i>	200	500
В с е г о		5000	21 000

Поэтому его следовало бы отвергнуть. Это доказывает, что использование в подобных вопросах оценок, не учитывающих конкретных условий задачи, неприемлемо — оно может привести к неправильному результату.

Таким образом, вопросы о целесообразности мероприятий, связанных с экономией электроэнергии и, вообще, с изменением ее расхода, должны решаться с учетом ее о. о. оценки. Например, стоит ли выключать станок во время измерения детали, если учесть, что это снизит производительность? Другой пример. Введение вспомогательного рабочего, позволяющего на энергоемком агрегате увеличить производительность труда основного рабочего, хотя и повышает себестоимость данной операции, однако в условиях недостатка электроэнергии может оказаться оправданным, так как снижает ее затраты. Правильное решение подобных вопросов возможно лишь с учетом о. о. оценки электроэнергии.

В частности, во многих случаях отказ от проведения подобных мероприятий из-за связанных с ними потерь — повышения себестоимости — не может быть оправдан, так как в условиях особо напряженного энергобаланса это может вызвать простои предприятия из-за перерасхода электроэнергии и, следовательно, принести потери во много раз большие.

**Вывод 15.** *Объективно обусловленные оценки могут быть использованы для сравнения производственных способов и, в частности, для решения вопроса о целесообразности нового способа. Для этого нужно сравнить сумму затрат, найденную по о. о. оценкам, для нового способа с затратами для ранее использовавшихся способов. Если затраты для нового способа окажутся меньшими, то применение его целесообразно, в противном случае — нет. Априорные оценки не дают правильного решения вопроса.*

Объективно обусловленные оценки могут быть использованы и при решении различных вопросов, касающихся нескольких предприятий. Предположим, что о. о. оценки электроэнергии определены для всех предприятий, и оказалось, что для предприятия *H* о. о. оценка равна 0,1, а для предприятия *K* она равна 0,3.

Так как о. о. оценки *реальны*, то это означает, что предприятие *H* может при добавлении некоторого числа рабочих, скажем 100 рабочих (20 тыс. рабочих часов), высвободить 200 тыс. кВт·ч электроэнергии. В то же время предприятие *K* при прибавлении 67 тыс. кВт·ч электроэнергии может высвободить 20 тыс. рабочих часов. В таком случае, переместив 100 рабочих с предприятия *K* на *H* (для простоты предполагаем, что речь идет о малоквалифицированных вспомогательных рабочих, и потому такое перемещение осуществимо) и передав 67 тыс. кВт·ч с предприятия *H* на *K*, получим возможность выполнения обоими предприятиями прежней программы при выигрыше 133 тыс. кВт·ч. Таким образом, о. о. оценки позволили обнаружить возможность лучшего распределения электроэнергии.

Следует сказать, что, несмотря на бесспорную целесообразность указанного перемещения, оно может оказаться неосуществимым при низком тарифе на электроэнергию (ниже о. о. оценки для основной массы предприятий). Так, при тарифе 14 коп. за 1 кВт·ч и ставке рабочего 2 руб. в час окажется, что предприятие *H* не будет заинтересовано в экономии электроэнергии, ибо это будет связано с повышением себестоимости: сэкономив  $200\,000 \times 0,14 = 28\,000$  руб. на электроэнергии, оно потеряет  $2 \times 20\,000 = 40\,000$  руб. на оплате рабочей силы. Предприятие *K*, хотя и заинтересовано в указанном изменении, но оно не сможет его осуществить, так как не имеет права превзойти установленного ему лимита. Таким образом, возможность подобного перераспределения ресурсов, несмотря на ее целесообразность для народного хозяйства в целом, может без учета о. о. оценок оказаться незамеченной и неосуществленной.

Рассмотрим другой вопрос. Предположим, что на всех предприятиях города о. о. оценка электроэнергии равна примерно 0,2. Некоторое мероприятие на электростанции, например, сортировка угля перед закладкой в топку котла, позволяет улучшить работу котлов и при том же расходе топлива дать больше электроэнергии. Однако затраты труда на эту работу значительны, и дополнительный кВт·ч обойдется в 24 коп. (0,12 рабочего часа при ставке 2 руб. за 1 час). Для электростанции это мероприятие невыгодно — возрастает себестоимость (имеется в виду, что себестоимость та же, что и тариф — 14 коп. за 1 кВт·ч). Между тем с государственной точки зрения мероприятие, конечно, целесообразно, так как эти затраты труда на электростанции окупятся почти вдвойне на тех предприятиях, которые получают дополнительную электроэнергию — при затрате 0,12 раб. часа выигрывается 0,2 раб. часа.

Обратим внимание на то, что в то время как на предприятиях электроэнергия представляла производственный фактор — вид затрат, на электростанции это — продукция. Тем не менее оказалось, что правильно в обоих случаях руководствоваться одним и тем же значением о. о. оценки.

Аргументация, приведенная при рассмотрении этих примеров, имеет общий характер и потому дает основание для следующего вывода.

**Вывод 16.** *Объективно обусловленные оценки могут быть использованы и в вопросах, касающихся нескольких предприятий. Различие в соотношении о. о. оценок производственных факторов на нескольких предприятиях указывает на наличие возможности такого их перераспределения (предполагается его допустимость),*

при котором все предприятия смогут увеличить выпуск продукции. Если некоторые факторы на одном предприятии представляют производственные затраты, а на другом — виды продукции и соотношение их о. о. оценок различно, то в планах обоих предприятий также возможны изменения, в результате которых общий выпуск продукции возрастает. Таким образом, в общем оптимальном плане (при условии допустимости перемещения ресурсов и перераспределения программ) соотношение оценок для одинаковых факторов должно быть единым.

Следует сказать, что в процессе планирования и оперативного руководства с учетом конкретной обстановки в некоторой степени исправляют те неправильности, к которым ведет обычный расчет рентабельности. Иногда, учитывая это, даже изменяют сами отпускные цены. Так, районный тариф на электроэнергию назначается в известной мере в зависимости от напряженности энергобаланса. В условиях крайнего недостатка электроэнергии идут на различные мероприятия по снижению ее расхода и увеличению ее производства. Однако целесообразность подобных мероприятий определяется лишь качественно, и они проводятся только в моменты, когда к этому вынуждает крайняя необходимость. Применение метода о. о. оценок и выводов, связанных с ним, позволило бы дать объективный количественный подход к более точному и научно обоснованному решению таких вопросов и обеспечить более совершенное, гибкое и своевременное их решение, а тем самым избежать излишних потерь.

Главное же то, что тариф на электроэнергию у нас, как правило, занижен — значительно ниже ее о. о. оценки и не отражает действительного соотношения между потребностью в электроэнергии и объемом ее производства, подлинных народнохозяйственных затрат, связанных с ней. Это искажает все экономические расчеты, связанные с использованием электроэнергии. Поэтому многие мероприятия, вызывающие увеличение расхода электроэнергии и явно нецелесообразные при существующем энергобалансе, дают по расчету снижение себестоимости и кажутся выгодными. Наоборот, другие мероприятия, дающие экономию электроэнергии, оказываются невыгодными по калькуляции или приводят к совершенно незначительному снижению себестоимости (ибо электроэнергия в себестоимости большинства видов продукции имеет ничтожную долю — порядка 1–2%). {Например, переход от общей сети к электроэнергии от собственной котельной связан обычно с повышением себестоимости. Из-за этого многие предприятия не используют подобные возможности. Так, как признавалось в «Правде» (12.11.42), не используют собственных энергетических установок Вигунская фабрика им. Ногина, Тейковский комбинат и другие предприятия.}

[Такое несоответствие тарифа электроэнергии ее реальному значению характерно, вообще, для цен и тарифов большинства факторов, производство которых требует применения дорогостоящего оборудования (см. § 5), отчасти же оно связано с тем, что не учитывается временная напряженность баланса электроэнергии в данное время или в данном месте.

Обратим внимание на то, что правильно проведенный экономический анализ и расчет могут для одного и того же вопроса привести к противоположным заключениям в зависимости от конкретной обстановки. Так, в данном вопросе существенно, что в большей мере определяет напряженность энергобаланса — недостаток топлива

или недостаток мощностей электростанций (в расчете это скажется на соотношении о. о. оценок электроэнергии и топлива).

В условиях Отечественной войны в ряде случаев в большей мере, чем недостаток топлива, производство электроэнергии лимитировало отсутствие резервных мощностей станций. В этих условиях переход предприятия от снабжения из общей сети на снабжение электроэнергией от собственной котельной был целесообразен, хотя и связан с повышением ее себестоимости и даже расхода топлива. Напротив, при наличии резерва мощностей, когда производство электроэнергии сдерживается ограниченными ресурсами топлива, это было бы неправильным.

В этой связи уместно отметить, что полный научно обоснованный экономический расчет, учитывающий конкретную обстановку, может скорее привести к правильным решениям, чем попытки ориентироваться по тем или иным частным показателям. Так, в настоящее время в качестве одного из основных показателей работы электростанций рассматривается расход электроэнергии на собственные нужды. В результате электростанции ради улучшения этого показателя вместо электроэнергии часто используют паровой привод, что ведет к увеличению расхода топлива и экономически нецелесообразно[\*].

Использование объективно обусловленной оценки электроэнергии (и приближение тарифа к ней) важно и в других отношениях. Такой показатель напряженности энергобаланса будет гораздо точнее, чем качественные характеристики, ориентировать относительно необходимости и срочности мероприятий по повышению мощностей станций в данном районе или его подключению к другой энергосистеме. В то же время о. о. оценка электроэнергии позволит выявить те энергоемкие производства, которые нецелесообразно развивать в данном районе или желательно даже вывести из него.]

Отметим, что сходным с электроэнергией фактором является горючее. По вопросу о его экономном и наиболее полном и рациональном использовании могут быть приведены подобные же расчеты и сделаны сходные практические выводы [ , хотя в связи с резким увеличением нефтедобычи этот вопрос и стал менее актуальным]. Основной вывод заключается в том, что при рассмотрении различных мероприятий, связанных с изменением расхода горючего, нужно иметь в виду, что его о. о. оценка значительно выше (хотя бы по отношению к труду), чем цена. Поэтому расчет, исходящий из его отпускной цены, может привести к неверному результату.

Принятие в расчет о. о. оценки при решении вопросов распределения горючего могло бы обеспечить более рациональное его использование. И тогда во многих из тех случаев, где теперь это кажется невыгодным, подсчет обнаружил бы целесообразность экономии горючего. Одновременно он показал бы необходимость обеспечения и дал возможность снабдить им ряд мест, где недостаток горючего приводит к особенно большим потерям (простой, выполнение трудоемких работ вручную и пр.). Так, из-за отсутствия горючего во время посевной в Брейтовском районе Ярославской области было вскопано лопатами свыше 800 га, в Некрасовском — свыше 500 га.

\*[См. «Промышленно-экономическая газета», 1 сентября 1957 г.]

Следует сказать, что правильная оценка может быть использована и в решении вопросов, связанных с добычей нефти [и газа] (см. вывод 16). Именно она показала бы целесообразность проведения некоторых мероприятий, направленных на увеличение добычи, даже в тех случаях, когда по обычной калькуляции себестоимость растет [(отпускная цена, по-видимому, более правильно отражает народнохозяйственный эффект горючего)]. В отдельных случаях такие мероприятия фактически проводились. Так, в 1936 г. директивой ЦК нефтедобывающим предприятиям было указано на необходимость эксплуатации малодебитных скважин, несмотря на кажущуюся их нерентабельность. Правильный расчет с учетом о. о. оценки горючего подтвердил бы безусловную справедливость этого вывода<sup>+</sup>.

[И в настоящее время погоня за снижением себестоимости или повышением производительности труда в ущерб объему добычи часто нерациональна.]

### § 3. Целесообразное использование и оценка труда квалифицированной рабочей силы

**[Особенности труда как производственного фактора.** В числе производственных факторов, от правильного использования которых зависит получаемая продукция, мы называли труд. Однако труд, естественно, занимает среди этих факторов совершенно особое, несравнимое с прочими место.

Прежде всего труд является, в конечном счете, единственным источником создаваемой стоимости. Принятая выше схема планирования находится в полном согласии с этим основным положением трудовой теории стоимости. Действительно, хотя наряду с трудом рассматривались и другие производственные факторы, но некоторые из них представляют овеществленный продукт труда (материалы, топливо, амортизация оборудования, услуги транспорта), т. е. опять приводят к труду как конечному источнику; другие факторы (земля и др. природные ресурсы) не являются самостоятельным источником ценности, а их использование (одалживание) только влияет на производительную силу труда, который единственно и создает стоимость.

Особенности этого фактора — чрезвычайное многообразие и неоднородность, многогранность возможностей использования человеческого труда; зависимость производительности труда не только от его места в производственном процессе, но и от многих других моментов: квалификации, условий труда, форм его оплаты, организации социалистического соревнования и общественного воспитания, личных качеств и условий жизни трудящегося. Наконец, задача использования труда в социалистическом обществе не может сводиться только к достижению максимальной производственной эффективности, но требует сохранения физического здоровья работника путем непрерывного облегчения условий его труда, а также создания условий для морального удовлетворения трудом. Все эти обстоятельства чрезвычайно усложняют вопросы экономики, нормирования труда, его тарификации, делают нормы, являющиеся базой расчета, неизбежно приближенными и условными.

---

<sup>+</sup> Следует учесть, что на малодебитных скважинах высокая себестоимость определяется еще и включением в нее амортизации на установленное оборудование, между тем при прекращении эксплуатации скважин это оборудование по большей части не может быть реализовано, и поэтому отчисления на амортизацию учитывать не нужно.

В то же время решающая роль труда в производстве настоятельно требует дальнейшего научного анализа вопросов его использования, тем более что применяемая в настоящее время система тарифов и практика нормирования далеко не всегда удовлетворительны.

В рассматриваемой проблеме построения оптимального плана и его показателей вопросы использования труда как основного производственного фактора также должны занимать важное место. Однако ввиду указанных особенностей труда изучение этих вопросов, несомненно, представляет нелегкую задачу и потребует специальных исследований. Схематизированное, модельное представление этих вопросов должно привести к построению новых, более сложных схем, и все же выводы и результаты, полученные при таком изучении, будут учитывать не все реалии и обстоятельства и потому смогут лишь с осторожностью применяться на практике.

Несмотря на сказанное и на недостаточную исследованность данного вопроса, нам представляется, что и здесь применяемый в работе подход будет плодотворным (как один из возможных путей) и уже на первых порах позволит получить полезные выводы. Мы здесь будем говорить об одном из таких путей, так как сопоставление и оценка труда в соответствии с его оплатой по действующим сдельным и тарифным ставкам также представляет некоторый метод приведения сложного труда к простому, а тем самым получения грубого приближения к относительным оценкам различных категорий труда.]

Рассмотрим сейчас тот случай, когда единственным существенно-переменным фактором является труд.

Если имеется только один вид труда (например, неквалифицированная рабочая сила или рабочая сила одной определенной специальности), вопрос решается весьма просто. Из всех возможных способов изготовления каждого вида продукции, очевидно, в оптимальном плане нужно остановиться на том, который требует наименьшего рабочего времени на единицу продукции. Оценку для часа времени этого труда можно принять, например, равной единице. Так как производственный фактор в данном случае только один, то оценка для единицы каждого вида продукции (вернее, работы по ее изготовлению) будет равна затратам в оптимальном плане — минимальному времени, необходимому для производства этой единицы. Это соответствует тому, что К. Маркс называет «общественно-необходимым рабочим временем» с той разницей, что оно исчисляется только применительно к рассматриваемому производственному участку[\*]. И в данном случае, когда закон стоимости действует в своей простейшей форме, соотношения о. о. оценок не отличаются от соотношений стоимостей. Теперь рассмотрим тот же вопрос для более сложного случая.

**Оценка труда разной квалификации.** Предположим теперь, что имеется несколько категорий труда, различных по своему роду, специальности или квалификации. Как произвести их сравнительную оценку? Известные возможности для

---

\*[Так, если при одном возможном способе требуется четыре часа рабочего времени, а при другом — два часа и, кроме того, нет никаких ограничений для применения последнего способа (другие факторы не лимитированы), то этот способ и будет систематически применяться, и в соответствии с ним установится общественно-необходимое рабочее время.]



**Таблица 24**  
**Нормы времени и категории рабочей силы**  
**для выполнения комплекса работ**

Категории рабочей силы		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>
Фонд рабочего времени (часов в день)		640	1520	1000
Вид работ	Объем работ (в единицах)	Нормы времени на единицу работы (в часах)		
I	10 000	10	20	—
II	2000	50	—	40
III	50 000	—	2,5	1,5
IV	10 000	3	—	—
V	20 000	2	2	2

такого сопоставления дает всегда существующая в той или иной степени взаимозаменяемость различных категорий труда. Например, работа может быть выполнена и менее квалифицированным рабочим, но со значительно меньшей производительностью, либо заменена эквивалентной работой другой специальности. Иногда работа сварщика может быть заменена работой клепальщика, кузнеца — работой сварщика и т. д. Часто эта замена может осуществляться более сложным образом — через замену одного вида продукции другим, требующим для своего производства рабочей силы иных категорий. Для некоторых работ определенная специальность и квалификация может оказаться незаменимой.

В табл. 24 приведен иллюстративный числовой пример, в котором участвует рабочая сила трех категорий (частично взаимозаменяемых) и ряд работ, подлежащих выполнению. Для каждой категории рабочей силы указан фонд ее рабочего времени, а также нормы времени при выполнении работ (если оно возможно).

Требуется всю совокупность работ произвести в кратчайший срок. Оптимальный план приведен в табл. 25. То, что этот план действительно оптимальный, легко проверить следующим образом (ср. вывод 12): принимая оценки часа труда рабочей силы равными 1 для категории *B*, 2,0 для *A* и 0,67 для *B*, убеждаемся, что затраты труда в способах, используемых в приведенном плане, наименьшие (прочие затраты, как мы это оговорили, во всех способах одинаковы). При этом выполнение работ укладывается в имеющийся фонд рабочего времени (в кратчайший срок — 125 дней).

На самом ходе решения, в частности, на процессе нахождения о. о. оценок мы останавливаться не будем, так как оно по существу не отличается от решения примера в главе I § 2 (стр. 143 и далее).

Каков смысл указанных оценок? Эти оценки говорят о том, что в данных условиях (оценки, как всегда, конкретны), час труда рабочей силы категории *A* имеет ту же ценность для производства, что и 2 часа труда рабочей силы категории *B* — одно может быть заменено другим. Этой оценкой следует руководствоваться при исчислении затрат, распределении работ и пр. Но ни в коем случае не следует эти оценки

Таблица 25

## Оптимальный план

Виды работ	Единицы измерения	Категории рабочей силы			Всего работ
		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	
I	часы	50 000	100 000	—	10 000
	физ. ед.	5000	5000	80 000	
II	часы	—	—	2000	2000
	физ. ед.	—	50 000	45 000	
III	часы	—	20 000	30 000	50 000
	физ. ед.	30 000	—	—	
IV	часы	10 000	—	—	10 000
	физ. ед.	—	40 000	—	
V	часы	—	20 000	—	20 000
	физ. ед.	—	—	—	
Всего часов		80 000	190 000	125 000	

непосредственно связывать с тарифными сетками, оплатой труда. Так, в условиях крайнего недостатка сварщиков может оказаться, что оценки дня работы сварщика и неквалифицированного рабочего относятся как 8 : 1. Это отнюдь не значит, что сварщику нужно платить в 8 раз больше, но этим соотношением оценок нужно руководствоваться в вопросах организации производства. При таком соотношении, например, можно затратить даже 5–6 часов неквалифицированного труда, чтобы выиграть час работы сварщика. Скажем, в таких исключительных условиях имеет смысл придать ему постоянного подсобного рабочего, если это увеличит производительность труда сварщика хотя бы на 20%. {Другой пример. Пусть предприятие вынуждено почти весь свой состав направить на работу грузчиками для доставки топлива. В этот период о. о. оценки квалифицированного и неквалифицированного труда одинаковы. Это отнюдь не означает, что одинаковой должна быть и оплата труда.}

**Оценка продукции через затраты труда.** Оценки различных категорий труда позволяют получить и оценки продукции. Например, на одну единицу I работы тратится 10 часов труда *A* или 20 часов труда *B*. Поэтому оценка для нее  $1 \times 20 = 2 \times 10 = 20$ . Таким же образом, например, IV работа требует 3 часа труда *A*, что дает, по приведении к труду *B*,  $3 \times 2 = 6$  часов. Следовательно, и в этом случае, как и в простейшем, для получения о. о. оценки продукции нужно подсчитать затраты необходимого рабочего времени, но если труд квалифицированный, то привести его к простому труду (или, вообще, к труду одного вида). Этот теоретически хорошо известный принцип, применяемый при исчислении стоимости, дополнен здесь только некоторой количественной методикой приведения труда к простому — определением коэффициентов приведения, объективно обусловленных данной конкретной обстановкой.

Таким образом, приходим к следующему выводу:

**Вывод 17.** В ряду прочих производственных факторов получает определенную о. о. оценку час труда каждой категории. Для каждой категории труда получается определенный, объективно обусловленный коэффициент приведения его к простому труду, величина которого зависит от конкретных условий. В случае, если единственным видом затрат при производстве данной продукции является труд (или все другие виды затрат не лимитирующие, избыточные), то соотношение о. о. оценок для разных видов продукции определяется затратами труда на их единицу, причем труд всех категорий должен быть приведен к простому при помощи коэффициентов, о которых сказано выше.

Мы не будем подробно останавливаться на многообразных свойствах и применениях о. о. оценок труда. Тут полностью сохраняют силу выводы 12–16. В частности, вывод 16 говорит о том, что соотношение о. о. оценок рабочей силы может ориентировать в вопросе о целесообразности перевода рабочих некоторых специальностей с одного предприятия на другое, а также в вопросах организации подготовки по тем или иным рабочим специальностям.

В заключение укажем, что даже грубое определение о. о. оценок квалифицированной рабочей силы и применение этих оценок в вопросах использования труда могло бы дать существенный эффект. Так, сейчас нередки случаи, когда в отдельные периоды времени рабочие высокой квалификации используются на простых работах, где они без особого ущерба могли бы быть заменены менее квалифицированными. С другой стороны, иногда даже мало обученным рабочим поручают сложные, не соответствующие их квалификации работы, что приводит к значительной доле брака, крайне низкой производительности труда, неполному использованию оборудования.

Причиной этого, наряду с дефектами календарного планирования, штурмовщиной и пр., является неконкретность оценки труда. Действительно, тарифные сетки и нормы, которыми руководствуются, если вообще выбирают способ производства, исходя из себестоимости, не учитывают особенностей момента<sup>{1}</sup>. [Они особенно дезориентируют при резких изменениях условий работы и производственных заданий, как это имело место, например, в период Отечественной войны, когда коренным образом изменился рабочий состав, потребность в различных профессиях и их общественная значимость. Необходимо сказать, что потребность в правильной народнохозяйственной оценке труда возникает не только в связи с его различиями по квалификации, но и по другим параметрам: характеру и месту приложения, периодам времени и т. д. (мужской и женский труд, различия в физической силе и возрасте, труд в отдельных местностях, сезонность)]\*].

Принципиально определение такой народнохозяйственной оценки отдельных категорий труда на основе анализа эффективности его применения, потребности в

---

<sup>{1}</sup>{Они особенно дезориентируют в военное время, когда и программа работ и состав рабочей силы коренным образом изменились. Использование же о. о. оценок позволило бы в основном распределить работу так, чтобы квалифицированная рабочая сила, прежде всего дефицитных специальностей, была занята только на работах высокой сложности и трудности.}

\*[Как мы уже отмечали, различие в о. о. оценке разных категорий труда никак не противоречит тому, чтобы при использовании их на одной и той же работе оплата труда была бы одинаковой, т. е. не нарушает принципа равной оплаты за равный труд.]

нем и его ресурсов представляется вполне возможным. Наличие оценок, соответствующих конкретной обстановке, было бы весьма полезным: это способствовало бы правильному распределению и использованию труда. (Имеющиеся в этом отношении недостатки неоднократно отмечались в печати, например, случаи, когда физически здоровые мужчины заняты на легких работах, тогда как на тяжелых применяется женский труд). Использование таких оценок было бы важно при экономическом анализе целесообразности развертывания или расширения определенных предприятий в данном районе, при определении эффективности механизации и автоматизации производства и т. д.

Далее, в целях стимулирования правильного распределения труда, создания заинтересованности в этом и предприятий и самих трудящихся эти народнохозяйственные оценки должны получить определенное отражение в оплате труда и хозяйственном расчете, хотя, как уже упоминалось, мы не считаем, что зарплата должна непосредственно соответствовать народнохозяйственной оценке эффективности труда. Следует учитывать также, что при неполноценном использовании труда данного человека ущерб терпит не только он сам, но и государство, не получая полной отдачи от него. Поэтому, например, мог бы быть принят такой порядок, при котором предприятия, использующие особенно дефицитные категории рабочей силы, вносили бы определенную плату в особый фонд. Это способствовало бы предотвращению неоправданного использования рабочих дефицитных специальностей и в то же время стимулировало занятость у тех категорий, по которым имеются резервы].

#### § 4. Мероприятия по экономии дефицитного материала. Оценка его

**Дефицитные материалы.** Рассмотрим тот случай, когда единственным переменным фактором являются материалы. Как было показано в предыдущем параграфе, в случае, когда единственным видом затрат для производства материалов (кроме, быть может, избыточных факторов) является труд, о. о. оценки материалов определяются количеством необходимого для их производства труда, приведенного к простому. Если наряду с трудом в производстве материалов участвуют еще и некоторые другие факторы (например, электроэнергия), то и эти затраты можно привести к труду, используя их о. о. оценки.

Из таких оценок материалов и нужно исходить. Иначе говоря, при решении вопроса об их использовании надлежит из двух материалов, применимых для изготовления данной продукции и равноценных по результату, выбирать тот, при использовании которого суммарные затраты окажутся меньшими. Однако так обстоит дело только в том простейшем случае, когда нет других лимитирующих факторов, и потому имеется возможность получения данного материала в требуемых количествах в соответствии с его о. о. оценкой (т. е. с соответствующими затратами труда). Однако если производство данного материала по тем или иным причинам ограничено (ограниченность источников сырья, недостаток оборудования, загруженность транспорта) и не полностью удовлетворяет потребность в нем, то вопрос о его наилучшем использовании должен решаться иначе. Такого рода материал мы будем называть *дефицитным*. При подобном широком понимании этого термина сюда войдет довольно много важных материалов.

Таблица 26

Затраты материала и труда на единицу продукции каждого вида

Вид про- дукции	Число изделий	Затраты на одно изделие				Себе- стоимость изделия (в руб.)
		материала		труда		
		кг	руб.	часов	руб.	
I	6000	5	20	20	40	60
II	1200	100	400	100	200	600
III	2000	25	100	10	20	120
IV	100	500	2000	1000	2000	4000
V	100 000	1	4	15	30	34

[Наряду с увеличением производства дефицитного материала обычно имеется и другой способ его получения — экономия материала, сокращение его расхода, замена другими материалами или иными производственными факторами. Этот путь получения материала также связан с определенными затратами, объективно определяемыми сложившейся ситуацией<sup>[\*]</sup>. По отношению к дефицитному материалу, производство или поступление которого не может быть увеличено, этот второй способ его получения и должен определять о. о. оценку материала в конкретно сложившихся в данный момент условиях. При ее исчислении могут учитываться также и потери, вызванные невозможностью применения данного материала там, где оно было бы эффективно.]

Покажем на примере, как можно подойти к вопросу о правильном использовании такого материала и его оценке.

ПРИМЕР. Материал *A* применяется в нескольких видах продукции. Расход материала и труда на одно изделие каждого вида дан в табл. 26. Всего на производство заданного объема продукции (скажем, месячной программы) нужно 350 тонн материала *A*. В настоящий момент его может быть предоставлено только 200 тонн. Пусть себестоимость материала<sup>+</sup> равна 4 руб./кг, оценку часа труда будем считать равной 2 руб. Необходимо сэкономить 150 тонн материала *A*. Оказалось, что за исключением изделий IV вида во всех остальных его можно заменить недефицитным материалом *B*, который стоит 2 руб./кг. Правда, потребуются большие затраты этого материала и, главное, труда для его обработки.

Необходимые цифры приведены в табл. 27. Предположим, что получающиеся в обоих случаях изделия примерно одинаковы. Иногда, даже когда это не так, их

\*Огромные и разнообразные возможности экономии металла и его замены указаны в речи Л. И. Брежнева на XXI съезде КПСС: «Подсчитано, например, что для строительства емкостей для хранения нефти и других продуктов объемом в 130–150 млн кубометров требуется около 3,5 млн тонн листовой стали. Если же эти резервуары построить из железобетона, можно сэкономить более полутора миллионов тонн металла. Не меньшие возможности имеются в этом отношении в строительстве, в металлообрабатывающей промышленности, в судостроении, в нефтяной и газовой промышленности, в городском хозяйстве». (Стенографический отчет, т. I, стр. 425).

<sup>+</sup>Эта цифра может учитывать не только себестоимость, но и всю совокупность затрат, связанную с производством изделия.

Таблица 27

## Затраты при использовании недефицитного материала

Вид продукции	Число изделий	Затраты на одно изделие				Себестоимость изделия (в руб.)	Увеличение себестоимости (в руб. на изделие)	Увеличение себестоимости (в руб. на 1 кг А)
		материала В		труда				
		кг	руб.	кг	руб.			
I	6000	20	40	50	100	140	80	16
II	1200	100	200	500	1000	1200	600	6
III	2000	50	100	60	120	220	100	4
V	100 000	4	8	20	40	48	14	14

можно «привести» к одинаковому качеству. Например, если в первом варианте изготовления изделие имеет втрое больший срок службы, чем во втором, то нужно затраты на одно изделие в первом случае сравнить с затратами на три изделия во втором (имеется в виду, что сопоставляются изделия с непродолжительным сроком службы).

Из табл. 27 мы видим, что во всех случаях переход на заменитель связан с увеличением затрат. Но пойти на это все-таки нужно. Где это вызовет наименьшие потери? На первый взгляд кажется, что потери будут наименьшими, если мы применим заменитель в V изделии, где себестоимость возрастает только на 41%, тогда как его применение в I изделии даст рост на 133%, во II — на 100%, в III — на 83%. Однако такое решение оказывается поверхностным.

**Оптимальное решение и выводы.** Правильное решение найдем так. Подсчитаем для каждого изделия, где возможна экономия, какие затраты нужно произвести, чтобы сэкономить 1 кг материала А. Для I изделия экономия 5 кг требует 80 руб. дополнительных затрат, т. е. 16 руб. на кг. Таким же образом для II — 6 руб., для III — 4 руб., для V — 14 руб. на кг. Нам нужно сэкономить 150 000 кг; значит, производим экономию на изделиях III и II, что вызывает наименьшие потери (для 1000 изделий II применим материал В, для 200 — материал А). В изделиях I, IV и V используем материал А. Общее повышение себестоимости составит  $1000 \times 600 + 2000 \times 100 = 800\,000$  руб. Если бы мы для достижения той же экономии материала А (150 тонн) во всех изделиях, где это возможно (I, II, III и V), в половине продукции ( $150 : 300 = 1/2$ ) использовали заменитель, то потери составили бы:

$$1/2 \times (6000 \times 80 + 1200 \times 600 + 2000 \times 100 + 100\,000 \times 14) = 1\,400\,000 \text{ руб.}$$

Таким образом, по сравнению с этим простейшим, механическим оптимальное решение дает выигрыш в 600 тыс. руб. или 300 тыс. рабочих часов. Также значительно большие потери мы получили бы, если, как говорилось выше, подошли поверхностно к анализу вопроса и экономии материала А произвели на V изделии.

Полученное решение дает одновременно и значение о. о. оценки материала А. Именно, раз мы считаем рациональным для сокращения на 1 кг расхода материала

А увеличение затрат на 6 руб., то его оценка должна быть повышена на эту величину и составить  $4 + 6 = 10$  руб. за кг. Если исходить из такой о. о. оценки материала А и, пользуясь ею, пересчитать затраты на единицу каждого изделия (на основании табл. 26), то получим следующие величины: для I изделия — 90 руб., для II — 1200 руб., для III — 270 руб., для V — 40 руб. Сопоставляя эти величины со значениями себестоимости в табл. 27, видим, что выбранным вариантам изготовления всех изделий отвечают наименьшие затраты.

Оценки дефицитных материалов обладают всеми характерными свойствами о. о. оценок и имеют те же применения, что и в рассмотренных примерах. Отметим здесь только, что полученная оценка материала А 10 руб./кг реальна; поэтому в тех случаях, когда расчет, включающий такую оценку, покажет рентабельность применения материала А, а не заменителя, оно может быть обеспечено этим материалом. Это позволяет избежать особенно больших потерь из-за его недостатка.

[Отношение о. о. оценки дефицитного продукта к его цене (или себестоимости), в данном примере  $10 : 4 = 2,5$ , можно рассматривать как коэффициент, количественно характеризующий дефицитность данного материала. Такого рода коэффициенты дефицитности иногда применялись в проектной практике, чтобы скомпенсировать несоответствие цен некоторых материалов их народнохозяйственной значимости. Однако их величина выбиралась в большой мере произвольно, без использования описанной выше методики.]

Далее о. о. оценка может быть использована и при решении вопросов, связанных с производством материала А, где он сам выступает в качестве продукции. Пусть, например, представляется возможным наладить производство материала А из местного сырья, причем он обойдется по 8 руб. за кг. Если исходить из его себестоимости, то предложение должно быть отвергнуто, так как увеличивает затраты вдвое. Если же исходить из о. о. оценки, то такое производство представляется вполне рентабельным, и, конечно, именно этот вывод будет правильным. При этом, если объем производства материала А из местного сырья будет достаточным, то при изготовлении изделия II целесообразно отказаться от использования заменителя, а за о. о. оценку для А нужно будет принять 8 руб.

Полученные результаты сформулируем так:

**Вывод 18.** Для дефицитного материала, т. е. такого, возможность производства которого ограничена (в данный период), о. о. оценка определяется не только затратами труда непосредственно на производство единицы материала, а всеми конкретными условиями, связанными с его производством и использованием и, в частности, затратами труда, вызванными необходимостью его экономии или замены. Величина о. о. оценки зависит от соотношения потребности в данном материале с наличным его производством.

Если исходить из так определенной о. о. оценки дефицитного материала, то в вопросах его использования можно руководствоваться принципом рентабельности: выбирать тот материал, который обеспечивает минимум затрат, но при их подсчете дефицитный материал нужно учитывать по о. о. оценке.

Необходимо сказать, что такое отступление от себестоимости при определении цен на дефицитные материалы использовалось в экономической политике Совет-

ской власти как мера, стимулирующая их экономию. Так, в 1940 г. [и неоднократно в последующие годы] были значительно подняты цены на цветные металлы и, прежде всего, на медь. Что нового по сравнению с этим дает вышеприведенный вывод относительно о. о. оценки дефицитных материалов?

Во-первых, он говорит о том, что такое изменение расчетной цены было бы правильным по отношению ко всем дефицитным материалам, в частности таким, как черные металлы и цемент, и способствовало бы более рациональному их использованию. Во-вторых, он указывает на то, что эта цена должна быть найдена определенным объективным образом так, чтобы она была реальной, т. е. во всех случаях, когда использование данного материала, несмотря на его повышенную цену, оказывается рентабельным, его применение должно быть полностью обеспечено. Это условие фактически не всегда соблюдалось, следствием чего были многочисленные случаи, когда невозможность получения сравнительно небольшого количества материала влекла простой, омертвление средств (на стройках), ухудшение качества продукции и т. д. И в то же время те же материалы в других производствах могли бы быть сравнительно безболезненно, во всяком случае, с гораздо меньшими потерями сэкономлены или заменены недефицитными.

Такого рода потери, связанные с нереальностью цен, т. е. с тем, что, несмотря на явную необходимость дефицитного материала в данном месте (где его применение рентабельно при любой мыслимой цене), он не предоставляется, весьма часты. Так, на нефтедобывающем предприятии полностью не используются возможности нефтедобычи и происходят большие потери нефти из-за недостатка часто простейшего оборудования. И, скажем, тонна металла, использованная для постройки нефтехранилища, могла бы сберечь десятки тонн нефти в месяц<sup>{2}</sup>. Наряду с этим металлургические и металлообрабатывающие предприятия простаивали и работали не на полную мощность из-за трудностей в доставке того или иного вида сырья и материалов, вызванных недостатком горючего. И опять-таки вполне возможно, что дополнительная тонна нефти могла бы на десять тонн сократить потери в выпуске металла. Между тем в обоих случаях такое положение могут счесть оправданным, тогда как при правильном распределении и снабжении можно было бы дополнительно получить и десятки тонн нефти и десятки тонн металла. Примеры подобного рода далеко не единичны[\*].

Использование правильных реальных оценок дефицитных материалов, хотя бы и определенных грубым образом, и примерное следование этим оценкам, т. е. применение дефицитного материала в тех случаях, когда это бесспорно выгодно, несмотря на его повышенную оценку, привело бы к устранению потерь указанного рода. Нужно для этого количество материала могло бы быть получено за счет

<sup>{2}</sup>{См. «Правда» от 4.09.1942 г., заметка «Нефть уходит под откос».}

\*[Еще более внушительные потери такого рода отмечены в речи М. Т. Ефремова на XXI съезде КПСС: «На нефтепромыслах нашей области ежедневно сжигается на факелах 2 миллиона кубометров попутного газа. В 1957 г. было сожжено 664 миллиона кубометров газа. Этого газа хватило бы городу Куйбышеву как топлива на целых 3 года. Сжигание попутного газа на факелах имеет место на многих нефтепромыслах страны. Происходит это из-за отсутствия, главным образом, сетей и сооружений для транспортировки и утилизации газа, а также из-за того, что еще не решена проблема хранения в больших объемах». (Стенографический отчет, т. II, стр. 28).]



экономии его там, где эта экономия окажется выгодной при расчете по о. о. оценкам, несмотря на убыточность по обычной калькуляции или на то, что такое применение дефицитного материала освящено традицией.

[В заключение отметим, что само понятие дефицитности материала и размер дефицита являются весьма условными. Именно, область экономически целесообразного применения данного материала, а в связи с этим и потребность в нем зависят от действующих цен. Так, если бы в рассмотренном примере цена материала *A* была не 4 руб., а 10 руб., то для изделия III сразу было бы запланировано использование материала *B* и это изделие не было бы учтено в заявке на материал *A*. Таким же образом от установленной цены зависит и определение экономически целесообразного объема производства данного материала.

Следовательно, установление экономически правильной цены материала, учитывающей конкретную экономическую обстановку, т. е. близкой к о. о. оценке, стимулируя экономию и замену материала, с одной стороны, и рост его производства, с другой, должно сбалансировать в плане объем потребности и производства и тем самым сделать данный материал уже недефицитным.

Проведенные выше рассуждения относительно установления оценки на уровне наименьшей, еще реализуемой экономии, или относительно совпадения оценок данного материала, если он фигурирует и как продукт и как сырье, могут внешне напомнить те или иные построения вульгарных экономических школ (закон равенства спроса и предложения) и субъективистской школы предельной полезности. В действительности применяемый нами анализ коренным образом отличается от этих теорий объективным подходом. Определяющими являются не спрос, не «полезность», а совершенно реальные для производства объективные данные: размер достижимой экономии, размер производственной потребности в данном материале на данном участке, затраты в определенном осуществимом производственном процессе. Наконец, как неоднократно разъяснялось, о. о. оценки в полном соответствии с трудовой теорией стоимости определяются необходимыми народнохозяйственными затратами (труда в конечном счете) для получения продукции в данных условиях (см. также § 5 и 6.)

### § 5. Целесообразное использование оборудования. Прокатная оценка

**Постановка вопроса.** До сих пор мы рассматривали такие задачи планирования, в которых оборудование считалось избыточным производственным фактором, и вопрос о его рациональном использовании не ставился. Между тем этот вопрос чрезвычайно актуален, его анализ обладает своими особенностями и приводит к важным выводам. При недостатке оборудования задачи правильного его распределения, направления оборудования туда, где оно может быть использовано наиболее полно и эффективно в соответствии с его техническими возможностями, а также наиболее эффективного применения уже установленного оборудования оказываются очень важными. Существующие способы решения этих вопросов разработаны неудовлетворительно и не гарантируют его правильности. Предлагаемый метод решения мы покажем на конкретном примере.

Таблица 28

## Производительность при выполнении работ вручную и машинами

Виды работ	Объем работы	При работе вручную		С помощью машины		Число машин, нужное на весь объем работы
		Дневная выработка (единиц)	Себестоимость единицы (в руб.)	Дневная выработка (единиц)	Себестоимость единицы (в руб.)	
I	2 000 000	40	0,6	1000	0,2	20
II	1 500 000	10	3,0	500	1,2	30
III	200 000	4	7,0	50	1,0	40
IV	40 000 000	200	0,15	10 000	0,05	40
V	2 500 000	20	1,5	500	0,3	50

ПРИМЕР. Известно, что эффективность применения различного оборудования и механизмов при транспортировке грузов, на земляных или погрузочно-разгрузочных работах и пр. существенным образом зависит от многих условий: объема и концентрированности работ, расстояний по перемещению и пр. Рассмотрим следующую задачу: работа может выполняться вручную (простейшим инструментом { — лопата, тачка}) или с помощью некоторых машин, имеющихся в ограниченном количестве. Пусть работы по своему характеру (укрупненно) разбиты на 5 видов. Для каждого вида работ известны дневная производительность при работе вручную и с помощью машины — табл. 28. Там же приведены объемы работ (в соответствующих единицах) и себестоимость единицы работы каждого вида.

Предполагается, что все затраты в себестоимости учтены правильно, а если это не так, то внесены необходимые поправки: более точно выполнено приведение квалифицированного труда к простому, затраты электроэнергии и горючего взяты по о. о. оценкам, также с учетом о. о. оценок в себестоимость включены и используемые дефицитные материалы. Кроме того, в нее включены все эксплуатационные расходы, а также амортизация и ремонт машин в части, связанной с производимой работой[\*].

В распоряжении имеется 100 машин, установленный срок выполнения всех работ — 100 дней. Требуется для каждого вида работ так выбрать способ их выполнения, чтобы общие затраты на все работы были минимальны. Решение несущественно изменилось бы, если бы мы поставили задачей при соблюдении прочих условий привлечение наименьшего числа работающих дополнительно вручную, помимо тех, кто обслуживает машины.

Во всех случаях (см. табл. 28) выполнение работы вручную обходится дороже, однако применение ручного труда необходимо, так как для выполнения всех работ

\*Известная амортизация оборудования происходит и в том случае, когда оно не используется; эту долю удобнее здесь не учитывать, так как она остается неизменной и на всех работах и во время простоя, следовательно, является постоянно затрачиваемым фактором.

Таблица 29

## Оптимальный план

Вид работ	Выполняется вручную			Выполняется машиной		
	Число рабочих	Объем работ	Затраты (в руб.)	Число машин	Объем работ	Затраты (в руб.)
I	500	2 000 000	1 200 000	—	—	—
II	—	—	—	30	1 500 000	1 800 000
III	500	200 000	1 400 000	—	—	—
IV	—	—	—	40	40 000 000	2 000 000
V	500	1 000 000	1 500 000	30	1 500 000	450 000
Всего	1500		4 100 000	100		4 250 000

в намеченный срок с помощью машин потребовалось бы не 100, а 180 машин. На каких же работах нужно применить машины, а на каких ручной труд?

С первого взгляда кажется, что машины нужно применять там, где они дадут наибольшее снижение себестоимости по сравнению с работой вручную, скажем, на работе III вида, где себестоимость снижается в семь раз. Однако такое решение, как мы увидим ниже, неправильное, поверхностное.

Для получения оптимального решения подсчитаем по каждому виду работ, насколько применение машины позволяет снизить общую себестоимость по сравнению с ручным трудом. Получаем для единицы работы I вида:  $0,6 - 0,2 = 0,4$ , а за машино-день:  $1000 \times 0,4 = 400$  руб.; таким же образом для работы II вида — 900 руб., для III — 300 руб., для IV — 1000 руб., для V — 600 руб. Отсюда ясно, что, прежде всего, машину следует применять на IV работе, затем на II, V, I и III работах. Для выполнения работы IV вида в 100 дней требуется 40 машин, для II — 30, для V — 50 машин. Этим машинный парк исчерпывается. Часть работ V вида (и полностью работы I и III вида) придется выполнять вручную.

Таким образом, получаем оптимальный план (табл. 29).

Для выполнения работ приходится привлечь 1500 человек, работающих вручную. Общие затраты на работы, минимально возможные в данных условиях, составляют 8 350 000 руб. Если бы мы, например, работу IV вида выполняли вручную, а работу III — машиной, как это показалось правильным при поверхностном анализе, то для выполнения работ потребовалось привлечь не 1500, а 3000 рабочих, а затраты возросли на 2 800 000 руб.

**Прокатная оценка.** Определяя оптимальное распределение машин, мы исходили из того, какую экономию дает машина за день ее использования на каждом виде работ. Машинный парк оказался исчерпанным на V виде работ, где за день использования машины экономия составляла 600 руб. Последняя цифра является важной: она показывает, что каждая лишняя машина позволит за день сэкономить 600 руб.; наоборот, отсутствие машины в течение дня на столько же повысит затраты. Таким образом, стоило бы ради дополнительного дня работы машины затратить 600 руб. Последнюю величину мы и назовем *прокатной оценкой* машины в

Таблица 30

**Учет прокатной оценки машин  
при определении «себестоимости»**

Вид работ	«Полная себестоимость» при работе машиной (с учетом прокатной оценки, в руб./ед.)	Себестоимость при работе вручную (в руб./ед.)
I	0, 8	<b>0, 6</b>
II	<b>2, 4</b>	3, 0
III	13, 0	<b>7, 0</b>
IV	<b>0, 11</b>	0, 15
V	<b>1, 5</b>	<b>1, 5</b>

данных условиях. Такая оценка объективно обусловлена и вполне реальна, так как каждый дополнительный день работы машины в самом деле позволяет сэкономить 600 руб. Наоборот, можно сэкономить день работы машины, увеличив затраты на 600 руб.

[Мы употребляем термин прокатная оценка, так как это есть оценка той платы, которая была бы оправдана, если бы такая машина бралась на некоторый срок напрокат (в аренду). Ее можно рассматривать и как *ренту с оборудования*, которую мы, хотя и не оплачиваем, но исчисляем ее возможный размер. Впрочем, нам представляется, что ее следовало бы отразить и в хозрасчете.

Экономический смысл прокатной оценки оборудования как фактора, влияющего на производительную силу труда, это характеристика размера той потенциальной экономии труда, которая в данных условиях может быть достигнута за счет применения данного фактора (дня использования машины). Поэтому при исчислении затрат или экономии этот фактор должен учитываться именно по такой оценке[\*]. (Не использовать машину в течение дня — значит потерять 600 руб. или соответствующее количество труда!)]

Теперь при подсчете «себестоимости» единицы работы каждого вида при выполнении ее машиной учтем эту прокатную оценку. Тогда, например, себестоимость (0,2 руб.) единицы работы I вида, на которой дневная производительность машины равна 1000 ед., мы должны увеличить с учетом прокатной оценки на  $600 : 1000 = 0,6$  руб., всего — 0,8 руб. Проводя такой же подсчет для остальных видов работ, найдем построенные на основе прокатной оценки «полные себестоимости работ» каждого вида (табл. 30).

Для сравнения рядом приведена себестоимость работы при выполнении ее вручную. Видим, что теперь только для II и IV работ их себестоимость при выполнении машиной оказывается ниже, чем при работе вручную, и одинаковой для V работы, что как раз и соответствует оптимальному плану (в табл. 30 цифры, соответствующие минимуму, выделены).

\*[Мы возвратимся к вопросу об экономическом смысле прокатной оценки в связи с анализом родственного вопроса о ренте, который проведен более подробно (см. стр. 188–198).]

Таким образом, если при подсчете себестоимости учитывать в числе затрат правильно определенную прокатную оценку машины, то при выборе способа выполнения работы можно руководствоваться принципом рентабельности, т. е. каждую работу выполнять способом, требующим наименьших затрат.

Только с учетом прокатной оценки, определенной в соответствии с конкретными условиями (объемы и виды работ, наличный парк машин), можно решать вопросы, связанные с использованием оборудования. Эта оценка показывает, что за день простоя машины мы теряем 600 руб., что каждый день использования машины на III работе приводит к потере  $50 \times (13,0 - 7,0) = 300$  руб. Напротив, для II работы ее выполнение вручную связано с потерей в 0,6 руб. на каждой единице работы. Если же прокатную оценку не учитывать, то могло показаться вполне оправданным и использование машины на III работе (поскольку это снижает ее себестоимость) и выполнение вручную II работы (поскольку обеспечить машинами все работы не удается).

Приведем еще пример. Предположим, что на работе V вида привлечение дополнительного рабочего, обслуживающего машину, позволит повысить ее производительность на 10%. Оценка рабочего дня — 30 руб. Будет ли это целесообразно? Подсчитаем себестоимость обычным образом. Затраты в день на работе V вида составляли  $500 \times 0,3 = 150$  руб. (см. табл. 28). Теперь они составят  $150 + 30 = 180$  руб. Увеличенная на 10% производительность машины — 550 единиц, и себестоимость единицы работы V вида окажется равной  $180 : 550 = 0,33$  руб., следовательно, возрастет по сравнению со старой (0,30 руб.). [Снизится и производительность труда рабочих, обслуживающих машину.] Таким образом, мероприятие кажется нерациональным. Проведем теперь подсчет, учитывая прокатную оценку. Прежнее значение себестоимости — 1,5 руб. (табл. 30). Затраты за день работы составляли  $500 \times 1,5 = 750$  руб., а с учетом дополнительного рабочего:  $750 + 30 = 780$  руб. Так как производительность равна 550, то себестоимость единицы работ V вида составит  $780 : 550 = 1,42$  руб. Затраты снижаются, т. е. мероприятие в данных условиях оправданно. Следует сказать, однако, что такое предложение будет далеко не всегда практически осуществлено. Если на данном участке машина имеется, то вопрос о том, как она могла бы быть использована на других, не ставится, а без этого подобные изменения представляются невыгодными и, вероятно, не будут произведены[\*].

[Напротив, включение прокатной оценки в расчет позволяет при экономическом анализе вариантов использования оборудования на отдельном предприятии учесть и общую обстановку. Это особенно важно для мощного и дорогостоящего оборудования (блуминги, шагающие экскаваторы, генераторы, химические агрегаты), производительность которого нередко определяет результаты работы целого предприятия, а обслуживается оно небольшим коллективом. Ясно, что меропри-

---

\*{Характерный пример этого рода приведен в газете «Правда» за 1/X-42 г. Показатели производительности труда и оплата труда оказываются тормозом для повышения эффективности использования щитов при добыче угля} [Характерные примеры такого рода неоднократно приводились в печати. Так, существующие показатели производительности труда и система оплаты нередко оказываются тормозом для интенсивного использования сложных агрегатов в угольной промышленности.]

ятия, даже незначительно повышающие производительность такого оборудования, будут оправданны (например, введение 4–6-часового рабочего дня для тех, кто обслуживает агрегат, или проведение для них специальных тренингов, если это повысит производительность агрегата хотя бы на доли процента). Поэтому, скажем, в металлургии справедливо придают большее значение показателям съема металла, чем даже себестоимости. Учет прокатной оценки в числе затрат привел бы к тому, что подобные мероприятия положительно отразились и на себестоимости.

Особенно важным нам представляется учет прокатной оценки для определения экономической эффективности автоматизации. Именно, если автоматизация обеспечивает повышение производительности сложного, дорогостоящего и полностью загруженного агрегата, то даже при весьма значительных затратах на ее осуществление и эксплуатацию, иногда даже больших, чем требовались при прежнем обслуживании агрегата, экономический расчет, включающий учет высокой прокатной оценки такого оборудования, подтвердит оправданность автоматизации. Применяемый экономический анализ может этого не показать.]

Еще пример. Машина должна быть отдана в ремонт. Срок ремонта 10 дней, его стоимость — 2000 руб. Можно произвести и ускоренный ремонт за два дня, но тогда он будет стоить 3000 руб. (оплата сверхурочных, применение более дорогих материалов и пр.). На первый взгляд неясно, оправданно ли это. Правильное решение можно получить только с учетом прокатной оценки. Именно, потеря восьми дней работы машины (в результате излишней продолжительности ремонта) по ее прокатной оценке составит  $8 \times 600 = 4800$  руб., разница же в стоимости ремонта только 1000 руб. Таким образом, оказывается, что в условиях недостатка машин ускоренный ремонт выгоднее, несмотря на связанное с ним увеличение затрат.

Прокатную оценку оборудования необходимо учитывать при решении вопросов, связанных с возможностью выполнения плана при изменениях в используемых средствах. Так, в рассматриваемом примере у нас было 1500 человек, работающих вручную, и, скажем, 300 человек, обслуживающих машины, всего 1800 рабочих. Срок работы был 100 дней. Как изменится этот срок, если привлечь дополнительно еще 300 рабочих? Конечно, ошибочно ожидать, что увеличение числа рабочих на  $300 : 1800 = 16,7\%$  позволяет сократить срок на  $16,7 : 116,7 = 14,3\%$ , т. е. выполнить работу за 85,7 дня, ибо число машин не увеличилось. Правильный ориентировочный расчет нужно проводить так. Общая производительность в день всех привлеченных средств равна 83 500 руб., а с учетом прокатной оценки — 143 500 руб. Производительность одного рабочего на работе V вида, где рационально использовать дополнительных рабочих, составит в день  $20 \times 1,5 = 30$  руб., а производительность всех дополнительно принятых рабочих —  $300 \times 30 = 9000$  руб. Рост производительности  $9000 : 143 500 = 6,3\%$ . В соответствии с этим и срок работ может быть сокращен на  $6,3 : 106,3 = 5,9\%$ , т. е. работы могут быть выполнены за 94,1 дня.

Часто этого не принимают в расчет. Так, после Указа Верховного Совета от 26 июня 1940 г. ряд руководителей предприятий считал, что переход с 7-часового на 8-часовой рабочий день «автоматически» приведет к увеличению выпуска продукции на 14–15%. В действительности же на большинстве предприятий рост составил только 6–7%. Увеличение продукции на 14–15% было достигнуто лишь там, где были вскрыты и привлечены резервы оборудования.

[Эти прикидки не учитывали также того, что при менее продолжительном рабочем дне часовая производительность выше. В настоящее время при экономическом анализе вопросов, связанных с переходом на 7-часовой, а в дальнейшем на 6–5-часовой рабочий день, этот момент должен получить особое значение. В частности, он особенно существен, когда речь идет о производительности труда рабочих, обслуживающих сложное, дорогостоящее оборудование, когда сокращение рабочего дня позволяет одновременно повысить интенсивность использования оборудования. Истинная величина этого эффекта должна определяться с учетом прокатной оценки оборудования, что в ряде случаев выявит и экономическую эффективность сокращения рабочего дня. Предположим, например, что на работе V вида при переходе на 7-часовой рабочий день часовая производительность агрегата повысится на 5% (более интенсивное его использование благодаря повышенному вниманию, работе на больших скоростях и т. п.). Будем считать, что эксплуатационные затраты в связи с переходом на 7-часовой рабочий день повысятся на 14%. Учитывая рост производительности, определим новую о. о. оценку единицы работы этого вида. Дневные затраты составят:  $150 \times 1,14 = 171$  руб., а вместе с прокатной оценкой — 771 руб. Но поскольку будет выполнено  $500 \times 1,05 = 525$  единиц работы V вида, затраты на единицу снизятся и составят  $771 : 525 = 1,47$  руб. вместо 1,5 руб. Таким образом, в этих условиях уменьшенный рабочий день даст положительный эффект.

Из этого расчета, несмотря на его условность, ясно, что перевод на сокращенный рабочий день экономически целесообразен в первую очередь в непрерывных производствах, использующих сложное и высокопроизводительное оборудование, где есть трудовые ресурсы, позволяющие полностью обеспечить его работу.]

Далее, учет прокатной оценки позволяет правильно подойти к вопросу об определении величины [народнохозяйственной] себестоимости (трудоемкости) работ каждого вида. Для работ I и III, которые в оптимальном плане выполняются вручную (см. табл. 29), эта оценка, естественно, определяется себестоимостью единицы работ при ручном способе, т. е. (см. табл. 28) составляет для I работы 0,6 руб., для III — 7,0 руб.

Переходя к работе V вида, которая частично выполняется вручную, частично машиной, имеем в табл. 28 два значения для себестоимости (1,5 руб. и 0,3 руб.). В конечном счете, если работа уже произведена и качество ее одинаково, очевидно не имеет значения, как она произведена: оценка должна быть одной и той же, ибо отдельная единица товара «имеет значение лишь как средний экземпляр своего рода»[\*]].

На какой же из цифр следует остановиться? Мы утверждаем, что на цифре 1,5. В самом деле, если бы потребовалось дополнительно выполнить единицу работы V вида, то, поскольку все машины заняты, ее пришлось бы делать вручную, затратив 1,5 руб. Так же и сокращение объема работ V вида на единицу позволило бы снизить затраты на 1,5 руб.

Итак, количество труда, общественно-необходимого для воспроизводства одной единицы работы V вида, определяющее ее стоимость, дается именно цифрой

---

\*[Маркс К. Капитал. — М.: Госполитиздат, 1954. — Т. I. — С. 45.]

1,5 руб.\* Наконец, и по отношению к работам II и IV видов, которые производятся только машиной, правильная оценка должна учитывать значение прокатной оценки машины, т. е. должна быть взята из табл. 30 (выделенные цифры). В самом деле, чтобы произвести дополнительно 500 единиц работы II вида с применением машины (что рациональнее), потребуются затраты  $500 \times 1,2 = 600$  руб. Кроме того, чтобы высвободить нужный для этого день работы машины, придется еще 500 единиц V работы выполнять вручную, что приведет к увеличению затрат на  $500 \times 1,2 = 600$  руб.; дополнительные затраты составят  $600 + 600 = 1200$  руб., откуда себестоимость равна  $1200 : 500 = 2,4$  руб. Именно такая цифра и указана в табл. 30.

Приведенный пример можно интерпретировать и иным образом. Известно, что в металлообрабатывающей промышленности применение одних типов оборудования (штамповка — прессовое оборудование, работа на автоматах) значительно повышает производительность труда и снижает себестоимость продукции по сравнению с другими (обычные станки для механической обработки). Однако такое оборудование часто настолько загружено, что не удается использовать этот более совершенный способ работы во всех случаях, где он применим и эффективен. Для каких изделий его лучше всего использовать? Пусть соответствующие данные о производительности и себестоимости даются цифрами из табл. 28, причем пятый столбец соответствует высокопроизводительному оборудованию (упоминавшиеся пресс или автомат).

В таком случае приведенный выше метод решения позволит правильно определить, для каких изделий следует применить более производительное оборудование. Именно, лучшее распределение будет найдено, если учесть его прокатную оценку. В случае если имеется несколько типов такого высокопроизводительного и дефицитного оборудования, то придется определять для каждого из них свою прокатную оценку<sup>[\*\*]</sup>. Эту прокатную оценку непременно нужно учитывать и при исчислении о. о. оценки (правильной «себестоимости») продукции, иначе получится пестрое и лишнее смысла соотношение. Так, себестоимость сложной детали, обрабатываемой на автомате, может оказаться ниже, чем простой, поставленной на обычные станки. Прокатная оценка важна и для распределения оборудования. Более высокая прокатная оценка одного и того же его типа оборудования на одном заводе по сравнению с другим покажет, что первый завод больше нуждается в его получении, чем второй.

---

\*Обычно в таких случаях находится и используется не стоимость воспроизводства, а средняя себестоимость производства, например, в данном случае для работы V вида:

$$(1\,000\,000 \times 1,5 + 1\,500\,000 \times 0,3) : 2\,000\,000 = 0,78 \text{ руб.}$$

Такую цифру найти можно, но она сравнительно бесполезна: пользоваться ею при распределении труда и корректировке текущего плана, конечно, неправильно, так как затраты, нужные для производства единицы V работы, и экономия, получающаяся при отказе от данной работы, определяются не этой цифрой. Подобным же образом можно находить среднюю скорость движения бомбы за все время ее падения. Однако для определения эффекта ее действия важна вовсе не она, а та скорость, которую бомба будет иметь в момент попадания.

\*\*[Методы расчета прокатных оценок при одновременном использовании нескольких видов оборудования даны в Приложении II.]



Результаты можно сформулировать следующим образом.

**Вывод 19.** При решении вопросов, связанных с использованием оборудования, необходимо учитывать сам факт его занятости при производстве данной продукции или вида работ, вводя в расчет прокатную оценку этого оборудования. Ее величина, равная экономии труда, которую дает дополнительная единица оборудования в оптимальном плане, определяется всеми конкретными условиями: объемом и видом работ, подлежащих выполнению, наличием этого вида оборудования и пр. В оптимальном плане выбор средств выполнения работы определяется принципом минимума затрат (при условии, что в затратах с помощью прокатной оценки учтена занятость оборудования). Прокатная оценка оборудования должна учитываться и в о. о. оценках каждого вида продукции и работ. Прокатная оценка имеет те же свойства и такие же применения, как и другие виды о. о. оценок.

**Использование оборудования.** Вопрос о правильном и полном использовании оборудования чрезвычайно важен и в то же время решен наименее удовлетворительно. Если случаи простоя рабочей силы единичны, то простой или неполное использование оборудования встречается повсеместно. Вместе с тем в других местах или в другие моменты времени недостаток такого оборудования приводит к огромным потерям. Этот вопрос получил соответствующую оценку {в докладе тов. Маленкова} [еще] на XVIII партконференции, где указывалось, что случаи не использования и нерационального использования оборудования имеют массовый характер. Но и в настоящее время вопрос не решен. [На необходимость наиболее полного использования оборудования было обращено большое внимание в выступлении товарища Н. С. Хрущева на сессии Верховного Совета по вопросам перестройки управления промышленностью (январь 1957 г.). Контрольные цифры на текущее семилетие также ставят как одну из основных задач значительное улучшение использования производственных мощностей действующих предприятий.

Сейчас оборудование используется далеко не полно.] Нередки случаи, когда кран или транспортер систематически занят только 5–10% календарного времени. И в то же время в других местах большие погрузочно-разгрузочные работы производятся вручную. В одном месте экскаваторы и скреперы используются от случая к случаю при рытье небольших котлованов и планировке малых участков, в другом — большие земляные работы (по сооружению оросительных каналов, дорог) производятся в значительной части вручную или малопроизводительными механизмами. Чем вызвано такое положение? Тем, что фактор первостепенной важности — занятость (одалживание) сложного, нередко дефицитного оборудования в данном производстве никак количественно не учитывается и не оценивается в должной мере. Вследствие этого применение такого оборудования оказывается почти всегда выгодным по калькуляции — дает меньшую себестоимость работ — даже там, где оно используется редко и неполноценно. В результате применение оборудования кажется оправданным в гораздо большем числе случаев, чем позволяет его фактическое наличие. Насколько трудно решить вопрос о том, куда нужно направить оборудование, показывает даже разобранный выше упрощенный пример. Поэтому оно распределяется в известной мере случайно. Далее, если оборудование находится на балансе, то предприятие держится за него, так как даже при редком

использовании оно обеспечивает все же некоторый рост производительности труда и снижение себестоимости, а также облегчает организацию самого производства. Если оборудование вовсе не используется, то это никак не сказывается на затратах самого предприятия[\*]. С тем обстоятельством, что на другом предприятии это же оборудование могло бы дать во много раз больший эффект, часто не считаются<sup>{3}</sup>.

[При «уравнительном подходе», например, в распределении машин между автоколоннами, автоколонны, имеющие вполне достаточное количество машин, нередко получали новые машины наряду с колоннами, испытывающими острый недостаток в автопарке. Одна автоколонна испытывала острый недостаток в машинах, явно не справляясь с обильными грузопотоками. В то же время в соседней автоколонне из-за отсутствия работы могли простаивать совершенно исправные автомашины. Подобного рода факты имели место в прошлом в ряде областей.]

Введение в расчет прокатной оценки могло бы обеспечить более рациональное использование оборудования. Даже если прокатная оценка будет определена весьма грубо и приближенно, ее учет позволит избежать, по крайней мере, тех несуразностей в использовании оборудования, которые часты. Включение в число затрат прокатной оценки оборудования сразу заставит отказаться от него там, где оно используется мало или вовсе не занято, подобно тому, как сейчас никто не держит рабочую силу без применения, так как это сразу приведет к перерасходу зарплаты. В то же время это позволит обеспечить оборудованием те участки, где оно сможет быть полностью загружено. Применение оборудования там будет выгодно, даст снижение себестоимости, несмотря на учет в затратах его значительной прокатной оценки. При таком порядке учета автоколонна из вышеприведенного примера не

---

\*[Связаны с этим и большие размеры неустановленного и неиспользуемого оборудования. «На 1 августа 1958 г. в народном хозяйстве Российской Федерации имелось неустановленного оборудования: около 60 тыс. металлорежущих станков, свыше 15 тыс. единиц кузнечно-прессового оборудования» (См. выступление А. Б. Аристова на XXI съезде КПСС. Стенографический отчет, т. I, стр. 503). Заслуживают внимания и факты, приводимые А. П. Кириленко: «Однако, к сожалению, часть изготовленных машин и оборудования долгое время лежит на строительных площадках и не вводится в действие. Например, уралмашовцами подсчитано, что из оборудования, изготовленного заводом в 1953–1957 годах для предприятий и строек страны, до сих пор не введено в строй блюмингов, толстолистовых и прокатных станов, мощных прессов общим весом свыше 80 тыс. тонн и стоимостью более 500 миллионов рублей, что равно результатам почти трехлетней работы по изготовлению этого оборудования. Здесь большая вина местных органов, однако, нам кажется, что и Госплан СССР должен проявить организующую роль и более четко планировать изготовление оборудования в зависимости от сроков строительства цехов и заводов» (там же, стр. 199).]

<sup>{3}</sup>{Характерный пример этого рода приведен в книге Н. С. Половенко «Организация и планирование автотранспорта в сельском хозяйстве» (Сельхозгиз, 1940): «Еще не изжит, так называемый, «уравнительный подход» при распределении машин между автоколоннами. Автоколонны, имеющие вполне достаточное количество машин, нередко получают новые, наряду с колоннами, испытывающими острый недостаток в автопарке. К каким последствиям это приводит, можно видеть из следующего примера: в сентябре 1938 года Макитянская автоколонна Курской области испытывала острый недостаток в автомашинах, явно не справляясь с обильными грузоперевозками. Разрыв между копкой и вывозом свеклы каждый день углублялся, что влекло за собой страшные потери урожая. В то же время в соседней Токмаковской автоколонне из-за отсутствия работы стояли 20 совершенно исправных машин. Подобного рода факты имели место и в ряде других областей».

стала бы держать без надобности исправные машины, так как это легло бы тяжелым бременем на ее финансы.

Учет прокатной оценки сыграет важную роль и при рассмотрении заявок на новое оборудование. Он покажет необоснованность заявок тех предприятий, где оборудование использовалось бы недостаточно полно и эффективно, хотя без такого учета эти заявки могут казаться вполне оправданными и подлежащими удовлетворению (как на машины для I и III работ в рассмотренном примере). В то же время такое сокращение требований позволит полностью и своевременно обеспечить те участки, где данное оборудование даст максимальный эффект. Многие предприятия вместо того, чтобы требовать дополнительное оборудование, которое в этом случае резко повысило бы расходы предприятия (ввиду учета в затратах прокатной оценки), задались бы целью наиболее полного и эффективного использования наличного оборудования, уменьшения сроков ремонта и т. п., что, напротив, дало бы снижение затрат. Зато предприятие, на котором данный станок будет работать с полной отдачей и где его отсутствие лимитирует производство, как правило, незамедлительно получило бы этот станок.

По отношению к переместимым средствам (строительные машины и пр.) предприятия и стройки старались бы сохранить их только на тот период, когда они могут быть полностью загружены, и стремились бы организовать работу так, чтобы по возможности сократить этот период. Уместно сказать в связи с этим, что недостаточный экономический эффект скоростных строек и малая их распространенность (в особенности в довоенное время) были частично вызваны именно отсутствием учета в затратах прокатной оценки оборудования<sup>+</sup>. [Введенная в последнее время система повышенных амортизационных начислений на оборудование, предоставляемое строительным организациям (краны и т. п.), по существу действует в указанном направлении и благотворно сказывается на интенсивности его использования.]

Наконец учет прокатной оценки оборудования существенно упорядочит и вопрос о цене продукции. В настоящее время в ряде случаев, если продукция производится с помощью и простого и квалифицированного оборудования, то для нее получается сильно разнящаяся себестоимость. Иногда этот разноразный так и остается, иногда в качестве себестоимости берут какую-то среднюю величину. Малоудовлетворительно и то и другое. Если для стоимости кубометра земляных работ даны два различных укрупненных показателя — при работе вручную и при механизированном производстве работ, то, решая проектный вопрос и не зная заранее, какие средства будут предоставлены именно на данную стройку, невозможно сколь-нибудь правильно назвать размер необходимых затрат (при сравнении нескольких решений и пр.). Средняя цифра также не отражает затрат на данную работу или продукцию (см. сноску на стр. 182) и скорее дезориентирует. Действительно, если на предприятии с новым квалифицированным оборудованием себестоимость изделия 8 руб., а на старом предприятии 12 руб. и отпускная цена определена, скажем, в 10 руб., то второе предприятие систематически будет считаться нерентабельным

<sup>+</sup>Экономическая практика последних десятилетий, к сожалению, хорошо подтверждает эти положения, — неправильная система экономических показателей привела к резкому увеличению объема незавершенного строительства (примечание 1984 г.)

и убыточным, несмотря на хорошую, по существу, работу. При решении вопроса об использовании этого изделия будут исходить из его цены в 10 руб., в то время как отказ от его производства (на втором предприятии) мог бы сократить затраты на 12 руб. Учет прокатной оценки оборудования позволил бы избежать введения разных цен (или необоснованной средней цены) и дать цену, отражающую действительный размер затрат, связанный с производством данной продукции.

[Отсутствие такого учета может вызвать ошибки при выборе вариантов использования продукции. Представим себе, что две различные машины могут производиться как на современном, так и на устаревшем предприятиях, причем на первом обе с себестоимостью 600 тыс. руб., а на втором — обе за 1,2 млн руб. Очевидно, цена этих машин должна была бы быть одинаковой. Между тем, если одна из них фактически будет производиться только на первом предприятии, а вторая — только на втором и цена будет установлена на основе себестоимости, их цены будут резко отличаться, что будет дезориентировать в вопросах их применения[\*]. Учет прокатной оценки, более высокой для совершенного предприятия, устранил бы такую неоправданную разницу.

Следует указать, что наряду со способом определения прокатной оценки данного средства, использованным в рассмотренном примере — на основе экономии при замене им ручного труда — возможны и другие. В частности, эффективность применения данного средства может определяться на основе оценки продукции, получаемой при его использовании, если эта оценка известна нам по другим данным. Например, она может быть получена, исходя из известного уровня затрат на продукцию при каком-либо другом способе ее изготовления или из условий ее использования и замены эквивалентной продукцией (ср. § 4).

Чтобы проиллюстрировать подобную возможность, вернемся к примеру из § 1 главы I, где речь шла о распределении производственной программы. Предположим, что для комплекта изделий (два изделия № 1 и одно изделие № 2) нам известна его оценка, скажем, 65 руб. Тогда, поскольку затраты материалов на комплект составляли  $2 \times 10 + 15 = 35$  руб., изготовление комплекта должно быть оценено в  $65 - 35 = 30$  руб., а так как соотношение о. о. оценок изготовления изделий № 1 и № 2 было 1 : 4 (см. стр. 19–20), то эти оценки равны соответственно 5 руб. и 20 руб. ( $2 \times 5 + 20 = 30$  руб.). Таким образом, полная оценка для изделия № 1:  $10 + 5 = 15$  руб.; для изделия № 2:  $15 + 20 = 35$  руб. Далее, если нам известны затраты, связанные с работой каждого предприятия (помимо материалов), то мы можем по его продукции в рациональном производственном плане сосчитать плановую рентабельность, и поскольку единственной неучтенной затратой оказывается прокатная оценка оборудования, то она и будет найдена. Допустим, что для предприятия типа А эти ежемесячные затраты составляют 300 тыс. руб.; поскольку оценка произведенной на нем чистой продукции (изготовление 100 тыс. изделий № 1) составляет  $5 \times 100\,000 = 500$  тыс. руб., то прокатная оценка для предприятия А

\*[Эти выводы не имеют всеобщего значения. В действительности может оказаться, например, что более совершенное предприятие уже приспособлено для выпуска некоторой машины и в данный период не может быть использовано для других целей, а объем производства этой машины с избытком удовлетворяет потребность в ней. Тогда указанные себестоимости будут больше соответствовать действительным народнохозяйственным затратам и могут оказаться приемлемыми.]

есть  $500 - 300 = 200$  тыс. руб. в месяц. Таким же образом можно найти прокатную оценку и для остальных предприятий.

Введение в практику учета ренты с оборудования (прокатной оценки) для целых предприятий в форме планового задания по рентабельности создаст заинтересованность предприятий в напряженности плана и получении большего числа заказов, а учет этого вида затрат в продукции, уравнивая условия производства на различных предприятиях, устранил случаи плановой нерентабельности.

При включении в число затрат, определяющих оценку продукции, прокатной оценки оборудования в условиях оптимального плана, когда согласованы потребность в продукте и его производство, понятие дефицитности теряет смысл. Действительно, дефицитность обуславливается, как правило, тем, что благодаря относительно заниженной цене, связанной с неполным учетом затрат, предъявляются экономически неоправданные требования на продукт. Но даже в случаях действительного дефицита в продукте — отрыва экономически оправданной потребности от объема производства — низкая цена не ослабляет дефицита, так как не стимулирует быстрого расширения производства и замены дефицитного продукта другими.

В дальнейшем мы употребляем как равнозначные термины прокатная оценка, арендная оценка, рента с оборудования, не уточняя области их применения. Уместно применять термин рента как объединяющий, прокатная оценка — по отношению к переместимому оборудованию (автомшины, краны и т. д.), арендная оценка — по отношению к неперемещаемому. Эти термины также соответствуют трем возможным формам применения ренты с оборудования в хозрасчете: сдача напрокат, в аренду и, наконец, плановое задание по рентабельности, о котором шла речь только что.]

Следует заметить в заключение, что, как было указано выше, прокатная оценка, которой следует руководствоваться, определяется всей обстановкой. [Например,] в период Отечественной войны по отношению ко многим видам оборудования обстановка коренным образом изменилась. Недостаток металла должен [был] иметь следствием очень высокую прокатную оценку оборудования металлургии и металлопромышленности. Наоборот, оборудование текстильной промышленности, которое не [было] полностью загружено, должно [было] иметь сравнительно низкую оценку.

Учет прокатной оценки оборудования должен существенным образом отразиться на оценке продукции. Такие материалы (металл, уголь, нефть), для производства которых используется сложное оборудование, с избытком загруженное, должны получить при учете ренты с него более высокую оценку, чем теперь.

Существует мнение, что роль оборудования полностью отражается в цене продукции включением в себестоимость амортизации. Это мнение глубоко ошибочно. Доля амортизации в себестоимости для большинства видов продукции незначительна (порядка 3–7%). В то же время разница в себестоимости продукции при ее производстве на совершенном оборудовании по сравнению с изготовлением на простейшем, которое может вполне оправданно применяется параллельно, достигает 50–100% и более. Поэтому ошибочно ограничиваться амортизацией и не учитывать огромной роли оборудования как производственного фактора, определяющего производительную силу труда. Это приводит не только к неправильному

использованию оборудования, но и искажает всю систему цен, лишая ее основной функции — правильно отражать фактическое соотношение народнохозяйственных затрат. {Подобно тому, например, как без учета сопротивления воздуха исказились бы все артиллерийские расчеты.}

[В отношении учета влияния оборудования на себестоимость положение еще менее удовлетворительно, чем по учету различий в качестве труда. Различия в интенсивности труда и квалификации так или иначе сказываются на ней через зарплату. Различия в условиях труда, определяющихся степенью его обеспеченности оборудованием, никак на нее не влияют.]

Нужно сказать также, что, как мы увидим в главе III, учет прокатной оценки оборудования, необходимость которого показана выше, не вызван временным его дефицитом, а должен фигурировать как постоянный элемент экономического расчета. Временная дефицитность оборудования определенного вида только повышает его прокатную оценку.

### § 6. Рациональное использование природных источников. Исчисление ренты<sup>4)</sup>

**Рациональный план посева.** В предыдущем параграфе мы рассматривали вопрос об использовании оборудования и подчеркивали важность правильного его решения для составления оптимального плана. При составлении плана производства, использующего природные ресурсы, если они ограничены, естественно, возникают вопросы их рационального использования.

Поясним это на следующем примере.

**ПРИМЕР.** Имеются три участка различной по плодородию земли — лучшей, обыкновенной и худшей (ресурсы последней неограниченны). Известна урожайность пшеницы, ржи и овса на каждой земле, а также затраты труда (в днях на 1 га), требующиеся на каждую из культур[\*]. Все данные сведены в табл. 31.

По плановому заданию нужно произвести 5 тыс. ц пшеницы, 3,5 тыс. ц ржи и 5 тыс. ц овса. Требуется составить план посева, обеспечивающий выполнение задания с минимальными затратами труда.

При решении вопроса о распределении посевных площадей основным критерием для нас будет экономия общественного труда, достигаемая при посеве некоторой культуры на определенном участке земли по сравнению с посевом на том же участке другой культуры (ср. вывод 19). Попробуем наметить оптимальный план посева, рассуждая таким образом.

<sup>4)</sup> Этого параграфа в тексте 1942 г. нет.

\* Вместо затрат труда можно было бы рассматривать себестоимости. В данном примере все затраты выражены в человеко-днях для того, чтобы более отчетливо выявить смысл о. о. оценок и их соответствие трудовым затратам. Если при обработке земли производятся другие затраты (например, на удобрения), то предполагается, что эти затраты выражены в труде и добавлены к затратам труда. Все цифры (урожайность, затраты труда и т. п.), как и в других примерах, взяты условно. Подобные же расчеты можно, разумеется, применять и к другим культурам — продовольственным, кормовым, техническим (кукуруза, сахарная свекла, хлопок и т. д.), а также к вопросам рационального использования крупных массивов земли (группа районов, областей и т. п.).

Таблица 31

Урожайность и затраты труда для различных культур по участкам

Земля	Площадь (га)	Культура	Урожайность (ц/га)	Затраты труда (дни /га)
Лучшая	100	Пшеница	30	10
		Рожь	25	8
		Овес	28	7
Обыкновенная	200	Пшеница	20	10
		Рожь	20	8
		Овес	26	7
Худшая	300 (и более)	Пшеница	15	10
		Рожь	15	8
		Овес	25	7

Выясним сначала, под какую культуру целесообразнее использовать лучшую землю.

Один гектар лучшей земли, отведенный под пшеницу, позволяет получить такой же урожай, как  $30 : 20 = 1,5$  га обыкновенной земли. Ее обработка потребует уже  $1,5 \times 10 = 15$  дней, а не 10. Таким образом, использование под пшеницу 1 га лучшей земли вместо обыкновенной экономит 5 дней труда. Таким же образом для ржи вместо 1 га лучшей земли потребуется  $5/4$  га обыкновенной, и экономия труда при использовании 1 га лучшей земли составит  $1/4 \times 8 = 2,0$  дня. Для овса вместо 1 га лучшей требуется  $14/13$  га обыкновенной земли, и экономия составляет  $1/13 \times 7 = 0,54$  дня. Таким образом, наибольший эффект — максимальное сокращение затрат труда — дает использование лучшей земли под пшеницу.

Следует еще учитывать, что использование лучшей земли высвобождает обыкновенную землю. В этом отношении использование лучшей земли под пшеницу также более эффективно, чем другие варианты.

На 100 га лучшей земли будет произведено 3 тыс. ц пшеницы. Для получения еще 2 тыс. ц пшеницы нужно отвести под нее дополнительную землю. Какую, обыкновенную или худшую? Аналогичный подсчет показывает, что нужно отвести обыкновенную (100 га). (Обыкновенная земля по сравнению с худшей дает экономию труда в 3,3 дня на 1 га для пшеницы против 2,67 дня на 1 га для ржи и 0,28 дня на 1 га для овса).

Одновременно решен вопрос о выборе земли под посевы ржи. В самом деле, рожь на обыкновенной земле по сравнению с худшей дает значительно бóльшую экономию труда, чем овес. Поэтому оставшиеся 100 га обыкновенной земли отводим под рожь. Это даст 2 тыс. ц. Для выполнения планового задания по ржи нужно занять еще и 100 га худшей земли ( $2000 + 15 \times 100 = 3500$  ц). Для получения 5 тыс. ц овса следует им засеять 200 га худшей земли:  $25 \times 200 = 5000$  ц.

Итак, составлен план, обеспечивающий выполнение задания по всем культурам (табл. 32).

**Таблица 32**  
**Оптимальный план распределения культур по участкам земли**

Земля	Культура	Урожайность	Затраты (дней на <i>ca</i> )	Площадь по плану ( <i>ca</i> )	Урожай с участка ( <i>ц</i> )			Затраты труда на участок (дней)	
					Пшеница	Рожь	Овес		
Лучшая	Пшеница	30	10	100	3000			1000	
	Рожь	25	8	-					
	Овес	28	7	-					
Обыкновенная	Пшеница	20	10	100	2000			1000	
	Рожь	20	8	100					2000
	Овес	26	7	-					1500
Худшая	Пшеница	15	10	-				800	
	Рожь	15	8	100					
	Овес	25	7	200					5000
Всего					5000	3500	5000	5000	

**Дифференциальная рента.** Подсчитаем средние затраты труда на один центнер каждой из культур, относим суммарные затраты труда на ее производство к урожаю. Получим затраты на 1 *ц*: для пшеницы  $2000 : 5000 = 0,4$  дня, для ржи  $1600 : 3500 = 0,46$  дня, для овса  $1400 : 6000 = 0,28$  дня.

Именно подобные расчеты и применяются обычно нашими хозяйственными органами при определении затрат труда на продукцию. Однако средние затраты никак не отражают действительного их соотношения, реальных затрат на продукцию в данных условиях. В самом деле, в рассматриваемом примере пшеница на любой земле требует больших затрат на производство, чем рожь. Средние же затраты оказались равными 0,4 дня/*ц* для пшеницы и 0,46 дня/*ц* для ржи — явное противоречие.

Неверный результат обусловлен тем, что такой подсчет учитывает лишь непосредственные затраты труда на данную продукцию, но не учитывает влияния, которое оказывает избранный для ее производства способ на затраты по другим видам продукции. Это влияние возникает вследствие использования (затраты, одалживания) ограниченных производственных факторов, заключающихся, например, в более производительных природных ресурсах, в данном случае, в лучшей и обыкновенной земле; такие затраты остаются неучтенными. Между тем эти факторы также должны получить определенные оценки, и сам факт их использования должен влиять на распределение затрат на продукцию.

Учет этого обстоятельства, по сути дела состоящий в исчислении дифференциальной ренты и включении ее в затраты, позволяет получить о. о. оценки в рассмотренной задаче.

Из сказанного ясно, что в данном примере должны получить определенную о. о. оценку более эффективные природные ресурсы — лучшая и обыкновенная



**Таблица 33**  
**Структура затрат с учетом ренты**

Культура	Земля	Урожай- ность (ц/га)	Затраты труда в днях на 1 га (на 1 ц)		
			прямые	рента	полные
Пшеница	Лучшая	30	10 (0,333)	9 (0,3)	19 ( <b>0,633</b> )
	Обыкновенная	20	10 (0,5)	2,67 (0,133)	12,67 ( <b>0,633</b> )
	Худшая	15	10 (0,667)	0 (0)	10 (0,667)
Рожь	Лучшая	25	8 (0,32)	9 (0,36)	17 (0,680)
	Обыкновенная	20	8 (0,4)	2,67 (0,133)	10,67 ( <b>0,533</b> )
	Худшая	15	8 (0,533)	0 (0)	8 ( <b>0,533</b> )
Овес	Лучшая	28	7 (0,25)	9 (0,321)	16 (0,571)
	Обыкновенная	26	7 (0,269)	2,67 (0,103)	9,87 (0,372)
	Худшая	25	7 (0,28)	0 (0)	7 ( <b>0,280</b> )

земля. Оценка худшей земли будет нулевой, так как она имеется в избытке (ср. Приложение I, теорема 3).

Двигаясь по табл. 32 снизу вверх, найдем о. о. оценки, выраженные в труде, одного центнера каждой культуры и гектара лучшей и обыкновенной земли.

Производство 25 ц овса требует 7 дней труда: в оценке овса не участвуют затраты, связанные с использованием лучших земель, так как овсом засеивается только худшая земля, поэтому оценка 1 ц овса равна  $7 : 25 = 0,28$  дня/ц.

Оценка 1 ц ржи на худшей земле есть  $8 : 15 = 0,533$  дня/ц.

На одном гектаре обыкновенной земли производится 20 ц ржи, которые, согласно только что найденной оценке, требуют затрат  $20 \times 0,533 = 10,67$  дня, в то время как непосредственные затраты составляют 8 дней. Таким образом, использование 1 га обыкновенной земли дает экономию труда  $10,67 - 8 = 2,67$  дня. Эту величину и следует принять в качестве оценки 1 га обыкновенной земли.

С одного гектара обыкновенной земли получаем 20 ц пшеницы. К непосредственным затратам 10 дней следует добавить оценку использования 1 га обыкновенной земли (2,67 дня). Эта величина — 12,67 дня/га — представляет полные затраты на производство 20 ц пшеницы на обыкновенной земле. Отсюда о. о. оценка 1 ц пшеницы равна  $12,67 : 20 = 0,633$  дня.

30 ц пшеницы, полученные с 1 га лучшей земли, оцениваются в  $30 \times 0,633 = 19$  дней. Непосредственные затраты составляют 10 дней, поэтому оценка 1 га лучшей земли есть  $19 - 10 = 9$  дней\*.

\*В приведенном упрощенном примере земельная рента была определена на основе данных об урожайности отдельных культур. В действительности эффективность использования земли определяется не каким-то одним продуктом, а совокупностью продуктов, всей системой ведения хозяйства. Отметим, что предлагаемые расчетные методы применимы и к исчислению ренты в таких более сложных условиях (см. Приложение I).

Для составленного плана нами получены оценки. Убедимся в его оптимальности. Для этого сравним полные суммарные затраты (с учетом ренты) на производство каждой из культур. Результаты несложного расчета приведены в табл. 33. Из этой таблицы видно, что в плане используются те способы, для которых суммарные затраты на производство 1 ц каждой культуры наименьшие (соответствующие цифры выделены в таблице). Суммарные затраты равны оценке продукции для используемых в плане способов и больше нее для неиспользуемых.

Это позволяет с уверенностью сказать, что составленный выше план оптимален, а найденные оценки являются о. о. оценками (ср. выводы 11, 12, 14).

Ясно, что учет лишь прямых затрат (см. четвертый столбец табл. 33) дезориентировал бы в разного рода экономических расчетах. Так, пшеница получила бы в ряде случаев более низкую оценку, чем рожь; судя по видимым затратам (если цена продукции определена на основе средних затрат), посевы на худшей земле оказались бы вообще нерентабельны и т. д.

Рассмотрим следующий случай. Пусть в условиях нашего примера можно повысить урожай пшеницы на лучшей земле на 2 ц/га за счет более тщательной обработки земли с увеличением затрат труда на 10%. Целесообразен ли новый способ? Подсчет по непосредственным затратам труда дает отрицательный ответ. В самом деле, затраты труда увеличиваются на 10%, а прирост продукции составит всего  $2/30 = 6,7\%$ , т. е. производительность труда снижается.

Расчет следует вести по оценкам, исчисленным с учетом ренты (ср. вывод 15). Дополнительные 2 ц пшеницы оцениваются (в труде) в  $2 \times 0,633 = 1,267$  дня. Сопоставление с увеличением затрат труда (1 день) показывает, что новый способ экономит труд и его применение оправданно. Еще раз подчеркнем, что расчет, не включающий ренты, воспрепятствовал бы более интенсивному использованию земли.

Рассмотрим еще одну ситуацию. В условиях нашего примера требуется выделить некоторое количество зерна (пшеницы или ржи) для внутривозрастных нужд (откорм птицы т. п.). Что целесообразнее использовать, если пшеница на 10% эффективнее ржи (т. е. 10 ц пшеницы заменяют 11 ц ржи)?

Расчет с учетом ренты дает: 10 ц пшеницы стоят  $0,633 \times 10 = 6,33$  дня; 11 ц ржи —  $0,533 \times 11 = 5,87$  дня. Целесообразнее использовать рожь, так как это позволит сэкономить труд.

Если бы мы вели расчет только по непосредственно видимым затратам, то снова пришли бы к неверному выводу. 10 ц пшеницы оценивались бы в  $0,4 \times 10 = 4,0$  дня; 11 ц ржи — в  $0,46 \times 11 = 5,06$  дня. Затраты на пшеницу оказались бы меньшими, и представилось более выгодным использовать именно ее.

Из всего изложенного ясно, насколько важна в экономическом анализе роль ренты. Ее учет позволяет правильно решать вопросы эффективного использования природных ресурсов. Ренту необходимо учитывать и при определении себестоимости продукции.

Все предыдущее позволяет прийти к следующему выводу.

**Вывод 20.** Если в производстве участвуют ограниченные благоприятные природные ресурсы, то при решении экономических вопросов необходимо учитывать сам факт их использования путем введения в расчет дифференциальной ренты.

*Ее величина определяется той экономией труда, которую дает использование этих ресурсов в оптимальном плане. Если в затратах учтена рента, то для оптимального плана соблюден принцип минимума затрат. Рента должна учитываться и при нахождении о. о. оценок продукции.*

Рента, естественно, имеет те же свойства и такие же применения, как и другие виды о. о. оценок.

Ограниченными благоприятными природными ресурсами могут быть не только земли, как в рассмотренном примере, но и леса, водоемы для орошения или для рыбной ловли, месторождения полезных ископаемых и т. п.

Правильное определение и систематический учет ренты даст возможность наиболее эффективно использовать природные ресурсы, не допуская их случайного, неполного и нерационального использования. Кроме того, благодаря учету ренты в оценке продукции, во-первых, выравниваются экономические условия производства при использовании различных по эффективности природных ресурсов, и обеспечивается рентабельность везде, где производство рационально; во-вторых, стимулируется наиболее эффективное использование продукции, производство которой связано с использованием ограниченных благоприятных природных источников, так как ее оценка относительно повышается.

Учет ренты, следовательно, очень важен в вопросах ценообразования.

При этом возможное повышение цен на некоторые продукты полностью компенсируется доходом, получаемым обществом в форме ренты. Таким образом, учет ренты приведет только к перераспределению средств между различными частями народного дохода. В то же время введение ренты в хозрасчет и в экономические показатели будет стимулировать наиболее правильное с точки зрения всего общества решение экономических вопросов, связанных с использованием природных ресурсов.

Например, взимание в той или иной форме ренты за землю (и воду для орошения в южных районах) с соответствующим повышением заготовительных цен на хлопок и другие технические культуры, а также на фрукты (без изменения розничных цен), не сократив бюджета, создало бы благоприятные условия для рационального и интенсивного использования земли. Это стимулировало бы расширение производства указанных продуктов и их более рациональное использование, привело бы к росту доходов колхозов и, в конечном счете, к возможности снижения цен на эти же продукты. Учет ренты полнее выявил бы экономические преимущества культур, производство которых связано с интенсивным использованием земли: хлопок, рис, кукуруза.

Учет ренты показал бы еще большие, чем при обычном экономическом расчете, преимущества производства зерна на целинных землях в отношении затрат и большую (чем при обычном расчете) эффективность вложений в освоение целинных земель. Это лишний раз подтверждает своевременность и оправданность принятых партией в 1953–1954 гг. исторических решений об освоении целинных земель. В настоящее время после их освоения получаемая в тех или иных формах рента с этих земель представляет существенную часть государственных накоплений.

Таким же образом рента на леса, в особенности на местные, а также на рыбные водоемы предотвратила бы случаи нерационального их использования. Очень важен учет ренты в горнорудной и в других отраслях добывающей промышленности.

Необходимо подчеркнуть, что социалистическая дифференциальная рента имеет совершенно иную природу, чем капиталистическая. Капиталистическая рента есть форма эксплуататорского дохода — часть прибавочной стоимости, присваиваемая определенным классом, которая противопоставляется другим частям стоимости. В социалистическом обществе рента есть часть общественных затрат труда и часть общественного продукта, принадлежащая обществу в целом, которая не противопоставляется другим частям, а выделяется из целого как особая форма, которую по указанным выше причинам целесообразно учитывать отдельно, чтобы обеспечить наиболее эффективное использование природных ресурсов. Последней задаче в настоящий момент придается особенно большое значение. В текущем семилетии резко улучшается использование земли как главного средства производства в сельском хозяйстве.

В капиталистическом обществе частная собственность на природные источники и рента являются тормозом для правильного и эффективного их использования. В социалистическом же обществе благодаря государственной, всенародной собственности на природные источники имеется возможность наиболее правильно и эффективно их использования; учет ренты в экономическом расчете является лишь средством, обеспечивающим рациональное использование этих источников. Напротив, отсутствие учета ренты может оказаться причиной растраты природных источников, случайного, не лучшего их использования.

Величина капиталистической ренты определяется стихийно на рынке. Социалистическая рента должна определяться и учитываться сознательно в процессе планирования хозяйства. Ее размер должен устанавливаться так, чтобы было обеспечено наиболее полноценное использование природных источников.

Отметим, что рассмотренная в предыдущем параграфе прокатная оценка по сути дела представляет собой своеобразную форму дифференциальной ренты — «ренту с оборудования». Разница состоит в том, что в отличие от природных источников, оборудование может быть воспроизведено. Однако эта разница отчетливо выступает лишь в вопросах перспективного планирования, в вопросах же текущего планирования это различие в какой-то мере стирается, поскольку воспроизводство оборудования в краткий срок невозможно.

**Анализ затрат труда.** В рассмотренном примере мы произвели подсчет затрат труда на различные виды сельскохозяйственной продукции.

В процессе анализа выявилось то важное положение, что эти затраты существенно зависят от условий приложения труда. Например, затраты на 1 ц ржи на обыкновенной и худшей земле относятся как  $15 : 20 = 3 : 4$  (табл. 32), т. е. день труда на худшей земле при производстве ржи соответствует по эффективности  $3/4$  дня на обыкновенной земле.

В произведенном выше подсчете затрат труда на различные виды продукции в качестве единицы была принята производительная сила единицы труда на худшей земле, т. е. труда, не обеспеченного благоприятными природными ресурсами. Вообще, было бы правильнее принять за основу исчисления труд при средних общественных условиях. Не имея для этого достаточно данных, мы примем за единицу день труда в среднеблагоприятных условиях в данном комплексе. Однако попутно мы укажем общий метод приведения труда к среднему.

Суммарная оценка продукции в принятых условных единицах — день труда на худшей земле — равна:  $5000 \times 0,633 + 3500 \times 0,533 + 5000 \times 0,280 = 6430$ , общие затраты труда — 5000 дней. Таким образом, затраты среднего труда на одну условную единицу составляют  $5000 : 6430 = 0,778$  дня.

В соответствии с этим затраты среднего труда на единицу продукции будут:

на 1 ц пшеницы	$0,633 \times 0,778 = 0,492$	дня среднего труда
на 1 ц ржи	$0,533 \times 0,778 = 0,415$	» » »
на 1 ц овса	$0,280 \times 0,778 = 0,218$	» » »

Оценки продукции теперь оказываются выраженными в среднем труде, но, очевидно, сохраняют прежние отношения. Нетрудно показать, что они не только выражены в труде, но и в действительности соответствуют тем затратам среднего труда, которые необходимы для получения продукции в данных условиях. Иначе говоря, эти оценки продукции находятся в полном согласии с трудовой теорией стоимости. Необходимо, конечно, рассматривая исчисление затрат труда на продукцию, учитывать взаимозависимость производства различных видов продукции и в связи с этим взаимосвязанность необходимых затрат.

Оправданность принятого нами метода исчисления затрат на продукцию и полученных значений ее оценок представлялась ясной уже потому, что эти оценки находятся в соответствии с рациональным планом производства и приводят к правильным решениям, обеспечивая экономию труда. Чтобы еще полнее выяснить и обосновать этот метод, проанализируем те особенности в исчислении затрат труда, которые приняты нами при их нахождении.

1) *Исчисление затрат труда и оценок продукции базируется на способах изготовления, принятых в оптимальном плане, т. е. учитывает необходимые (минимальные осуществимые, рациональные) затраты труда* (в условиях народного хозяйства — общественно-необходимые затраты).

2) *Учитывая то, что производительная сила труда зависит от условий его приложения, оказывается обязательным в случае, если труд затрачивается в условиях, отклоняющихся от среднеблагоприятных, при исчислении принимать это во внимание и приводить затраты труда к среднеблагоприятным условиям.* В данном примере такое приведение фактически произведено применительно к среднему труду в условиях изучаемого комплекса.

Поскольку у нас уже исчислены затраты на продукцию, то легко получить значения *коэффициентов приведения\** конкретных затрат труда к среднему:

при производстве пшеницы на лучшей земле	$k_1 = 0,492 : 10/30 = 1,476$
» » пшеницы на обыкновенной земле	$k_2 = 0,492 : 10/20 = 0,984$
» » ржи на обыкновенной земле	$k_3 = 0,415 : 8/20 = 1,038^{**}$
» » ржи (и овса) на худшей земле	$k_4 = 0,778$ .

\* Коэффициент приведения индивидуальных затрат труда к среднему труду мы определяем как отношение исчисленных необходимых затрат среднего труда к величине непосредственных затрат труда в данных конкретных условиях. Ясно, что этот коэффициент больше единицы, если труд затрачивается в условиях более благоприятных, чем средние, и меньше единицы, если — в менее благоприятных. В приводимом расчете величины затрат труда в конкретных условиях взяты из табл. 32 (их легко найти из первого и второго столбца этой таблицы).

\*\* Условия производства пшеницы и ржи на обыкновенной земле не вполне одинаково благоприятны: в первом случае день труда сопровождается использованием  $1/10$  га обыкновенной земли, во втором —  $1/8$  га.

Таким образом, оказывается, что произведенная на данном участке стоимость определяется не непосредственными затратами труда на этом участке, а может оказаться выше или ниже их в зависимости от того, в какой мере условия труда на нем отклоняются от средних, в какой мере труд обеспечен благоприятными для него факторами. В данном случае в качестве таких условий выступает использование природных ресурсов — лучших по качеству участков земли.

В соответствии с этим происходит и известное перераспределение произведенной стоимости. Можно сказать, что на участках с менее благоприятными условиями лишь часть затрат труда непосредственно воплощается в произведенную на этих участках стоимость продукции, а часть воплощается в стоимость, произведенную на других участках с особо благоприятными условиями, и идет как бы на предоставление этих особо благоприятных условий\*.

При этом, как правило, такое перераспределение происходит в отношении прибавочного продукта, идущего на общественное потребление и накопление. Например, если доля прибавочного продукта составляет 50%, то на оплату дня труда пойдет продукция, соответствующая 0,5 дня среднего труда. Таким образом, на участке худшей земли на оплату труда (личное потребление) из произведенной стоимости 0,778 пойдет 0,5, а 0,278 на общественное потребление. При производстве же пшеницы на лучшей земле, где труд того же качества, естественно, должен быть таким же образом оплачен, произведенная стоимость составит 1,476 единицы (среднего труда), из которых 0,5 единицы составит часть, идущую на оплату личного потребления, а 0,976 — продукт, идущий на общественное потребление. При этом даже на худшей земле производство будет рентабельным, оправдывающим затраты.

Необходимо сказать, что с такого рода перераспределением произведенной стоимости мы систематически встречаемся и при обычно применяемом у нас определении цены на основе средней стоимости. В этом случае созданная на более совершенных предприятиях стоимость выше произведенных там индивидуальных затрат труда, а на менее оборудованных — ниже, хотя в обоих случаях применение соответствующих производственных процессов рационально и сделанные затраты общественно необходимы\*\*.

Однако такое перераспределение производится обычно по отношению к одному продукту. Мы полагаем, что в условиях социалистического производства, которое является единым, представляется оправданным осуществлять, согласно описанной схеме, такой учет различий в условиях применения труда и перераспределение стоимости также и по отношению к разным продуктам, производство которых взаимосвязано, что в условиях современной индустрии типично.

---

\*Такое перераспределение довольно обычно в реальных производственных условиях. Например, если опытный забойщик, беря на себя более сложные участки выработки, даст меньше угля, чем его помощник на более легких участках, общая добыча (и оплата), естественно, будет распределена между ними в соответствии с вложенным трудом. То же самое, если одна бригада лесорубов обрабатывает крупные стволы, а другая мелколесье.

\*\*В капиталистическом обществе также возникают стоимостные перераспределения, хотя и совсем иной природы. Марксистская теория стоимости при анализе цен производства вскрывает, что прибавочная стоимость, произведенная в одних отраслях (с низким органическим составом капитала), присваивается частично в других отраслях и входит в цену произведенного там продукта.

3) Учитывая, что социалистическое общественное производство является единым, можно пытаться непосредственно определить *общественные затраты на данный продукт* как те *затраты труда* (рационально примененного), *которые необходимы для получения единицы продукта в данных условиях*. Такой подход, как можно показать, приводит к тем же значениям затрат, что и изложенные выше подходы.

Продемонстрируем это на примере рассмотренного производственного комплекса. Подсчитаем, например, затраты (среднего) труда, необходимые для производства 1 ц ржи.

Произведем некоторое увеличение ресурсов труда, например, на 1% — 50 дней. Для того чтобы сохранились средние условия труда, необходимо предусмотреть соответствующее увеличение благоприятствующих факторов, т. е. увеличение ресурсов лучшей земли на 1 га и на 2 га обыкновенной. Насколько может быть увеличено производство ржи за счет этого?

С 2 га обыкновенной земли, затратив 16 дней, мы получим  $2 \times 20 = 40$  ц ржи. На 1 га лучшей земли мы могли бы получить 25 ц ржи, однако использование ее под рожь, как мы видели, нерационально. Лучше, затратив 10 дней, получить на ней 30 ц пшеницы. Это позволит высвободить из-под пшеницы 1,5 га обыкновенной земли и 15 дней труда. Затратив 12 дней на производство ржи на этой земле, мы получим еще  $1,5 \times 20 = 30$  ц ржи. Наконец, если остающиеся дополнительные ресурсы труда  $50 - 16 - 10 + 15 - 12 = 27$  дней использовать на худшей земле, то, обработав  $27 : 8 = 3,37$  га, мы получим еще  $15 \times 3,37 = 51$  ц ржи, а всего  $40 + 30 + 51 = 121$  ц. Следовательно, затраты на 1 ц составят  $50 : 121 = 0,415$  дня среднего труда — мы получили ту же цифру, что и выше.

Таким образом, мы видим, что те значения *необходимых затрат труда*, к которым приводит исчисление о. о. оценок, суть не что иное, как *затраты производственного комплекса как целого*, а не индивидуальные, не отдельного участка. Но именно такого рода затраты являются в условиях единого социалистического производства решающими при анализе вопросов распределения общественного труда. В колхозе важно не достижение высоких результатов одной бригадой за счет других, а общие успехи колхоза. В экономическом районе решающими являются достижения района в целом и никак не могут удовлетворить высокие показатели одного предприятия, если они достигнуты за счет других, и т. п.

4) Наконец, не останавливаясь на этом подробнее, так как соответствующий анализ уже произведен выше, отметим, что те же *необходимые затраты могут строиться и на основе исчисления затрат на данном производственном участке при условии, что они рациональны и что учтены не только видимые, непосредственные затраты труда, но и затраты косвенные, отражающие использование факторов, экономящих труд*. Такой расчет приведен выше, в табл. 33; в качестве косвенных затрат в нем фигурирует учет эффективности лучших участков земли — ренты. В этой таблице в качестве условной единицы был взят день труда на худшей земле. Подобный же расчет мог быть произведен и в днях среднего труда; для этого нужно лишь перевести одни оценки в другие. Получим: оценка использования 1 га обыкновенной земли (рента) —  $2,67 \times 0,778 = 2,077$  дня среднего труда, рента с 1 га лучшей земли —  $9 \times 0,778 = 7$  дней среднего труда.

Непосредственные затраты труда мы должны были бы при этом расчете приводить к среднему труду также с коэффициентом приведения  $k_4 = 0,778$ , учитывая, что невооруженный труд соответствует труду на худшей земле. Тогда, например, затраты на 1 ц ржи на обыкновенной земле дали бы  $(8 \times 0,778 + 2,077) : 20 = 0,415$  дня среднего труда, т. е. опять то же значение.

Отметим, что в данном случае в качестве фактора, экономящего труд, выступали более плодородные (по сравнению с худшей) земли, площади которых ограничены; в других случаях, как мы видели (§ 5), это могут быть не природные ресурсы, а отдельные виды оборудования, оценка которых будет ни чем иным, как их протатной оценкой (рента с оборудования).

Такой учет необходим для определения правильного использования этих ресурсов, для оценки полных затрат на продукцию и правильного распределения последних между различными видами продукции.

В заключение отметим, что мы не считаем единственно возможной изложенную здесь трактовку количественного применения закона стоимости в условиях социалистического общества. Возможно трактовать вопрос и так, что найденные здесь оценки продукции являются результатом исчисления необходимых отклонений от стоимости или некоторой превращенной формы стоимости. Однако нам представляется бесспорным, что только исчисление затрат труда на основе полного их учета, с принятием во внимание условий применения труда или, что по существу равнозначно, с учетом затрат факторов, экономящих труд, приводит к оценкам, позволяющим правильно решать вопросы распределения труда. А раз это так, то такой объективный способ исчисления не может не соответствовать закону стоимости при правильном понимании его действия в условиях социалистического общества.

Произведенный в § 5 и в данном разделе анализ использования оборудования и природных ресурсов и способы его учета в затратах и оценке продукции при поверхностном ознакомлении с ним может напомнить об известных теориях вульгарных буржуазных школ политэкономии о трех равноправных источниках стоимости: труде, земле и капитале. Коренная разница состоит в том, что в нашем построении в полном соответствии с трудовой теорией стоимости труд рассматривается как единственный ее источник. Природные ресурсы и оборудование выступают лишь как факторы, влияющие на производительную силу труда, экономящие труд. Поэтому учет затрат этих факторов и их оценку надо рассматривать лишь как средство для оптимального распределения труда и тем самым достижения наибольшей его производительности, а также для сопоставления затрат труда, производимых в различных условиях. Таким образом, эти факторы ни в какой мере не могут быть самостоятельными источниками стоимости. Учитывается лишь их косвенное влияние на производительную силу труда.

### **§ 7. Планирование перевозок и вопросы производства, связанные с транспортом. Целесообразный железнодорожный тариф**

Известно, какую большую роль в экономике играют вопросы транспортировки продукции. Различия в условиях производства в разных местах, связанные с расположением и качеством источников сырья, наличием резервов оборудования



и другими обстоятельствами, заставляют или делают целесообразным продукцию, произведенную в одном месте, перевозить в другое. При этом правильное решение вопросов, связанных с транспортировкой, весьма важно. Оно особенно существенно у нас, с одной стороны, из-за чрезвычайного разнообразия природных условий и огромных расстояний, а с другой — вследствие дефицитности транспортных средств и высокой их загрузки.

Если бы можно было не учитывать ограниченности подвижного состава и пропускной способности дорог, а также ограниченности возможного объема выпуска продукции предприятиями в данном месте и в данный момент, то решение экономических вопросов, связанных с транспортом, не представило бы затруднений. В самом деле, пусть себестоимость перевозок одного вагона из пункта  $A$  в пункт  $B$  составляет 150 руб. Тогда, если некоторый продукт при производстве его в  $A$  стоит 500 руб. за вагон\*, а в  $B$  — 250 руб. и там есть возможности расширения его производства, то целесообразно получать его в нужном количестве из  $B$  вместо выпуска на месте, так как выигрыш от снижения производственных затрат ( $500 - 250 = 250$  руб.) превосходит затраты на транспортировку (150 руб.). Если бы себестоимость этого же продукта в  $B$  была 350 руб., такое решение было бы уже нерациональным.

Если наряду с этим имеется пункт  $B$ , где себестоимость вагона того же продукта составляет 150 руб., а стоимость перевозки в  $A$  200 руб., то ясно, что пункт  $A$  целесообразнее снабжать из  $B$ , чем из  $B$ , так как затраты в  $A$  на один вагон в первом случае будут  $150 + 200 = 350$  руб., во втором  $250 + 150 = 400$  руб. Однако в условиях ограниченности транспортных возможностей и объемов производства полученные таким образом решения окажутся нереальными, а потому непригодными. Количество всех грузов, перевозка которых на основе такого подсчета окажется целесообразной, может намного превзойти пропускную способность дорог; потребность в продукте тех потребителей, которых окажется выгодным снабжать из некоторого пункта, может значительно превзойти возможный объем производства в нем.

Таким образом, в реальных условиях описанная выше простейшая методика неприменима, а попытка ее использования может только дезориентировать в данном вопросе. Принципы правильной методики решения таких вопросов мы покажем на двух простейших примерах.

При большой загрузке железнодорожного транспорта в решении вопросов, связанных с его использованием, нельзя исходить просто из себестоимости и рентабельности, исчисляемых обычным образом. Однако это не должно заставить отказываться от экономического расчета, только его нужно производить иначе. Целью расчета должен быть выбор таких решений, которые обеспечат минимальные потери народного хозяйства в связи с загруженностью транспорта. Идею такой методики мы наметим в следующем примере.

ПРИМЕР 1<sup>5)</sup>. Рассмотрим дорогу, соединяющую пункты  $A$  и  $B$ , причем перевозки совершаются только по всему пути. Пропускная способность дороги 1200

\*Всюду для определенности имеется в виду вагон с расчетной вместимостью 16,5 т.

<sup>5)</sup>Хотя по содержанию этот и другие примеры этого параграфа в текстах 1942 г. и 1959 г. идентичны, используемые в них цифры не всегда совпадают. (Прим. ред.)

Таблица 34

**Грузы, предъявленные к перевозке**

Грузы	Суточная потребность в вагонах	Возможность экономии в вагонах	Потери на 1 сэкономленный вагон (в руб.)
<i>Безусловные:</i> 1-й вид груза	500	—	—
<i>Вариантные:</i> 2-й вид груза 3-й вид груза	200 300	80 150	300 250
<i>Условные:</i> 4-й вид груза 5-й вид груза 6-й вид груза	100 500 400	100 500 400	1500 500 250
<b>Всего</b>	<b>2000</b>		

вагонов в сутки, себестоимость перевозки (и тариф, для простоты совпадающий с ней) — 200 руб. за вагон.

Количество предъявленных к перевозке грузов — 2000 вагонов в сутки (см. табл. 34) — значительно превышает пропускную способность дороги. Будем различать три категории грузов: 1) *безусловные* — требующие полного обеспечения вагонами; 2) *вариантные* грузы, также непременно подлежащие перевозке, но допускающие (ценой определенных затрат) сокращение числа необходимых для их перевозки вагонов. В качестве возможного примера такого груза можно назвать лесоматериалы. Если их перевозить из *A* в *B* не в виде пиловочника, а в переработанном виде, то можно сократить число необходимых вагонов, скажем, на 40%, но это будет связано со значительным повышением затрат на переработку (например потому, что в *A* имеется только загруженный или плохо оборудованный лесозавод, а в *B* недогруженное, полностью механизированное предприятие), что приводит к потерям 400 руб. на каждый сэкономленный вагон; 3) наконец, имеются *условные* (не безусловные) грузы, отказ от предоставления вагонов под которые возможен, хотя также связан со значительными потерями (например, перевозки автотранспортом, необходимость использования более дорогого сырья и т. п.). Все грузы перечислены в табл. 34.

Как видно из таблицы, во всех случаях потери на один сэкономленный вагон превосходят себестоимость перевозки (200 руб.), и поэтому для условных грузов отказ от предоставления транспорта связан со значительными убытками, а для вариантных грузов экономия вагонов невыгодна. Несмотря на то что во всех случаях перевозки рентабельны и заявки на вагоны вполне законны, удовлетворить их полностью не представляется возможным. От того, как будут распределены возможности транспорта, зависит величина неизбежных в данных условиях народнохозяйственных потерь, связанных с отказом в вагонах.

В первом из приведенных планов (табл. 35) полностью обеспечены транспортом грузы, обязательно подлежащие перевозке, в том числе и вариантные.

**Таблица 35**  
Случайный план

Грузы	Предоставлено вагонов	Потери в связи с недостатком вагонов (в руб.)
1	500	—
2	200	—
3	300	—
4	20	120 000
5	100	200 000
6	80	80 000
Всего	1200	400 000

**Таблица 36**  
Оптимальный план

Грузы	Предоставлено вагонов	Потери в связи с недостатком вагонов (в руб.)
1	500	—
2	120	24 000
3	150	37 500
4	100	—
5	330	85 000
6	—	100 000
Всего	1200	246 500

Прочие заявки оказалось возможным удовлетворить только на 20%, что и сделано. Совокупные потери предприятий в связи с отказом в вагонах составляют 400 тыс. руб. (в сутки). В табл. 36 приведен оптимальный план распределения. Как видим, потери здесь составляют 246 500 руб., т. е. сокращены на 38%.

Последний план можно найти, определив о. о. оценку (в данных условиях) перевозки одного вагона между пунктами *A* и *B*. Эта оценка, полученная тем же способом, который применялся в предыдущих параграфах, оказывается равной 500 руб. Исходя из нее, убеждаемся в оптимальности плана. Именно в тех случаях, когда отказ в вагонах требует затрат выше 500 руб. на сэкономленный вагон (4-й груз, см. табл. 34), вагоны предоставлены полностью. Там, где затраты на сэкономленный вагон составляют меньше 500 руб., полностью используем все возможности экономии в вагонах (2-, 3-, 6-й грузы, табл. 34). Наконец, мы предоставляем оставшиеся вагоны туда, где потери на сэкономленный вагон равны оценке — 500 руб. (5-й груз). Следует сказать, что принять оценку, отличную от 500 руб., в данных условиях мы не можем. Если бы мы взяли ее больше 500 руб., то, поступая как выше, мы не использовали бы вагоны полностью. Если бы была взята оценка меньше 500 руб., то число требований на транспортировку оказалось бы больше возможностей, и мы бы не смогли произвести наилучший выбор. Только принятая о. о. оценка позволяет прийти к оптимальному плану.

Эта о. о. оценка — 500 руб. отличается от себестоимости (200 руб.) тем, что последняя (считаем даже, что она определена правильно — с учетом о. о. оценок расходующих материалов, топлива и пр.) не учитывает прокатной оценки (ренты) железнодорожных путей, оборудования и подвижного состава. Таким образом, эта рента, рассчитанная на один перевозимый вагон, в данном примере должна составить  $500 - 200 = 300$  руб. При более глубоком анализе, на котором мы не считаем нужным останавливаться, эта сумма могла бы быть разбита на части, отвечающие отдельно: 1) полотну и оборудованию пути, 2) тяговому и 3) вагонному составам.

Исходя из о. о. оценки перевозки, можно правильно (с точки зрения эффективности для народного хозяйства в целом) и сравнительно легко определять оправданность мероприятий, позволяющих снизить потребность в транспорте, а также

мероприятий на транспорте, ведущих к повышению его пропускной способности. Такая оценка дает возможность установить, позволяет ли данное мероприятие сократить народнохозяйственные потери, связанные с недостатком транспорта. Продемонстрируем это на нескольких таких подсчетах.

1) Взвешивание груза перед укладкой в вагон при отсутствии механизированных весов представляет трудоемкую операцию. Пусть она стоит 15 руб. на вагон. Взвешивание позволяет отправлять полностью загруженные вагоны и тем самым сократить на 5% потребность в них. Целесообразно ли это мероприятие?

Из каждых 20 вагонов экономится один, затраты на сэкономленный вагон составят  $19 \times 15 = 285$  руб., что ниже о. о. оценки перевозки (500 руб.). Таким образом, мероприятие эффективно с точки зрения народного хозяйства, хотя и невыгодно для предприятия, проводящего его, которое, затратив 285 руб., сэкономит всего 200 руб. на вагон.

Конечно, данное мероприятие может быть рекомендовано только в том случае, если имеется возможность обеспечить погрузку достаточным количеством рабочей силы и так, чтобы это не увеличивало простоя вагонов[\*].

2) При перевозке некоторого безусловного груза оборудование вагона специальными решетками, бортами для укладки и т. п. позволит увеличить на 50% вместимость вагона. Стоимость такого оборудования — 150 руб. на вагон, и повторно оно не используется. Нужно ли его применить?

Груз из каждых трех вагонов можно будет поместить в двух. Их оборудование будет стоить  $2 \times 150 = 300$  руб. Затраты на сэкономленный вагон 300 руб. (меньше 500), следовательно, мероприятие целесообразно.

[Еще больший эффект в этом отношении должно дать увеличение грузоподъемности вагона за счет снижения его собственного веса путем частичной замены в вагоностроении черных металлов и дерева современными материалами — дюралюминием, пластмассами. По-видимому, несмотря на большую себестоимость этих материалов в настоящее время, такое их использование может оказаться экономически оправданным, если учитывать о. о. оценку перевозок, а расчет вести для условий интенсивного использования таких вагонов на загруженных магистралях. То же самое относится к использованию большегрузных вагонов\*\*.]

3) Предприятие в г. А пользуется открытым песчаным карьером, расположенном вблизи г. Б, потребляя 20 вагонов песка в сутки. Себестоимость этого высококачественного песка в Б — 100 руб. за вагон. Вблизи А есть возможность получать только низкачественный песок, использовать который гораздо сложнее. Необходимые для этого мероприятия (промывка и проч.) обойдутся в 300 руб. на вагон. Кроме того, потребуются капиталовложения в сумме 800 000 руб. (на прокладку подъездной дороги и пр.). Стоит ли отказаться от карьера в Б?

Затраты на сэкономленный вагон составят  $300 - 100 = 200$  руб. Если учесть о. о. оценку 500 руб., народнохозяйственная экономия будет равна  $500 - 200 = 300$  руб. на вагон. Экономия составит 180 тыс. руб. в месяц (требовалось  $20 \times 30 = 600$

\*[Характерный пример подобного рода приведен в печати: только недогруз вагонов зерном приносит около 130 млн руб. потерь («Промышленно-экономическая газета», 18 сентября 1957 г.).]

\*\*См. «Промышленно-экономическая газета», 18 июля 1958 г.

вагонов). Таким образом, капиталовложения окупятся быстрее, чем за четыре с половиной месяца. Мероприятие следует признать эффективным.

4) Руда — безусловный груз. Механическое обогащение ее на месте (например, сортировка) позволяет сократить перевозки на 10% за счет снижения веса. Затраты на обогащение — 30 руб. на вагон. Таким образом, сэкономленный вагон обойдется в 300 руб. Сравнение с о. о. оценкой перевозки (500 руб.) показывает, что это мероприятие целесообразно с народнохозяйственной точки зрения, хотя оно и вызовет некоторое повышение себестоимости руды.

Во всех приведенных примерах возможность уменьшения загрузки транспорта имела и была эффективна с точки зрения народного хозяйства. В то же время из-за того, что на многих загруженных магистралях действующий железнодорожный тариф занижен, осуществление этих мероприятий связано с повышением себестоимости и вследствие этого невыгодно для предприятий, могущих их осуществить. И действительно, в большинстве случаев, если предприятию удалось добиться удовлетворения своей заявки на транспорт, оно не проводит подобных мероприятий, поскольку это ему невыгодно.

Например, до сих пор продолжают перевозки целых составов формовочного песка, хотя его можно получать и на месте<sup>6)</sup>. Наряду с этим весьма многочисленны случаи, когда отказ от предоставления вагонов, которые могли быть легко сэкономлены в другом месте, влечет громадные потери. {Так, группа кожевенных и обувных заводов в Ярославле понесла потери в несколько миллионов рублей в результате невозможности подвезти своевременно 10 вагонов дубильного экстракта.}

[Учет о. о. оценки железнодорожного транспорта в экономических расчетах, в особенности приближение к ней железнодорожного тарифа, будет способствовать и более правильному использованию других видов транспорта. Это сделало бы более выгодным для предприятий использование другого транспорта, когда оно целесообразно (водный и смешанный транспорт при наличии водных путей, автотранспорт на короткие расстояния); в то же время исключило бы явно нецелесообразное использование этих видов транспорта (водный транспорт для скоропортящихся грузов, автотранспорт на далекие расстояния). При этом расчет позволил бы решать вопрос о выборе вида транспорта с учетом одновременно и народнохозяйственных интересов и интересов предприятия.]

Наличие такой более совершенной системы тарифов особенно существенно в настоящее время, когда многие плановые решения, в частности, о путях междугородних экономических связей, переносятся на места. Поэтому наличие необходимых экономических показателей для правильного установления этих связей в соответствии с общегосударственными интересами особенно важно.]

5) Заводу в г. А с его неприспособленным оборудованием отливка заготовок обходится в 160 руб. за тонну. Если металл направить на завод в г. Б, где литейный цех более приспособлен для отливок этого вида, их стоимость составит 130 руб. за тонну. Разумно ли отправлять металл для отливок в г. Б?

---

<sup>6)</sup>{Так из Челябинской области в Свердловскую ежедневно вывозят два состава формовочного песка, хотя его можно было бы получить и на месте. («Правда», 10 окт. 1942 г.)}

На вагоне грузоподъемностью 16,5 т экономия составит  $16,5 \times (160 - 130) = 495$  руб. Затраты на перевозку вагона в оба конца  $2 \times 500 = 1000$  руб. (по о. о. оценке). Мероприятие в данных условиях неоправданно.

Этот пример является характерным. При правильном учете транспортных затрат кооперирование заводов, требующее больших дополнительных перевозок на значительные расстояния, часто оказывается нерациональным. Вследствие этого в ряде случаев неоправданна и узкая специализация предприятий (в частности, металлопрокатных), рассчитанная на кооперирование и перевозки на большие расстояния. Неверный учет транспортных затрат был, по нашему мнению, одной из главных причин [ненужной, излишней специализации, случаи которой отмечались еще на XVIII съезде КПСС]<sup>7)</sup>.

[Во многих других случаях, наоборот, специализация и кооперирование вполне оправданны, несмотря на связанное с ними увеличение загрузки транспорта. При этом для правильного решения этого вопроса всегда необходимо знать народнохозяйственную оценку транспортных затрат.]

6) В г. А существует оборудованное массовое мыловаренное производство<sup>8)</sup>. Себестоимость изготовления куска мыла составляет 50 коп.

Имеется предложение: организовать в г. Б кустарное мыловаренное производство (для обслуживания города и района), чтобы не загружать транспорт. Другими словами, предлагается производить мыло на месте вместо того, чтобы направлять сырье для варки мыла на завод в А и получать оттуда готовое мыло. Себестоимость куска мыла в условиях такого мелкого полукустарного производства должна составлять 1 руб. Целесообразна ли организация такого производства?

Производим расчет. Вес куска мыла 100 г; учитывая тару, можем считать, что вместимость вагона составит 100 тыс. кусков. Разница в их себестоимости — 50 тыс. руб. Перевозка вагона в оба конца (по оценке) 1 тыс. руб. Вывод: организация кустарного мыловаренного производства в Б крайне неразумна.

[Таким образом, в случаях, когда перевозки продукции (и материалов) не связаны с большой загрузкой транспорта, решающее значение в размещении производства имеют производственные затраты. В частности, должны использоваться преимущества, которые в этом отношении дает массовое и специализированное производство.]

Несмотря на бесспорные в ряде случаев преимущества специализации и концентрации производства, оно не всегда осуществлялось из ведомственных соображений и оправдывалось загруженностью транспорта, нерациональностью дальних перевозок, особенно, если речь шла о потребительских товарах.]

Отказ в предоставлении транспорта для ценных грузов никак не может быть оправдан. Его можно объяснить только потерей чувства масштаба. Рассуждают примерно так. Что важнее, уголь или пуговицы? Конечно, уголь! Значит, вагон для пуговиц можно дать в последнюю очередь. Но при этом упускают из вида, что для обеспечения пуговицами большого города хватит одного вагона в год, тогда

<sup>7)</sup> {«вредного увлечения специализацией», которое было осуждено XVIII парт. съездом.}

<sup>8)</sup> В аналогичном примере в тексте 1942 г. говорится о производстве ложек, а не мыла.

как для снабжения углем нужны тысячи вагонов; а один вагон угля может быть легко заменен несколькими десятками кубометров дров.

Ввиду сказанного следует привести и такой расчет, убеждающий в справедливости нашего вывода.

Пусть речь идет о перевозках ценных грузов (с высокой стоимостью весовой единицы) как производственных, так и товаров широкого потребления. Доставка тех и других имеет большое значение для страны: она важна для нормального хода производства, обеспечивает насущные потребности населения, способствует мобилизации его средств и т. д. В то же время число вагонов, нужное для перевозок этого рода, незначительно.

Будем говорить о ценных продуктах, цена которых не ниже 10 руб. за кг (включая тару, а для легких грузов — с учетом занимаемого объема). В среднем можно считать их цену равной 15 руб. за кг или около 250 тыс. руб. за вагон. Тогда, если даже принять, что общая стоимость грузов этой категории, подлежащих транспортировке, за год составит 30 млрд руб., то число вагонов под погрузку для них ежедневно (по всему Союзу) составит около 300  $[30\,000\,000\,000 : (250\,000 \times 360) = 330]$ . Таким образом, сокращение даже на 50% перевозок этого рода, принесет огромные потери стране, не облегчило бы заметно работу железнодорожного транспорта (150 вагонов составляют около 0,2% суточной погрузки)<sup>9)</sup>.

Ввиду сказанного необходимо признать, что отказ в транспорте для ценных грузов, таких как, например, мелкие инструменты, лаки и краски, мануфактура, обувь, парфюмерия, книги является совершенно неоправданным.

7) Проведение некоторых мероприятий на дороге, требующих значительных затрат (увеличение числа диспетчеров, службы связи, штата осмотровиков, форсирование движения [в результате применения автоматизации]), связано с повышением себестоимости перевозки вагона до 210 руб., но позволяет увеличить пропускную способность дороги до 1300 вагонов в сутки. Следует ли провести эти мероприятия?

Произведем расчет. Себестоимость перевозки дополнительных 100 вагонов составит:  $1300 \times 210 - 1200 \times 200 = 33\,000$ , т. е. 330 руб. за вагон, а оценка вагона 500 руб. Следовательно, эти мероприятия нужно признать эффективными с народнохозяйственной точки зрения{\*}.

Это, конечно, не означает, что на железнодорожном транспорте не нужно снижать себестоимость. Такие возможности весьма значительны, и их необходимо искать, но важно, чтобы они не приводили к снижению пропускной способности дороги.

[В этой связи уместно обратить внимание на то, что экономические преимущества широкого перехода на тепловозы и электровозы, намеченного семилетним планом, делаются еще более разительными, если в экономическом расчете учитывать о. о. оценку железнодорожных перевозок. Использование такой тяги ведет к резкому увеличению пропускной способности дорог за счет увеличения скоростей и оборачиваемости подвижного состава, и из расчетов в изложенном примере ясно,

<sup>9)</sup> Оценка объема таких перевозок в тексте 1942 г. вдвое меньше.

{\*}{Этот расчет показывает всю узость «предельщиков», которые, рассматривая транспорт изолированно от всего народного хозяйства, отвергали подобные мероприятия.}

как это сказывается на величине экономического эффекта. Вообще, экономические вопросы, связанные с введением прогрессивных средств тяги (выбор ее вида, очередности распространения и т. п.), могут быть правильно решены только с учетом народнохозяйственной оценки транспорта.]

8) Рассмотрим еще такой вопрос.  $\{^i\}$  [Вблизи  $B$  добывается высококалорийный уголь, его себестоимость — 1500 руб. в расчете на один вагон; этот уголь используется для энергетических целей и в  $A$ . Целесообразно ли отказаться от его применения в  $A$ , заменяя его низкокалорийным углем, добываемым вблизи  $A$ , учитывая, что себестоимость эквивалентного по теплотворной способности количества последнего — 1800 руб.? Если исходить из установленного железнодорожного тарифа, это покажется нерациональным; учитывая о. о. оценку перевозок, видим, что затраты на привозной уголь, равные  $1500 + 500 = 2000$  руб., превосходят затраты на местный (1800 руб.). Так что лучше использовать местный уголь.

Предположим теперь, что речь идет о самой железной дороге. Участок этой дороги вблизи  $A$  потребляет ежедневно 20 вагонов привозного угля. Стоит ли перевести топки паровозов на местный уголь? Следует учесть, что ввиду уменьшения скорости паровозов, увеличения времени загрузки топлива и проч., пропускная способность дороги уменьшится на 5%, т. е. на 60 вагонов.

Подсчитаем итоги этого мероприятия. Экономия от замены привозного угля местным составит  $20 \times (2000 - 1800) = 4000$  руб. Потеря прокатной оценки 60 вагонов ввиду уменьшения пропускной способности дороги будет равна  $60 \times 300 = 18\,000$  руб. В данных условиях такая замена явно нерациональна и, по-видимому, может оказаться выгодной лишь в редких случаях.

Вообще, в практике, очевидно, вполне реальны случаи, когда даже повышение расхода топлива и в связи с этим себестоимости перевозок может оказаться оправданным, если это позволит повысить пропускную способность загруженной линии; для такой линии, например, электротяга может оказаться более эффективной, чем тепловозная, даже если она связана с большими расходами.]

Полученные результаты сформулируем так.

**Вывод 21.** В случае, если предъявленные грузы не исчерпывают пропускной способности дороги, себестоимость перевозок (правильно подсчитанная) верно отражает народнохозяйственные затраты по перевозке. В случае исчерпания пропускной способности следует вместо себестоимости пользоваться о. о. оценкой перевозки, которая учитывает дополнительно ренту с оборудования дороги, рассчитанную на один вагон. Эта оценка определяется всеми условиями: количеством и характером предъявляемых к перевозке грузов, пропускной способностью дороги и возможностями ее увеличения и пр. При помощи такой о. о. оценки правильное решение вопроса о целесообразности какой-либо перевозки получается сравнением рассчитанной на один вагон экономии (народнохозяйственного эффекта), достигаемой этой перевозкой, с указанной оценкой.

О. о. оценка транспортируемого груза складывается из о. о. оценки этого груза в пункте отправления и о. о. оценки перевозки.

Нужно сказать, что схемы расчетов, которые мы привели, не очень легко осуществить с той же точностью на практике, хотя методика такого расчета разрабо-



тана и для самых сложных условий. Причиной этого является, с одной стороны, отсутствие необходимых данных, с другой — их неполноценность<sup>{10}</sup>.

[Ввиду того что отпускные цены и себестоимости не отражают полно и правильно народнохозяйственных затрат на производство продукта в каждом месте, расчеты следует строить, пользуясь о. о. оценками. Однако за отсутствием их мы будем вынуждены опираться на данные по себестоимости. В таком случае полученные выводы будут гораздо менее обоснованными.]

Следует сказать, однако, что даже весьма грубые приближения к о. о. оценкам перевозок и их применение позволит сделать определенные, несомненно, практически полезные выводы.

Пусть народнохозяйственная оценка перевозки одного вагона (для среднего пробега порядка 1000 км при средней загрузенности дороги) была бы самым грубым образом определена, скажем, в пределах от 400 до 2000 руб.<sup>11)</sup>

Тогда, исходя из таких оценок, можно было бы указать два практических вывода (в обоих случаях имеются в виду указанные средние условия).

1. Целесообразно проведение любых мероприятий, снижающих потребность в перевозках или увеличивающих пропускную способность дороги, если затраты будут меньше 400 руб. на один вагон.

2. Следует признать, во всяком случае, нерациональным отказ от предоставления вагонов для перевозки в тех случаях, когда потери предприятия в связи с этим составят 2000 руб. и выше на каждый не предоставленный вагон.

\* \* \*

Рассмотрим вопрос о рациональном прикреплении пунктов производства некоторого продукта к пунктам его потребления, когда объемы их заданы.

ПРИМЕР 2. В пунктах *A* и *B* производится некоторый продукт, в пунктах *B* и *Г* он потребляется. На схеме (рис. 7) в скобках указаны объемы (в вагонах) суточного производства (со знаком +) и потребления (со знаком -). Там же приведены затраты по перевозке одного вагона между каждыми двумя пунктами: в случае, когда дорога недогружена, это себестоимость; если она загружена — о. о. оценка перевозки одного вагона. Требуется составить оптимальный план перевозок, т. е. такой, в котором суммарные затраты по перевозке минимальны.

В одном из возможных планов перевозок (рис. 7) из *A* все 50 вагонов направляются в *Г*, из *B* — 30 вагонов в *Г* и 30 вагонов в *B*. Суммарные затраты по перевозке составляют  $50 \times 700 + 30 \times 200 + 30 \times 400 = 53\,000$  руб. Как узнать, является ли этот план оптимальным?

Для решения вопроса опять используем о. о. оценки. Постараемся найти их для одного вагона данного продукта во всех пунктах. Предположим, что в *A* эта оценка равна *a* рублей, тогда в *Г* она будет равна  $a + 700$ , так как груз транспортируется

<sup>{10)}</sup>{Как неизменные цены, так и отпускные, ввиду известных недостатков в методах калькуляции себестоимости, не всегда правильно отражают соотношение народнохозяйственных ценностей вещей на сегодняшний день.}

<sup>11)</sup>В тексте 1942 г. интервал значений для оценки перевозки (в военное время) от 1000 до 5000 руб.

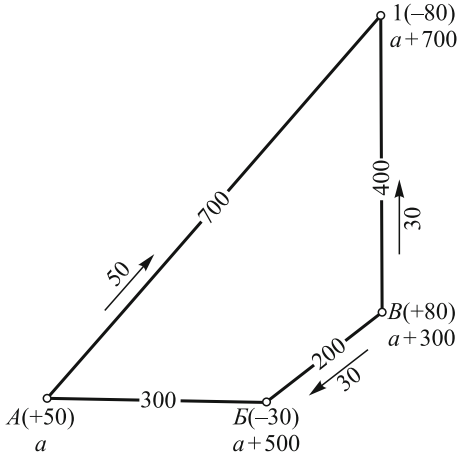


Рис. 7

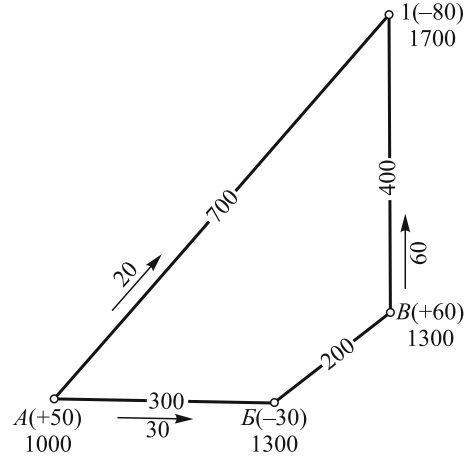


Рис. 8

из  $A$  в  $\Gamma$  (см. вывод 21). Поскольку тот же груз транспортируется в  $\Gamma$  и из  $B$  с затратой 400 руб., то оценка его в  $B$  должна быть на 400 руб. меньше, чем в  $\Gamma$ , т. е.  $(a + 700) - 400 = a + 300$ . Наконец, так как груз транспортируется из  $B$  в  $B$ , его оценка в  $B$  должна быть  $(a + 300) + 200 = a + 500$ . Между тем, транспортируя его из  $A$  в  $B$ , мы получили бы для груза меньшую оценку  $-a + 300$ .

Полученная разница сразу показывает, что план, приведенный на рис. 7, не оптимален. Нужно пункт  $B$  снабжать из  $A$ . Соответствующий план перевозок дан на рис. 8. Для этого плана суммарные затраты по перевозкам составляют:  $20 \times 700 + 30 \times 300 + 60 \times 400 = 47\,000$  руб., т. е. на 12% меньше. Это оптимальный план. Если о. о. оценка вагона груза в пункте  $A$  равна, скажем, 1000 руб., то в  $\Gamma$  она будет 1700 руб., в  $B$  — 1300 руб. и в  $B$  — 1300 руб. При таких оценках ясно, что снабжение пункта  $B$  из  $B$  невыгодно; но оно в новом плане и не производится. Именно такая система оценок правильно учитывает транспортные моменты, благоприятствует рациональной транспортировке грузов и препятствует нецелесообразной\*.

В настоящее время для многих важных видов материалов принята единая цена — франко-станция отправления. Такая система цен не обеспечивает оптимальности плана транспортировки. При такой цене для пункта  $B$  более выгодно снабжение из  $B$ , чем из  $A$ , так как пункт  $B$  ближе к  $B$  и продукт обойдется дешевле. Но в таком случае и получится план, приведенный на рис. 7, который, как мы видели, не оптимален. Те же недостатки имеет и единая цена франко-станция назначения. Таким образом, мы считаем более разумной систему поясных цен, построенную с учетом рационального плана народнохозяйственных перевозок.

\* Более полное изложение методов решения вопросов, связанных с планированием перевозок, дано в специальной работе автора совместно с М. К. Гауриным[: Сборник «Проблемы повышения эффективности работы транспорта». Изд-во АН СССР, 1949, стр. 110–138. В ней указаны расчетные методы, пригодные для любого числа пунктов, нескольких видов груза, с учетом кружностей и т. п. (см. также Приложения I и II)].

**Вывод 22.** Оптимальному плану перевозок отвечает определенная система о. о. оценок для продукта в различных пунктах. Эта система такова, что если продукт транспортируется из одного пункта в другой, то разность о. о. оценок в этих пунктах равна затратам на перевозку между ними; если он не транспортируется, эта разность не превосходит затрат по перевозке.

Наличие такой системы оценок показывает, что план перевозок оптимален — он не содержит нерациональных перевозок. Напротив, невозможность построения такой системы оценок говорит о том, что план не наилучший.

Другие системы цен для груза, в частности, единая цена франко-станция отправления или франко-станция назначения, не стимулируют устранения нерациональных перевозок.

Отметим, что аналогичные методы могут применяться для одновременного анализа вопроса о транспортировке и определении объемов производства, если последние допускают варьирование[\*].

### **§ 8. Наилучшее использование наличной производственной базы. Общая система объективно обусловленных оценок и ее значение**

**Общие положения.** В предыдущих параграфах мы рассмотрели вопрос о роли и наилучшем использовании различных производственных факторов: труда (являющегося основным производственным фактором), сырья и материалов, [природных ресурсов,] факторов, от применения которых зависит эффективность труда (электроэнергия), оборудования, транспорта. [При этом единственным источником стоимости является труд: живой, овеществленный или данный в форме услуг.] Действие каждого из этих факторов нами рассматривалось изолированно. Однако полученные выводы относительно оптимального плана и о. о. оценок сохраняют силу и в том случае, когда все эти факторы действуют совместно. Установленные результаты позволяют наметить принципы методики решения всей совокупности планово-экономических вопросов, связанных с использованием наличной производственной базы.

[Полученные выводы относятся уже не только к ограниченному производственному комплексу, но в значительной степени и к народному хозяйству в целом.]

Все вопросы экономического расчета и планирования можно разделить на две группы.

К первой группе мы относим те вопросы, в которых речь идет об использовании ресурсов, заключающихся в наличных производственных возможностях (оборудование и механизмы, освоенные природные богатства, транспортные линии и источники электроэнергии, кадры рабочих).

В этих случаях ставится задача о наилучшем распределении средств и о выборе производственных способов, осуществимых в данных условиях, т. е. не требующих длительного времени для подготовки и значительных капиталовложений. Таким образом, здесь имеются в виду вопросы планирования и распределения, связан-

---

\*[Пример такого рода проанализирован в Приложении II, стр. 234–235.]

ные со сравнительно кратким периодом времени (год, квартал, месяц), — *вопросы текущего планирования* и оперативных экономических решений.

Ко второй группе мы относим те вопросы, в которых существенны фактор времени и необходимость значительных новых капиталовложений: выбор типа новых предприятий, план расширения дорожной сети, план подготовки квалифицированной рабочей силы и пр. Это вопросы перспективного планирования.

Именно вопросы первой группы и определяют задачу рационального использования наличной производственной базы. Они служат предметом исследования всей данной главы и в более широкой постановке рассматриваются в этом параграфе. Вопросам второго вида посвящена глава III.

Задача построения плана, дающего наилучшее использование наличной производственной базы, в несколько идеализированной и схематизированной форме заключается в следующем<sup>{12}</sup>. [В соответствии с обстановкой и задачами данного периода определен состав нужной конечной продукции — распределение ее по видам. В конечную продукцию включаются средства личного потребления населения, средства потребления, идущие на общегосударственные нужды (армия, культура и здравоохранение, жилищное строительство, управление и т. д.), средства, направляемые на расширение производственной базы — на капиталовложения в промышленность, сельское хозяйство, дорожное и коммунальное строительство.] Определено и расходование или накопление резервов сырья, материалов и прочих элементов по их видам.

Требуется, исходя из этого и из наличных средств (рабочей силы, оборудования, освоенных или известных производственных способов), составить оптимальный план, т. е. план, обеспечивающий получение максимально возможного объема конечной продукции нужного состава. Оптимальность плана, конечно, не означает, что в процессе реализации он не может быть перевыполнен; но это может быть достигнуто в результате изыскания новых ресурсов, новых производственных способов и новых возможностей организации производства, улучшения технических показателей и приемов работы. Имеется в виду, что наличные ресурсы, известные производственные способы и возможности, достигнутые показатели должны быть учтены при составлении плана, иначе его нельзя считать оптимальным.

Подобно тому, как это было в рассмотренных выше более простых частных случаях, оптимальный план должен существовать и для поставленной сейчас более полной и сложной задачи. Вопросы о практическом нахождении такого плана мы пока не касаемся; этот вопрос обсуждается ниже.

Как и в рассмотренных выше задачах, с оптимальным планом связана определенная система объективно обусловленных оценок. Эта система о. о. оценок включает: а) оценки труда различных специальностей и квалификации, б) оценки продукции (конечной и промежуточной), в) оценки различного рода материалов и сырья, г) оценку электроэнергии, д) о. о. оценки оборудования (прокатная оценка для перемещаемых видов оборудования, плановая рентабельность для

---

<sup>{12}</sup> {Директивно определен состав нужной конечной продукции по ее видам (средства ведения войны, средства потребления армии и населения, средства, направляемые на увеличение производственной базы — на капиталовложения).}

предприятий), [е) ренту с природных ресурсов,] ж) оценки различного рода услуг (транспорта, связи). При этом все эти оценки могут иметь разные значения в различных экономических районах. Наряду с указанными общими оценками, могут быть оценки, исчисляемые и применяемые главным образом внутри предприятия: оценки отдельных деталей или операций над ними, оценки полуфабрикатов, оценки использования неперемещаемого и индивидуального оборудования. Для этой системы о. о. оценок имеет место та же связь с оптимальным планом, какая неоднократно отмечалась выше для частных случаев:

1. На каждом предприятии или, вообще, в любом производственном процессе для используемого в оптимальном плане производственного способа сумма затрат должна равняться общей стоимости продукции (и то и другое исчисляется по о. о. оценкам), иначе говоря, производство оправданно (рентабельно)\*].

Для неиспользуемых производственных способов суммарная оценка затрат больше (или равна) суммарной оценке продукции.

2. Если некоторый фактор выступает в одном производстве как материал (сырье), а в другом (в том же пункте) как продукция (результат производства), то о. о. оценки его в обоих случаях должны совпадать.

3. Разность оценок одного и того же фактора в двух различных местах, если перемещение из одного места в другое возможно, не должна превосходить оценки потерь, связанных с таким перемещением. В частности: а) разность оценок для некоторой продукции в двух пунктах не должна превосходить оценки затрат по ее транспортировке; б) разность прокатных оценок оборудования не должна превзойти потерь, связанных с возможным перемещением его (транспортировка, монтаж на новом месте, простой в течение времени перемещения); в) разность оценок рабочей силы, когда возможен ее перевод, не должна превосходить затрат по переводу (транспорт, простой во время перевода, снижение производительности труда на первый период и пр.).

Все сказанное относится только к тем возможным способам производства и перемещения, которые учитывались при составлении оптимального плана.

Система о. о. оценок *конкретна*, связана со всей обстановкой, которая определяется плановым заданием: составом конечной продукции, наличными ресурсами, уровнем техники — совокупностью освоенных производственных способов. Существенные изменения этих условий вызывают известные изменения и в системе о. о. оценок в основном для тех факторов, которые этими изменениями особенно затрагиваются. В то же время оценки в определенной степени *устойчивы*: отдельные

---

\*[Читателя может удивить, что при применении системы о. о. оценок предусматривается только оправданность производства и рентабельность (доходность), равная нулю. Это связано, во-первых, с тем, что выводы изложены для схематизированной постановки задачи, а также с несколько непривычным пониманием рентабельности, именно: а) в числе затрат учтена прокатная оценка — рента с предприятия; в действительности она представляет собой чистый доход, поступающий в распоряжение государства (часть его, вероятно, должна оставаться в распоряжении предприятия и включаться в его доход); то же самое относится и к другим отчислениям: земельная рента (§ 6), взносы за использование дефицитных категорий труда (§ 3, стр. 169); б) нулевой предусматривается только плановая рентабельность; в действительности, благодаря перевыполнению плановых заданий и снижению расходных норм, фактическая рентабельность окажется положительной даже с учетом упомянутых в п. а) видов затрат.]

частные изменения перечисленных моментов не вызовут значительных перемен в системе о. о. оценок.

Далее, о. о. оценки *реальны*, их соотношения соответствуют реальным соотношениям народнохозяйственных затрат и фактически реализуемы. Если эти оценки приведены к простому труду, то, скажем, тот факт, что оценка изделия равна ста человеко-дням, указывает на возможность такого изменения в плане, которое даст дополнительный выпуск этих изделий при дополнительной затрате ста человеко-дней простого труда на каждое изделие. Напротив, снятие с программы каждого из этих изделий позволит высвободить сто человеко-дней простого труда. Соотношение 2 : 5 для о. о. оценок двух видов продукции означает, что можно, сняв с программы, например, 2000 шт. первых изделий, произвести дополнительно (примерно) 5000 шт. вторых. Подобным же образом дело обстоит и с оценками материалов, услуг и оборудования. Напротив, существующая система цен такой реализуемостью ее соотношений не обладает.

Это не так заметно в промышленности, где денежная калькуляция, как правило, только регистрирует соответствующее движение материальных фондов (если планом предприятия предусмотрены затраты 1 млн руб. на сырье, то ему обеспечивается и возможность получения сырья). Однако в капитальном строительстве, где баланс материальных средств так точно не планировался, это сказалось весьма отрицательно. Несмотря на то что предусмотренные планом суммы отпускались, их в значительной части не удавалось «освоить», а в той части, в которой они были освоены, фактическая стоимость работ намного превосходила плановую. Плановые цены не удавалось «реализовать», т. е. получить по этим ценам (или даже, вообще, получить в полном объеме) необходимые материалы.

[В значительной степени] {Именно} этим [следует объяснить] {объясняется} [имевшее место в свое время] невыполнение плана первой и второй пятилеток по строительству.

**Применение о. о. оценок при анализе экономической эффективности производственных способов.** Если бы значения о. о. оценок были найдены, они могли бы быть применены при решении многочисленных вопросов, касающихся использования наличной производственной базы, возникающих в процессе реализации и улучшения плана. Во всех таких случаях простой расчет на основе о. о. оценок позволил бы объективно выбрать правильное решение, учитывающее общую ситуацию, а также интересы и нужды других предприятий. Чтобы пояснить, как это могло бы делаться и какие изменения вносит этот расчет по сравнению с обычным, приведем несколько примеров. В этих примерах конкретная оболочка взята только для большей наглядности, поэтому мы не входим в технические подробности и берем данные (в частности, значения о. о. оценок) весьма условно.

{ii}[ПРИМЕР 1. На одном из участков машиностроительного завода ряд деталей обрабатывается на универсальном станке. Передача туда специализированного станка значительно повысит производительность при обработке группы деталей, составляющих 20% от их общего числа, давая снижение себестоимости по ним в два раза. Обоснована ли передача специализированного станка на данный участок?

Пусть за смену обрабатывается 500 деталей, стоимость обработки детали на универсальном станке 30 коп. Прокатные оценки универсального и специализи-

рованного станков на данном предприятии равны соответственно 35 и 60 руб. за смену. Произведем расчет.

Обработка всех деталей на универсальном станке за смену стоит:

$$500 \times 0,3 + 35 = 185 \text{ руб.}$$

Затраты по второму варианту:

универсальный станок . . . . .  $400 \times 0,3 + 35 = 155 \text{ руб.}$

специализированный станок . .  $100 \times 0,15 + 60 = 75 \text{ руб.}$

Всего . . . . . 230 руб.

Второй вариант менее экономичен и должен быть отвергнут. Напротив, применяемый расчет, в котором сравниваются только себестоимости, показал бы обоснованность мероприятия, как дающего снижение себестоимости, казалось бы, без всяких дополнительных затрат.

**ПРИМЕР 2.** На другом участке того же предприятия на обработке деталей заняты станки устаревшего образца. За смену обрабатывается 400 деталей, стоимость обработки детали 0,45 руб. Прокатная оценка станка 20 руб. за смену. Целесообразно ли заменить устаревшие станки специализированными (того же типа, что и в примере 1), если последние дадут повышение производительности в полтора раза, т. е. снижение себестоимости обработки деталей на одну треть?

Оценим затраты на обработку деталей:

станок старого образца  $400 \times 0,45 + 20 = 200 \text{ руб. (400 деталей)}$

специализированный станок  $600 \times 0,30 + 60 = 240 \text{ руб. (600 деталей)}$

в расчете на 400 деталей 160 руб.

Чистая экономия составляет 40 руб. на станок за смену. Таким образом, мероприятие выгодно и должно быть осуществлено. Поскольку оценка специализированных станков реальна, их можно высвободить на другом участке и предоставить для замены станков устаревшего образца.

По-видимому, если бы оба вопроса этого примера рассматривались совместно, то даже на основе простого сопоставления можно было понять, что во втором случае специализированный станок нужнее. Но фактически вряд ли возможно при решении одного вопроса (с помощью обычно используемых показателей) учесть конкретно нужды других мест. Между тем о. о. оценки и результаты сделанного на их основе расчета подсказали бы руководству предприятия в первом случае, что где-то на другом участке специализированный станок нужнее, так как расчет показал нецелесообразность мероприятия. А во втором случае, что, несмотря на дефицитность (и высокую прокатную оценку) специализированных станков, их необходимо применить.

В настоящее время, поскольку в обоих случаях по расчету себестоимости мероприятие представляется выгодным, обе заявки покажутся обоснованными, и вполне возможно, что как раз первому участку удастся получить специализированный станок, а второму нет. Иначе говоря, наличные специализированные станки будут использоваться с далеко не максимальным эффектом. Без расчета, на основе лишь качественных соображений найти правильное решение подобных вопросов невозможно, так как при одних данных правильно одно решение, при других — другое.

Разумеется, сходные вопросы могут возникнуть при распределении оборудования в более крупных масштабах. Скажем, совнархоз, решая вопрос о том, куда направить новое оборудование, должен учитывать его прокатную оценку на различных предприятиях.]

**ПРИМЕР 3.** Для двух деталей запроектирована обработка способом штамповки. Вместо прежних 15 мин рабочего времени на каждую деталь штамповка требует 5 мин на первую и 2 мин на вторую. Пусть при этом затраты на обработку первой детали уменьшатся в два раза, второй — в четыре раза. Однако прессы полностью загружены. В таком случае оба предложения, вероятно, хотя и будут признаны полезными, но в данный момент практически неосуществимыми.

Сравнение штамповки и прежнего способа расчетом по о. о. оценкам, скажем, может показать, что учитывая прокатную оценку ранее использовавшихся станков и высокую (ввиду загруженности) оценку времени прессы, для первой детали сумма затрат на ее обработку возрастет, тогда как для второй уменьшится. Из чего следует, что первую деталь в данных условиях переводить на штамповку нецелесообразно, а вторую деталь нужно перевести, разгрузив прессы за счет снятия с них какой-то другой работы (реализующей их о. о. оценку). При этом потери будут меньшими, чем выигрыш.

**ПРИМЕР 4.** Использование [менее производительных] {демонтированных и малопроизводительных} станков позволяет при условии увеличения на 20% числа работающих поднять выпуск продукции на 15%; затраты материалов на единицу продукции остаются неизменными. Оправданно ли это?

На исчисляемой обычным образом себестоимости продукции такое изменение скажется отрицательно. Будет ли оно и в самом деле нерационально? Это зависит от значений о. о. оценок и других данных.

Пусть, например, о. о. оценка единицы продукции составляла 10 руб., причем затраты складывались следующим образом:

материалы и другие зависимые затраты (кроме труда) ...	3 руб.
независимые расходы .....	1 »
затраты труда .....	3 »
рента с оборудования .....	3 »
(всего по о. о. оценкам) .....	10 руб.

Выпуск продукции 100 тыс. шт. в месяц, затраты 1 млн руб. При привлечении дополнительной рабочей силы затраты на выпуск 115 тыс. шт. составят:

материалы .....	$115\,000 \times 3 = 345\,000$ руб.
независимые расходы .....	100 000 »
затраты труда .....	$(300\,000 + 20\%) = 360\,000$ »
рента с оборудования .....	300 000 »
(оборудование то же самое)	
Всего .....	1 105 000 руб.

Отсюда затраты на единицу продукции составят:

$$1\,105\,000 : 115\,000 = 9,61 \text{ руб.},$$

что ниже ее о. о. оценки. Мероприятие целесообразно.



Обычно применяемый расчет показал бы повышение себестоимости и снижение производительности труда; мероприятие сочли бы ненужным.

Следует сказать, что иногда подобные мероприятия реализуются на практике, несмотря даже на то, что это приводит к росту себестоимости. При этом исходят из значимости продукции и желательности повышения ее выпуска. Однако в подобных случаях считают, что поступают «вопреки экономике». В действительности, если мероприятие целесообразно, то правильно проведенный экономический расчет, учитывающий через о. о. оценки конкретные условия, должен показать его рентабельность. Обычный же расчет по себестоимости односторонний — он оперирует только видимыми затратами и должным образом не учитывает такого важного факта, как улучшение использования оборудования.

**ПРИМЕР 5.** В массовом производстве при обработке детали на автоматическом станке получается остаток от полосы, который остается неиспользованным. Предлагается, исходя из необходимости экономии металла, пустить остаток в работу на обычных станках и получить, таким образом, дополнительно еще одну деталь. Разумно ли такое предложение?

Решение зависит от обстановки. Пусть на деталь расходуется 100 г листового металла, о. о. оценка обработки ее на автомате 12 коп. за штуку. При индивидуальной обработке потребуются 0,5 часа станочного и рабочего времени на деталь, что имеет оценку 2 руб.

Итак, экономия 100 г листового металла требует затрат  $2 - 0,12 = 1,88$  руб. Даже при самой завышенной оценке тонны листового металла, равной 2 тыс. руб., 100 г все же стоит 20 коп. Предложение явно неразумно; оно стало бы оправданно только при совершенно фантастической оценке тонны металла, порядка 20 тыс. руб. Конечно, в данном случае правильнее было бы эти остатки, если не направлять в переплавку, то использовать, например, в ремонтном цехе или на других предприятиях.

Следует сказать, что иногда у нас рекомендуют любые мероприятия, дающие экономию дефицитного материала, без всякого расчета и ограничений, даже тогда, когда за счет значительных затрат труда и уменьшения выпуска продукции экономятся крохи. Практическое решение подобных вопросов в значительной мере определяется не общей ситуацией, а капризами снабжения данного предприятия. Если сегодня у него «зажмает» листовой металл, то оно пойдет и на мероприятие, пример которого приведен. Завтра же, если металл подвезут, то предприятие не пойдет на такие же затраты для экономии 2–3 кг металла (вместо 100 г), что было бы уже целесообразно.

Если даже в отдельном случае подобное мероприятие и было применимо и, может быть, в тот момент было оправданно, то систематическое его использование может нанести только вред. {Так, на одной шахте, когда проходка остановилась из-за отсутствия крепежного леса, с большим трудом и опасностью был извлечен и использован крепежный лес из затопленных шахт. Однако такое мероприятие, вызванное срывом нормальной работы, никак нельзя рекомендовать к постоянному применению, как это делают некоторые\*. Эффект будет гораздо большим, если

---

\* {Ноткин А. И. Экономией сырья и топлива укрепим оборонную мощь нашей Родины. — М.: Политиздат, 1942.}

шахтеры направят свой труд и энергию на увеличение добычи угля, а им будет организован нормальный подвоз крепежного леса.} Нередко в разряд дефицитных зачисляются материалы, которые в случае надобности можно дополнительно произвести с соответствующими затратами труда {(вроде крепежного леса)}, значительно меньшими, чем затраты, связанные с их экономией. Конечно, и эти материалы нужно экономить, но не любой ценой. С другой стороны, многие мероприятия по экономии, которые при обычной калькуляции дают повышение себестоимости, нельзя рассматривать как меры, вызванные случайными затруднениями, их следует применять систематически. Ясность в решении этих вопросов может быть внесена применением о. о. оценок.

В связи с примерами 3–5 уместно остановиться на некоторых недостатках, имеющих в настоящее время в вопросах оценки и реализации различных рационализаторских предложений и предложений по организации производства [, несмотря на известные улучшения в этом деле].

Прежде всего, вследствие недостатков в оценке эффекта (калькуляция не учитывает ряда факторов) большое число рационализаторских предложений, внедрение которых в данных условиях явно нецелесообразно (штамповка первой детали в примере 3), кажутся полезными. В результате среди них теряются и часто остаются нереализованными другие предложения, которые могут дать действительную экономию, далеко не всегда совпадающую с экономией по калькуляции. Такое положение приучает к мысли, что если предложение и дает значительную экономию по расчету, то вовсе не обязательно, чтобы оно было реализовано. Жертвой этого наряду с бесполезными становятся и бесспорно эффективные предложения, которые годами не реализуются.

Далее, для ряда важных предложений, обеспечивающих экономию дефицитных материалов, увеличение объема производства без снижения себестоимости, калькуляция не показывает эффекта. Между тем многие из них исключительно полезны для народного хозяйства (пример 4). Часто такие предложения и сейчас признаются нужными и используются, но их рассматривают только как временную меру, вынужденную обстоятельствами. Такая их оценка, а также существующая система поощрений не стимулируют ни работы над подобными предложениями, ни настойчивости в их реализации. Все указанные дефекты в оценке рационализаторских предложений приводят к преобладанию субъективных и случайных моментов при решении вопроса о целесообразности их реализации. При отсутствии объективной количественной методики попытка качественно оценить ряд противоположно действующих факторов ведет к тому, что, пожалуй, чуть ли не каждое предложение может быть мотивированным образом как принято, так и отвергнуто. [То же самое в известной степени относится и к изобретениям.]

ПРИМЕР 6. Дополнительное механическое обогащение руды позволяет: а) сократить время плавки на 10%; б) уменьшить расход угля на тонну металла на 10%. Оно требует установки дополнительного оборудования и увеличения расхода электроэнергии. Эффективно ли это мероприятие?

Это зависит от значений о. о. оценок<sup>13)</sup>. Пусть, например, о. о. оценка угля, расходуемого на производство одной тонны металла, 120 руб.; на тонну металла

<sup>13)</sup>В этом примере в тексте 1942 г. взяты несколько иные цифры.

идет 2 тонны необогащенной руды. Прокатная оценка оборудования для обогащения в расчете на одну тонну составляет 6 руб., оценка электроэнергии, расходуемой на обогащение тонны руды, 2 руб. 50 коп. Прокатная оценка домны и прочего оборудования в расчете на тонну металла 200 руб. (все по о. о. оценкам).

Производим расчет изменений затрат на тонну металла. Дополнительные затраты на обогащение:

оборудование . . . . .	$6 \times 2 = 12$	руб.
электроэнергия . . . . .	$2,50 \times 2 = 5$	»
Всего . . . . .	17	руб.

Сократилось время плавки, и тем самым в калькуляции снизилась на 10% прокатная оценка домны — 20 руб. Сократился на 10% расход угля — 12 руб. Вся экономия — 32 руб.

В результате затраты на тонну металла снижаются на  $32 - 17 = 15$  руб., поэтому обогащение руды целесообразно. Конечно, этот вывод определяется только конкретными значениями о. о. оценок. В других условиях, если бы в металле не было такой нужды, металлургическое оборудование не было бы так загружено и соответственно прокатная оценка оборудования домны была бы ниже, результат мог бы оказаться иным.

[Сходными с рассмотренными являются, вообще, вопросы интенсификации производственных процессов, например, вопрос о применении в металлургии кислородного дутья. В настоящее время его применение из-за высокой стоимости кислорода в ряде случаев удорожает металл, что тормозит внедрение новой технологии. В то же время известно, что применение кислорода на 20–30% повышает производительность мартеновских и на 8–10% доменных печей.

Не имея полных данных, трудно прийти к определенному заключению по этому вопросу, но несомненно, что если бы в экономическом расчете была принята во внимание прокатная оценка металлургического оборудования, то расчет (аналогично рассмотренному примеру) показал бы больший эффект новой технологии по сравнению с получаемой по обычной калькуляции[\*].

Следует сказать, что в подобных сложных вопросах правильно выбрать решение, руководствуясь только качественными оценками, почти невозможно, и, чтобы это сделать, нужно иметь исключительную интуицию. Могут возразить, что руководители предприятий, [совнархозов, министерств] {отраслей} постоянно принимают такого рода решения и справляются без подобных расчетов. Конечно, решения принимаются, и промышленность дает продукцию, выпуск которой неуклонно растет. Однако это отнюдь не доказывает, что все принимаемые решения являются наилучшими или близкими к ним и что невозможна еще лучшая система экономических решений, которая обеспечила бы больший выпуск продукции и более быстрый рост. Многочисленные факты потерь и неиспользованных возможностей и, с другой стороны, примеры работы передовых предприятий показывают, что преимущества социалистического производства реализуются нами еще далеко не полностью.

\*[Исключительное значение применения кислорода в металлургии и роль правильного экономического анализа, связанного с этим вопросом, освещены в выступлении А. И. Гаевского и Л. И. Брежнева на XXI съезде КПСС (Стенографический отчет, т. I, стр. 349 и 426).]

**[Применения о. о. оценок в вопросах хозрасчета, показателей работы предприятий и ценообразования.** Как бы хорошо ни был составлен план, его можно признать полноценным только при двух условиях:

- 1) если в процессе выполнения плана в него будут вноситься коррективы в связи с произошедшими изменениями обстановки и уточнением данных;
- 2) если у исполнителей будет должная заинтересованность в следовании ему.

По отношению к оптимальному плану обеспечение этих условий облегчается тем, что он сопровождается системой о. о. оценок продукции и производственных факторов. Мы уже видели выше, каким образом использование этих оценок позволяет вносить изменение в план при изменении обстановки — состава продукции, появлении новых производственных способов. При этом конкретность и реальность о. о. оценок позволяют на их основе принимать решения, учитывающие фактическую обстановку, например, недостаток или избыток данного вида оборудования. Динамичность о. о. оценок позволяет гибко следить за изменениями, ориентируя предприятия так, что обеспечивается сохранение оптимальности плана при его корректировке.

Однако доведение до предприятий плана и о. о. оценок, дающих возможность выбора решений в соответствии с обстановкой и государственными интересами, хотя и очень важно, но еще недостаточно. Необходимо, чтобы и в систему хозрасчета, финансирования и в экономико-статистические показатели, характеризующие работу предприятий, были внесены такие изменения, которые создавали бы заинтересованность предприятий и других хозяйственных органов в оптимальности плана и правильности принимаемых экономических решений.

Система о. о. оценок дает необходимые для этого инструменты. Так, взимание в пользу государства в той или иной форме о. о. оценки используемого оборудования (арендная или прокатная оценка, плановый уровень рентабельности), учет ее в расчетах между предприятиями (при временной передаче оборудования, при кооперировании) будут способствовать более интенсивному и рациональному использованию оборудования. Взимание дополнительной платы за привлечение дефицитных категорий рабочей силы также создаст заинтересованность в наиболее полном ее использовании. То же самое относится и к ренте — плате за использование природных ресурсов. Наконец, если основные показатели, характеризующие работу предприятия, будут опираться на оценку чистой продукции и плановую рентабельность (при учете прокатной оценки оборудования в затратах), то это создаст заинтересованность предприятий и хозяйственных органов в подборе наиболее подходящего состава и объема производственной программы (ср. пример 4). Такие показатели обеспечат стремление предприятий к увеличению программы, получению новых заказов; приведет к изжитию случаев длительной нерентабельности предприятий.

Построение оптимального плана, обеспечивающего наиболее полное и рациональное использование ресурсов для получения нужной обществу продукции, на всех уровнях хозяйственного руководства, в масштабе всей страны дало бы одновременно возможность определить народнохозяйственные о. о. оценки всех видов продукции. Согласно принципам их построения ясно, что эти оценки должны соот-

ветствовать полным народнохозяйственным затратам, связанным с изготовлением единицы продукции (в текущем рациональном производственном плане) в данный момент и в данных условиях, иначе говоря, отвечать общественно-необходимым затратам труда. Они соответствуют также народнохозяйственной эффективности использования единицы продукции в данных условиях.

Поскольку система о. о. оценок отвечает реальным соотношениям народнохозяйственных затрат на различные виды продукции, эти показатели, естественно, должны учитываться в ценообразовании[\*]. В принципе цены должны приближаться к о. о. оценкам[\*\*]. Конечно, сказанное относится только к оптовым ценам, действующим внутри государственного сектора; розничные, заготовительные и другие цены могут от них существенно отличаться. Что касается оптовых цен, то они также не должны совпадать буквально с о. о. оценками, так как частые их изменения по ряду причин нежелательны. Однако даже приблизительное соответствие цен о. о. оценкам означало бы, что в ценах, как и в оценках, найдут отражение прокатная стоимость, рента и т. д. При этом существенно заметить, что такое изменение в принципах построения цен связано с двумя обстоятельствами. При обычном построении цен на основе себестоимости вовсе не учитываются некоторые виды затрат, которые, как было выяснено, необходимо учитывать. Это — систематическое, структурное отличие цен. Второе отличие связано с тем, что в о. о. оценках отражены и те отклонения, которые связаны с временным недостатком того или иного оборудования или, наоборот, наличием его резервов, резким ростом потребности в данном продукте и т. п.

Несомненно, что это привело бы к иным соотношениям цен, в частности, к некоторому относительному повышению цен на те виды продукции (и услуг), производство которых нуждается в дорогостоящем или дефицитном оборудовании (металл, нефть, уголь, цемент, железнодорожный транспорт). Возникает вопрос, не создаст ли это затруднений, поскольку они в основном потребляются государственными предприятиями. Ясно, что этого не произойдет. Повышение цен будет определяться, прежде всего, включением в цену соответствующей доли прокатной оценки используемого оборудования. Но поскольку вся прокатная стоимость должна поступить в доход государства, это приведет лишь к перераспределению средств между разными статьями бюджета[\*\*\*].

---

\*[На важность упорядочения цен и правильного решения на единообразной основе вопросов ценообразования обращено внимание А. Н. Косыгиным в речи на XXI съезде КПСС (Стенографический отчет, т. I, стр. 171–173).]

\*\*[Наибольшее значение имеет приближение к о. о. оценкам цен, используемых в плановых и экономических расчетах. Возможно, здесь окажется наиболее рациональным непосредственное использование о. о. оценок.]

\*\*\*[Даже наиболее высокооплачиваемые граждане Советского Союза не приобретают на личные средства ни экскаваторов, ни прокатных станков. Поэтому нельзя думать, что изменение цен на средства производства может кого-либо разорить или обогатить. Все сведется к перераспределению средств между статьями государственных расходов и доходов. Однако, несмотря на это, далеко не безразлично, на каком уровне будут установлены цены на средства производства. От этого может существенно зависеть выбор экономических решений. Но именно с точки зрения выбора решений, способствующих установлению оптимального плана, мы и подходим к рассмотрению вопроса об установлении цен на средства производства.]

Такое относительное повышение цен указанных видов продукции в соответствии с их подлинной народнохозяйственной ценностью и затратами в условиях бескризисного социалистического хозяйства никак не воспрепятствует полному использованию всего возможного объема их производства. В то же время, поскольку такая система цен будет способствовать более правильному распределению данной продукции, росту ее производства, экономии и рациональной замене ее другой продукцией, в конечном счете, применение этой системы приведет к снижению цен, хотя и с иными их относительными значениями.

Сказанное относится к той части продукции первого подразделения, которая используется в нем самом. Однако частично эта продукция используется и во втором подразделении. Помимо этого обстоятельства, к некоторому повышению себестоимости предметов потребления приведет и появление новых статей затрат (рента, прокатная оценка и т. д.), что не вызовет, однако, повышения цен, благодаря тому, что они одновременно сформируют и новые статьи дохода, идущие на общественные нужды и накопление. Это позволит значительно сократить перераспределение национального дохода в форме налога с оборота, снизив его размер, так что цены на предметы потребления никак не повысятся, несмотря на рост себестоимости. В то же время произойдет известное сокращение разрыва в масштабах цен обоих подразделений.

Наконец приближение цен к о. о. оценкам, благодаря реальности и конкретности последних, обеспечит соответствие денежных балансов материальным, что повысит роль рубля в экономическом анализе и экономических решениях. Возрастет и значение экономических критериев в оценке деятельности предприятий и отраслей. Решающей в этой оценке станет рентабельность предприятий, которая должна заменить многочисленные и часто противоречивые частные показатели, оставив за ними лишь вспомогательную роль. При этом если цены продукции и факторов станут реальными и конкретными, то исчисленная на их основе рентабельность будет соответствовать и по существу совпадать с высшей рентабельностью — интересами народного хозяйства в целом.]

**Влияние о. о. оценок на изменение производственного задания и состава конечной продукции.** При постановке задачи о нахождении оптимального производственного плана мы исходили из того, что программное задание уже определено. Однако после того, как производственный план найден, о. о. оценки, дающие соотношение народнохозяйственных затрат для различных видов продукции, могут быть использованы для проверки целесообразности известных изменений в самом производственном задании.

{<sup>iii</sup>} [Так, если обнаружилось, что производство некоторого изделия на данном предприятии относительно дорого — получает высокую о. о. оценку, то естественно поставить вопрос о снятии его с программы и передаче на другие предприятия, где затраты ниже. Может оказаться, что это изделие можно вовсе снять с производства, так как имеется возможность заменить его в использовании (потреблении) без ущерба другим, требующим меньших затрат. Может оказаться и наоборот, что какое-либо изделие получает более низкую о. о. оценку, чем предполагалось (например, оно получается попутно из отходов). В этом случае естественно поставить

вопрос об увеличении его выпуска и применения. Но, конечно, при этом нужно, чтобы была потребность в нем, так как всякая стоимость должна быть, прежде всего, потребительной стоимостью.

Во всех этих расчетах для правильного суждения, конечно, важно знание оценок продукции, полно отражающих народнохозяйственные затраты, связанные с их производством, т. е. о. о. оценок.

То же самое относится и к программному заданию по конечной продукции в целом, которым определяется народнохозяйственный план.

Основная структура этой программы — соотношение долей ее на различные нужды — объективно порождается общей обстановкой и основными хозяйственно-политическими задачами, а конкретный состав продукции — общественными и личными потребностями, а в последней части также и спросом населения на те или иные товары.

Однако экономические соображения заставляют вносить известные коррективы в этот состав. Например, доля мяса и рыбы в потреблении зависит от возможностей развертывания производства мяса и рыбы и затрат, связанных с производством этих продуктов. То же самое относится и к доле многоэтажного и малоэтажного строительства и т. д. Так что при определении программы выпуска предметов личного потребления, которая в значительной мере зависит от спроса населения, затраты на продукцию играют важную роль, ибо сам спрос зависит от соотношения цен.

Необходимо все же подчеркнуть, что если в выборе производственных способов экономическим факторам и, в частности, подсчету затрат посредством о. о. оценок должна принадлежать первостепенная, решающая роль, то в вопросе о составе конечной продукции им принадлежит хотя и важная, но все же вспомогательная роль. Коротко можно сказать, что *стоимостные соотношения* — оценки затрат — в основном призваны решать вопрос не о том, что производить, а о том, как производить.

Последнее, однако, относится к конечной продукции; производство и использование промежуточных продуктов в равной мере определяется как составом конечной продукции, так и выбором производственных способов для ее получения. Поэтому необходимый объем выпуска и соотношение отдельных видов этих продуктов (различные виды топлива, разные стройматериалы и т. д.) весьма существенно зависят от затрат по их изготовлению — от о. о. оценок.]

Состав доли конечной продукции, предназначенной на капиталовложения, также в значительной степени зависит от конкретной обстановки, отражаемой значениями о. о. оценок. Так, недостаток (и в связи с этим высокая оценка) металла и цемента может отразиться не только на типах сооружений, но даже и на выборе самих объектов, а в связи с этим и на окончательном распределении конечной продукции в указанной ее части.

Коротко говоря, окончательное решение вопроса о выборе конечной продукции должно строиться так, что «полезные действия различных предметов потребления, сопоставленные друг с другом и с необходимыми для их изготовления количествами

труда, определяют окончательно этот план»\*. Именно на реализацию этого пути и направлен наш подход, давая расчетную базу для правильной оценки затрат труда.

**Реальные пути нахождения о. о. оценок.** Мы уже говорили о том, что по отношению к производственному плану народного хозяйства в целом принципиально применимы все приведенные выше выводы и что для него существует оптимальный план и система о. о. оценок. Однако найти план и оценки такими же способами, как это делалось выше по отношению к упрощенным схематизированным проблемам, вряд ли возможно. Потребовалось бы ввести в рассмотрение оценки десятков тысяч видов продукции, рассматривать одновременно тысячи предприятий и многочисленные возможные производственные способы.<sup>{iv}</sup> [Конечно, это не осуществимо, прежде всего, из-за трудности сбора и обработки необходимых данных.

Не ставя своей целью дать здесь методику нахождения о. о. оценок и оптимального плана в масштабах народного хозяйства, так как ее разработка представляет задачу, требующую большой исследовательской и практической работы, мы хотим только указать на возможные пути реального нахождения хотя бы грубо приближенных значений о. о. оценок.

**Частные улучшения плана и частные оценки.** Прежде всего, отметим важность анализа, направленного на более правильное использование отдельных видов ресурсов или ресурсов некоторого комплекса. Такой характер имеют рассмотренные выше вопросы: о распределении программы, энергетическом балансе и балансах по отдельным материалам, распределении посевной площади, планировании перевозок и т. п. Помимо непосредственного значения такого анализа для улучшения плана — повышения выпуска продукции или сокращения затрат — использованные в нем данные весьма существенны для построения общего плана и его показателей.

Необходимо сказать, что такого рода схемы анализа сравнительно редко могут быть применены непосредственно на практике. В реальных задачах это связано с необходимостью одновременного учета очень большого числа факторов, а также с тем, что условия, которые мы ставили при рассмотрении отдельных задач (строгое деление затрат на два вида при распределении программы, глава I, § 1; однородность груза при планировании перевозок, глава II, § 7 и т. д.), не всегда выполнены даже приближенно. И тем не менее методы построения оптимального плана могут найти достаточно широкое применение, если не пытаться применять эти схемы в буквальном соответствии с их описанием.

Отметим некоторые соображения относительно условий и порядка применения этих методов, при которых оно может оказаться плодотворным. Прежде всего, важно, чтобы имелось достаточное многообразие различных вариантов плана. Далее, существенна возможность выделения нескольких главных факторов, в отношении которых в основном и отличались бы эти варианты, так чтобы выбор варианта либо не оказывал влияния на другие факторы, либо они сами были бы несущественны.

Эти условия обеспечат известную автономность данной системы, позволяющую при ее рассмотрении в какой-то мере отвлечься от влияния других частей плана и

---

\*Энгельс Ф. Анти-Дюринг. — [М.: Госполитиздат, 1957. — С. 293] {Соцэкгиз, 1931. — С. 295}.



от учета других факторов и анализировать ее саму по себе. В то же время эта автономность относительна, неполна. Например, некоторые не основные виды затрат надо учитывать в анализе не непосредственно, натурально, а брать в стоимостном выражении. Тогда соответствующие слагаемые окажутся зависящими от используемых оценок (цен, себестоимостей, о. о. оценок) других факторов. Требования относительно размеров ресурсов и состава программы для данного участка также будут в какой-то мере условными и могут измениться при учете возможностей и потребностей других участков. Наконец, основные исходные данные для анализа обычно весьма неточны и приближенны. В силу всего сказанного и решения, полученные при анализе системы, а также показатели плана (о. о. оценки) окажутся приближенными и могут измениться при уточнении учета и влияния других факторов и участков. Эти оценки будут также неполными (скажем, только оценка работы по изготовлению изделия, а не полная его оценка); такого рода оценки получают местное, частное применение.

Большая автономность схем и в связи с этим большая обоснованность выводов, полученных при их анализе, может быть достигнута за счет укрупнения, объединения схем. Например, целесообразно рассматривать вопросы планирования перевозок не изолированно, а совместно с вопросом об объемах выпуска и распределении программы и т. д. Для большей реальности этого анализа имеет значение также уточнение и детализация исходных показателей, например, выделение затрат на данное изделие при комплексном выпуске. Несмотря на эти уточнения и улучшения, результаты анализа отдельного комплекса вопросов будут неизбежно приближенными и относительными.

Поэтому при их применении нет надобности буквально следовать полученному наилучшему решению, тем более что способ анализа — использование о. о. оценок — позволяет усмотреть различные решения, которые по эффекту близки к найденному. Учитывая это, при выборе плана удастся принимать во внимание ряд дополнительных обстоятельств (например, желательность сохранения некоторых используемых производственных способов и устоявшихся экономических связей и т. п.).

В то же время некоторые выводы из этого анализа, например об экономических преимуществах одного способа перед другим, нередко оказываются настолько определенными, что вполне могут служить базой для принятия практических решений. Соотношения о. о. оценок, полученные в результате такого анализа, могут стать уже достоверными в определенных пределах, если удастся оценить возможные изменения в них, которые внесут неучтенные и внешние данные.

Мы полагаем, что на основе анализа отдельных вопросов могут быть получены если не сами народнохозяйственные оценки, то некоторые важные данные для их построения: относительные оценки работ по изготовлению некоторых видов продуктов, грубые значения прокатных оценок, поясные транспортные наценки для отдельных видов продукции и т. п.

**РАСЧЕТ О. О. ОЦЕНОК НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ.** Наряду с частными относительными оценками, полученными при анализе отдельных плановых схем, необходимо иметь хотя бы самые грубые значения о. о. оценок основных видов продукции и производственных факторов в народнохозяйственном масштабе. Первый путь,

который представляется возможным для этой цели, состоит в построении самой упрощенной модели народного хозяйства. Именно, вводя укрупненные показатели и группы продукции (зерновые культуры, условное топливо, черные металлы и т. д.), рассматриваем для каждой группы продукции несколько типичных производственных способов. Относительно каждого из них нужно оценить укрупненные натуральные затраты, степень фактического применения способа и возможные резервы его расширения. Приняв еще во внимание ресурсы труда, природных факторов, получим нужную модель. Расчет оптимального плана для нее и даст грубые значения о. о. оценок указанных укрупненных видов продукции и основных производственных факторов. Более близкие к действительности данные получились бы, если бы такой анализ был проведен по крупным экономическим районам с учетом в нем транспортных связей между ними и пропускной способности действующих магистралей. Необходимо сказать, что этот путь потребует преодоления значительных трудностей, связанных как с выбором самого типа модели, так и с получением и обработкой фактических данных, необходимых для нахождения исходных параметров модели[\*].

**ОРИЕНТИРОВОЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНОК НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА ДЕЙСТВУЮЩЕГО ПЛАНА.** Другой, пожалуй, более реальный путь нахождения приближенных, ориентировочных значений о. о. оценок состоит в анализе реальных экономических соотношений, вытекающих из практики нашего народного хозяйства.

Мы видели в свое время, рассматривая схематизированные задачи, что если дан оптимальный план, но не указаны о. о. оценки, они могут быть обычно определены на основании анализа этого плана по принятым в нем решениям, устанавливающим равенства и неравенства для оценок (глава 1, § 1, стр. 129).

То положение, что для оптимального производственного плана имеются о. о. оценки, в принципе должно сохранить силу и для реальных производственных планов, включая и общий народнохозяйственный план.

Мы можем исходить из того, что действующий план учитывает конкретную обстановку и в основных чертах построен правильно. Иначе говоря, его в первом приближении можно рассматривать как рациональный план. Поэтому те экономические решения, которые в действующем плане прочно установились, т. е. являются типичными и оправданны длительной экономической практикой, можно использовать для получения грубого приближения к системе о. о. оценок.

Дадим представление о том, как можно было бы построить о. о. оценки на нескольких простых примерах чисто иллюстративного характера. При этом нас будут интересовать не абсолютные, а только относительные значения о. о. оценок. Цель этих примеров — дать лишь некоторое представление о методике подобных расчетов, поэтому все цифры в примерах совершенно условны.

1. Примем, что в северных областях Союза систематически используются земли, дающие урожай зерновых 8 ц с гектара. Пусть трудовые затраты на 1 га составляют, скажем, 10 дней по 20 руб. в день, прочие затраты пусть составляют еще 80% от них. Можно принять тогда оценку центнера зерна равной 45 руб.  $((18 \times 20) : 8)$ .

---

\*[Некоторое, но крайне ограниченное применение для этой цели могут найти данные о межотраслевых связях (подробнее об этом см. Приложение I, стр. 332–334).]

В южных областях получают по 20 ц с гектара при затратах 12 дней на га, а с прочими затратами 20 дней. Тогда, считая оценку центнера зерна той же самой (транспортными затратами в первом приближении здесь можно пренебречь) и принимая ту же оценку рабочего дня, можно определить о. о. оценку (ренту) 1 га земли в южных районах. Она составит  $20 \times 45 - 20 \times 20 = 500$  руб.

2. На южных землях выращивается хлопок. Если для него урожай составляет 15 ц с 1 га, на обработку затрачивается 30 дней по 30 руб. в день, а прочие затраты составляют еще 100% от них, то оценку центнера хлопка можем принять равной:  $(60 \times 30 + 500) : 15 = 153$  руб. При более детальном анализе следовало бы рассмотреть отдельно использование орошаемых и неорошаемых земель.

3. Каменный уголь в угольном бассейне района А добывается как в механизированных шахтах с себестоимостью 50 руб. за тонну, так и в менее оборудованных с себестоимостью 80 руб. за тонну, причем на последних добыча может быть расширена. Тогда можно принять о. о. оценку угля в данном районе равной 80 руб. за 1 т.

4. В районе В за 1000 км от А добывается малокалорийный бурый уголь с себестоимостью 75 руб. за 1 т, что с учетом его теплотворной способности эквивалентно себестоимости 150 руб. для угля из А. Однако ввиду загрузки железной дороги бурый уголь систематически используется наряду с привозным углем из А. Это позволяет определить о. о. оценку для перевозки тонны груза из А в В в  $150 - 80 = 70$  руб. за 1 т (ср. предыдущий пример). Эта величина может оказаться значительно выше себестоимости перевозок и действующего тарифа.

Подтверждение этой оценки мы можем увидеть, скажем, в том, что параллельно железной дороге (ввиду ее загрузки) систематически совершаются перевозки автотранспортом с себестоимостью еще большей — порядка 100 руб. за 1 т.

5. О. о. оценка металла может быть получена, с одной стороны, исходя из условий его производства, например, из факта использования устаревших предприятий, где его производят с затратами значительно выше средних, например по 750 руб. за тонну, т. е. на 200 руб. превышающими его цену, скажем, равную 550 руб. С другой стороны, ввиду дефицитности металла систематически не применяются металлоконструкции, широкое использование которых принесло бы большую экономию. Например, в строительстве широко применяются деревянные и железобетонные рамы, хотя металлоконструкции в ряде случаев позволили бы снизить затраты, например, на 300 руб. на каждую израсходованную тонну металла. Следовательно, здесь применение металла было бы оправданно, даже если бы его цена была на 300 руб. выше действующей. Сопоставляя и то и другое, можем принять о. о. оценку тонны стали равной, скажем, 800 руб.]

6. [Исходя из найденных значений о. о. оценок продукции, можно получить оценки и для оборудования.] Прокатная оценка [при этом] может определяться не только для отдельных видов оборудования, но и для целого предприятия<sup>14)</sup>. Пусть производительность металлургического комбината — 300 тыс. тонн стали в месяц. Предположим, что уже определены о. о. оценки, например, для стали — 800 руб. за тонну. Таким образом, оценка продукции комбината равна 240 млн руб. в месяц

<sup>14)</sup> В этом примере в тексте 1942 г. взяты иные цифры.

(800 × 300 000). Далее, подсчитаем его затраты по о. о. оценкам. Пусть они равны:

уголь 400 тыс. тонн по 120 руб. за тонну .....	48 000 000
(90 руб. оценка на месте + 30 руб. транспорт)	
руда 600 тыс. тонн по 50 руб. за тонну .....	30 000 000
(добывается на месте)	
известняк 200 тыс. тонн по 40 руб. за тонну .....	8 000 000
(10 руб. оценка на месте + 30 руб. транспорт)	
производственная и другая зарплата .....	38 000 000
(оценка труда грубо принимается равной зарплате)	
прочие затраты .....	17 000 000
Всего .....	141 000 000

Разница между оценками продукции и затрат  $240 - 141 = 99$  млн руб. в месяц и дает примерно значение прокатной оценки всего оборудования комбината.

Если включить эту прокатную оценку как постоянное (на некоторое время) слагаемое в общую совокупность затрат комбината, то довольно правильным показателем успешности его работы за данный период может служить фактическая рентабельность. Под ней мы понимаем чистую прибыль — разность между оценкой продукции предприятия за этот период и суммой затрат, включающих и определенную выше прокатную оценку. Тогда, если работа предприятия останется неизменной, рентабельность будет равна нулю. [Она может стать положительной при фактической реализации плана в случае хорошей работы предприятия, например, более интенсивной. В частности,] положительная рентабельность может быть достигнута за счет:

1) Увеличения выпуска продукции, даже при условии, что затраты на дополнительную тонну будут выше, чем средние, но не выше, чем о. о. оценка, равная 800 руб.

В самом деле, средние затраты на тонну стали равны 470 руб. ( $141\,000\,000 : 300\,000 = 470$ ), а 800 руб. получается из-за учета начисляемой прокатной оценки. Поэтому даже если затраты на дополнительную тонну составят 700 руб., то, поскольку прокатная оценка уже полностью учтена и на нее не начисляется, добавочная тонна только повысит рентабельность.

2) Проведение мероприятий, обеспечивающих уменьшение затрат на одну тонну, в особенности на сырье. В частности, применение сырья, например, извести, из более близких мест. Отметим, что такие мероприятия могут повысить рентабельность, только если они не влекут сокращения выпуска продукции.

[3] Повышение использования металлолома в составе шихты, которое окажется рентабельным даже при цене лома, значительно превосходящей его нынешнюю заготовительную цену.

При определении значений о. о. оценок мы исходили из предположения, что действующий план оптимален, однако реально он не является полностью оптимальным. В отдельных вопросах встретятся и нерациональные решения. Поэтому] уже в самом процессе определения ориентировочных значений о. о. оценок на основе действующего плана могут встретиться противоречивые результаты.

Это обнаружит некоторые особенно заметные неправильности и несоответствия плана, причем одновременно будет видно, за счет каких изменений и перемещений

они могут быть устранены. Тем самым будет найдена возможность повышения объема выпуска продукции, т. е. произведено улучшение плана.

Полученные таким путем значения оценок будут определены, вероятно, с ошибкой до 30–50%. Такие оценки можно будет использовать лишь для самых ориентировочных подсчетов, но даже и они сыграют важную роль и помогут устранить особенно серьезные недостатки плана.

**{<sup>v</sup>} [О разработке методики составления оптимального плана и нахождения о. о. оценок.** Реальная задача одновременного составления оптимальных планов всей совокупности отдельных предприятий, экономических районов, отраслей и общегосударственного плана, а также системы о. о. оценок представляется делом огромного масштаба и сложности и потребует построения специальной методики. Разработка такой методики должна осуществляться соединенными усилиями ученых разных специальностей и практических работников и включать построение системы необходимых технических и экономико-статистических показателей, методы обработки, объединения и согласования полученных данных, схемы моделей и расчетные методы, продуманную последовательность этапов проведения и организацию данной работы и т. д. Разработка такой методики — задача будущего. Здесь мы хотим отметить только некоторые соображения относительно возможных ее особенностей и подходов к ее построению.

Попытаемся перечислить важнейшие особенности этой методики. Следует ожидать, что такая методика будет:

- 1) состоять в одновременном построении плановых наметок и экономических показателей (о. о. оценок);
- 2) многоступенной, т. е. рассчитанной на одновременное и согласованное проведение плановой работы на разных уровнях, в разных масштабах, в территориальном и отраслевом разрезах: на предприятиях, в отдельных управлениях совнархозов, в экономическом районе в целом, в отраслевом и общегосударственном масштабах;
- 3) осуществляться последовательными этапами с постепенным улучшением, уточнением и согласованием планов и показателей, а также согласованием текущего планирования с перспективным;
- 4) широко использовать данные о результатах производственной деятельности за предыдущий период;
- 5) выдавать плановые решения, не имеющие формы жесткого окончательного приказа; они должны корректироваться в процессе выполнения плана, подкрепляться хозрасчетом и системой стимулирования.

Это не так далеко от действующего порядка планирования. Основное отличие, которое должно быть подчеркнуто, — это систематическая ориентация на достижение оптимальности плана и построение одновременно с планом системы о. о. оценок, а в связи с этим систематическое использование расчетных методов построения оптимального плана.

Плановую работу по такой методике можно представить себе примерно так.

В качестве отправного пункта при построении плана принимается определенное задание относительно состава конечной продукции на данный период, составленное

с учетом общей обстановки в соответствии с общественными и личными потребностями, включая требования расширенного воспроизводства.

Далее, необходимо найти ориентировочные значения о. о. оценок основных видов продукции и производственных факторов, пользуясь описанными выше подходами, либо корректируя оценки за прошлый период.

Отдельными предприятиями в соответствии с общими заданиями представляются данные о возможном росте продукции, о выпуске новых ее видов и с расчетами необходимых для этого затрат. При этом сразу отбрасываются явно неэкономичные варианты (на основе полученных предварительных значений о. о. оценок). Это и определит в основном совокупность возможных производственных способов.

Затем производится составление предварительных планов по местным объединениям предприятий каждой отрасли, дающее первоначальное распределение программ между предприятиями на основе данных об их возможностях. Далее составляются местные балансы по труду, энергетике, топливу, сырью (с учетом его ориентировочного поступления) и одновременно определяются о. о. оценки.]

В случае, если окажется, что требования на некоторый вид услуг, сырья или материалов превзойдут объем его производства, то нужно исключить использование материала там, где это может быть произведено с наименьшими потерями, и наметить повышение объема его производства там, где это возможно без повышения или с минимальным повышением затрат на единицу продукта. О. о. оценка этого вида материала или услуг соответственно возрастет.  $\{vi\}$  [С учетом измененных оценок проводится изменение программ и их распределение между предприятиями. Это приведет к согласованию местных балансов; в отдельных случаях выявится явная необходимость и экономическая целесообразность увеличения поставок тех или иных видов сырья, материалов, а иногда и привлечения трудовых ресурсов из других районов.

Одновременно с плановыми наметками в пределах каждого экономического района найдется своя система о. о. оценок для различных видов продукции и производственных факторов.

Далее на основе экономических связей между районами определяются загрузка транспорта и о. о. оценки транспортных услуг. Здесь уже желательно производить анализ, оперируя не сведениями об отдельных видах продукции, а обобщенными данными.

После этого анализ распределения программ с учетом полученных местных о. о. оценок и о. о. оценок транспорта может подсказать известное перераспределение программ между районами. Анализ о. о. оценок может выявить также целесообразные перемещения в распределении сырья, материалов, топлива, электроэнергии и в установлении других экономических связей между районами.

В результате может быть построен в первом приближении общий оптимальный план и найдены о. о. оценки для него.

Затем потребуется уточнение плана, начиная с корректировки состава конечной продукции. Учет определившихся оценок и возможностей роста выпуска подскажет те или иные замены и изменения в этом составе, а также позволит уточнить намеченный объем прироста продукции, в частности, выполнимый объем капиталовложений. Уточнение всех планов на второй стадии может быть проведено при-

мерно в прежнем порядке. При этом производится не только уточнение плановых решений на основе более правильных значений о. о. оценок, изменений балансов и связей, но уточняются и сами исходные технические данные для тех видов продукции и тех объемов производства ее, которые наметились уже реально. На этой второй стадии планы, естественно, вновь корректируются и уточняются. Дальнейшие уточнения и корректировка планов должны происходить уже в период их выполнения.

Конечно, это описание представляет лишь голую схему, самую предварительную. Составление плана в таком порядке представляет огромную и чрезвычайно сложную работу. Однако она кажется нам реально выполнимой, если ее методика, порядок осуществления, необходимые технические и статистические показатели и т. д. будут основательно продуманы и разработаны.

В частности, следует учесть то благоприятное обстоятельство, что эта работа вместе с ее предварительными стадиями может вестись достаточно длительное время, причем одновременно целым рядом органов управления. Если она будет производиться систематически, то можно будет использовать многие технические и статистические данные, относящиеся к прошлым периодам, во всяком случае, методику их нахождения.

Применение электронных счетных машин для обработки обширной информации, для выполнения расчетов, связанных с построением оптимальных планов и подсчетом о. о. оценок на отдельных этапах, не только резко сократит сроки, но и обеспечит саму осуществимость такой работы.]

Описанная методика планирования будет иметь то достоинство, что она позволит более легко и правильно согласовывать общее планирование с планированием и экономическим расчетом на отдельных предприятиях. Анализ, производимый при составлении народнохозяйственного плана, позволит в результате определения о. о. оценок дать отдельным предприятиям в чрезвычайно удобной форме характеристику общей обстановки, которой следует руководствоваться. Например, металлообрабатывающему предприятию при решении вопроса о том, стоит ли заменить тонну свинца тремя тоннами алюминия, не нужно анализировать производство и потребление свинца и алюминия во всеююзном масштабе, а нужно просто, руководясь указанными ему о. о. оценками, подсчитать, дает ли это мероприятие уменьшение затрат. В свою очередь на основе планов отдельных предприятий можно будет при несоответствии заявок с балансом произвести не механическое их сокращение, а сокращение на основе о. о. оценок, которое является наименее болезненным. Кроме того, сама необходимость таких изменений покажет, что о. о. оценка данного фактора была определена не совсем верно (несколько занижена). Регулирование плана может быть произведено путем соответствующего повышения значения о. о. оценки и связанного с этим пересмотра применений данного фактора[\*].

Следовательно, метод о. о. оценок позволит с большей гибкостью и оперативностью вносить изменения в план в соответствии с требованиями момента и обстановки, все время оставляя план практически оптимальным (по отношению к новым требованиям).

---

\*[Ср. описание метода корректировки оценок (множителей) в Приложении II, стр. 364 и далее.]

Мы полагаем, что система о. о. оценок представляет единообразную, простую по смыслу, универсальную и удобную в использовании систему показателей, дающую синтетическую характеристику состояния народного хозяйства в данный момент. Составление и применение этой системы проще, чем многочисленных, часто противоречащих друг другу показателей и характеристик, которые приняты в настоящее время. О. о. оценки обеспечат принятие оптимальных решений и позволят непрерывно поддерживать наилучшее использование всех производственных возможностей.

{*vii*} [Таким образом, *главное в принципах построения оптимального плана с использованием о. о. оценок заключается в органическом сочетании балансового и стоимостного подходов.* Обычно в планировании они несколько оторваны один от другого.

Отметим еще, что тот процесс последовательного уточнения о. о. оценок с учетом балансов продуктов, который был описан выше, внешне напоминает процесс конкуренции в капиталистическом мире. Конечно, в действительности один коренным образом отличается от другого. Здесь речь идет о «конкуренции» планов и способов в процессе плановых расчетов вместо действительной конкуренции на рынке. Таким образом, этот процесс, совершающийся без всяких материальных потерь, может быть доведен до сбалансированного оптимального плана, который и будет осуществляться. Процесс капиталистической конкуренции связан с непрерывными колебаниями, ведущими к постоянным диспропорциям и огромным непроизводительным потерям (перепроизводство, недогрузка оборудования, безработица), к периодическому возникновению кризисов.

Следовательно, о согласовании балансов и планомерном использовании ресурсов в народнохозяйственных интересах при капиталистической системе не может быть и речи. Напротив, социалистический строй дает возможность устанавливать в процессе составления плана то наилучшее согласование между потребностью в продукте и его производством, которое обеспечивает быстрейшее развитие производительных сил и максимальное удовлетворение материальных и культурных потребностей членов социалистического общества.

Поэтому совершенствование планирования, переход к системе оптимального планирования и оценкам продукции, соответствующим полным народнохозяйственным затратам, должно привести к дальнейшему увеличению темпов роста производительных сил и еще более полной реализации преимуществ социалистической системы.

Представляется, что необоснованные предложения отдельных экономистов некоторых стран народной демократии об «улучшении» плановой системы допущением элементов стихийности, конкуренции в хозяйственной деятельности предприятий связаны с преувеличением временных трудностей в процессе совершенствования хозяйственного управления, с недооценкой уже достигнутых успехов в планировании и экономическом развитии социалистических стран, а также с недооценкой тех больших потенциальных возможностей дальнейшего совершенствования планирования и экономики, которые заключены в природе социалистического способа производства — самого совершенного в истории человечества.



<sup>i</sup> Пример в тексте 1942 г.:

Пусть вблизи *Б* добывается уголь с себестоимостью 400 руб. вагон, этот уголь используется для отопления и в *А*. Целесообразно ли заменить его дровами?

Будем считать, что вагон угля заменяет 35 куб. м дров, а себестоимость 1 куб. м — 30 руб. При обычном учете стоимости перевозки это конечно нецелесообразно. Стоимость вагона угля в *Б* составит  $400 + 150 = 550$  руб., а стоимость соответствующего количества дров  $30 \times 35 = 1050$  руб. Если же учесть н. ц. оценку перевозки, то н. ц. оценка вагона угля в *А* составит  $400 + 1000 = 1400$  руб., т. е. замена угля дровами там, где она не представляет существенных трудностей, целесообразна.

Предположим теперь, что речь идет о самой железной дороге. Участок вблизи *А* этой дороги потребляет ежедневно 20 вагонов угля. Целесообразно ли перевести топку паровозов на дрова? Следует учесть, что в результате этого ввиду уменьшения скорости паровозов, увеличения времени погрузки топлива и пр., пропускная способность дороги уменьшится на 5%, на 60 вагонов. Подсчитаем результаты этого мероприятия. Экономия в результате замены угля дровами составит:  $20 \times (1400 - 1050) = 7000$  руб. Потеря прокатной стоимости шестидесяти вагонов ввиду уменьшения пропускной способности дороги:  $60 \times 850 = 51000$ . В данных условиях эта замена явно невыгодна и, по-видимому, она выгодна лишь в редких случаях (например, когда уголь приходится везти на особенно большие расстояния).

<sup>ii</sup> ПРИМЕР 1. Три станка имеют общий электромотор, из-за чего и неиспользуемые в данный момент станки работают вхолостую. Установка двух дополнительных электромоторов могла бы дать значительную экономию электроэнергии, около 100 кВт·ч в день.

Проверим расчетом целесообразность мероприятия. Вследствие дефицита электроэнергии она имеет высокую н. ц. оценку — 0,30 руб. за кВт·ч, экономия составит:  $0,30 \times 100 = 30$  руб. в день. Из-за дефицита электромоторов его прокатная оценка установлена в 1800 руб. в месяц. Таким образом, затраты, связанные с использованием двух электромоторов, оцениваются в  $2 \times 1800 : 30 = 120$  руб. в день. Следовательно, в данных условиях мероприятие невыгодно. Напротив, при обычном подходе оно показалось бы весьма перспективным, так как дает экономию электроэнергии и, возможно, если бы удалось получить эти электромоторы, оно было бы осуществлено.

ПРИМЕР 2. Транспортёр на пристани не действует из-за отсутствия электромотора (того же типа, что и в примере 1). В результате на погрузке занято 50 грузчиков, вместо 20.

Подсчитаем обоснованность заявки пристани на электромотор (по н. ц. оценкам):

*Экономия.* Высвободится труд 30 грузчиков (н. ц. оценка труда грузчиков — 15 руб. в день):

$$30 \times 15 = 450 \text{ руб.}$$

*Затраты.* Прокатная стоимость электромотора — 60 руб. Работа обслуживающего механика — 40 руб. Затраты 150 кВт·ч электроэнергии:  $150 \times 0,3 = 45$  руб. Итого 145 руб.

*Чистая экономия* составит  $450 - 145 = 305$  руб. в день.

Таким образом, мероприятие весьма эффективно и должно быть проведено. Так как оценка электромотора реальна, то где-то в другом месте он может быть высвобожден и предоставлен для транспортера. Быть может, если бы оба вопроса (в примерах 1 и 2) рассматривались совместно, то признали бы, что во втором случае электромотор нужнее. Но фактически так не бывает, и, решая какой-то вопрос, невозможно конкретно представить нужды других мест. Между тем, имея н. ц. оценки и произведя расчеты по ним, мы будем знать, в первом случае, что где-то в другом месте моторы нужнее, раз подсчет показал нецелесообразность мероприятия. Во втором случае, что, хотя моторы и очень дефицитны, но, несмотря на это, его нужно предоставить, и такая возможность должна быть и реально будет обеспечена.

В настоящее время, так как применяемые расчеты в обоих случаях покажут эффективность мероприятия, то вполне возможно, что как раз в первом случае электромоторы удастся получить, а во втором нет, т. е. они будут использованы далеко не эффективно. Без расчета, на основе лишь качественных соображений найти правильное решение подобных вопросов невозможно, потому что при одних цифрах правильно одно решение, а при других — другое.

*iii* Даже в вопросе о структуре вооружений и выборе средств поражения, где решающую роль играют тактико-технические свойства, немаловажную роль играют и экономические факторы, так как от этого зависит массовость применения средства. И именно по этим соображениям могут быть внесены известные коррективы в принимаемые решения. Хотя, например, один тип мин и надежнее, чем другой, но, если его оценка в десятки раз выше, следует предпочесть второй тип. Действительно, вместо единичных мин можно установить целые поля из мин второго типа, и надежность поражения окажется гораздо большей. Конечно, при решении таких вопросов военного дела, в которых играют роль и экономические факторы, нужно использовать оценки для различных видов продукции, правильно отражающие реальное соотношение народнохозяйственных затрат в существующих на данный момент конкретных условиях (н. ц. оценки), а не обычные калькуляционные цены, лишенные этих свойств.

Таким же образом это могло бы сказаться и на части программы, обеспечивающей потребление населения. Так, высокая оценка металлоизделий вследствие недостатка металла и загруженности металлообрабатывающих производств могли заставить сократить эту часть плана, увеличив, скажем, количество тканей, так как хлопком эти изменения не коснулись.

*iv* Конечно, мы этого и не предлагаем. Реальными представляются два пути получения оптимального плана и значений н. ц. оценок.

Первый путь. Вводя укрупненные показатели и виды продукции (например, металлоизделия средней сложности, условное топливо и др.), а также ограничившись только основными видами затрат и продукции, построить модель, в которой участвовали бы всего десятки величин. Применяя к этой модели изложенные приемы анализа, найти для нее наилучший план и значения н. ц. оценок. Затем, руководясь этими оценками, перейти к полной проблеме и, исходя из подсчета за-

трат, определить в ней н. ц. оценки всех видов продукции и произвести выбор способов производства, после чего и получится план, практически весьма близкий к оптимальному. Однако этот путь потребует преодоления существенных трудностей, состоящих главным образом в обеспечении адекватности построенной модели.

Более простым и наглядным представляется второй путь, согласно которому нужно начать с анализа существующего плана. Именно, действующий план учитывает конкретную обстановку в основных чертах правильно. Поэтому первые грубые приближения для н. ц. оценок можно получить, исходя из анализа соотношений этого плана. Каков примерно характер этого анализа, мы поясним сейчас на нескольких примерах с произвольными цифрами. Конечно, на практике эти цифры потребуют многообразного и всестороннего взвешивания и уточнения.

1. Начнем, например, с оценки земляных работ\*. Примем оценку среднего дня труда (женского, неквалифицированного) равной 10 руб. Значительная масса земляных работ совершается именно с применением такого труда, при этом производительность его при среднем грунте составляет 2 куб. м в день. В таком случае кубометр земляных работ должен получить оценку  $10 : 2 = 5$  руб. Пусть, далее, опытный землекоп работает с производительностью 6 куб. м. Тогда н. ц. оценка дня такого землекопа должна равняться  $6 \times 5 = 30$  руб. (народнохозяйственная оценка, а, отнюдь, не зарплата). Далее, экскаватор определенной марки дает в среднем (учитывая возможный коэффициент его использования) 100 куб. м земляных работ в день. Тогда оценку дня работы такого экскаватора следует принять равной  $100 \times 5 = 500$  руб.

2. Дрова также широко заготавливаются вручную, а транспортируются без механизации — сплав на простейших плотах. Пусть на 1 кубометр дров нужно затратить, скажем, 3 дня такого же труда. В таком случае оценку кубометра дров следует принять для данного места равной 30 руб.

Для энергетических и отопительных целей в данном месте применяются частично дрова, частично привозной уголь. Эффективность тонны этого угля в среднем соответствует 4 кубометрам дров. В таком случае н. ц. оценку тонны угля для данного места можно принять равной  $4 \times 30 = 120$  руб. тонна.

3. Уголь, о котором только что шла речь, добывается на расстоянии 500 км. Все современное оборудование (врубные машины и пр.) там полностью загружено, так что частично уголь добывается вручную. Такая добыча и может быть расширена. В этих условиях затраты труда на тонну составляют 3 дня. В таком случае н. ц. оценку угля на месте следует принять равной  $3 \times 10 = 30$  руб. тонна. Сказанное позволяет оценить и железнодорожную перевозку 1 вагона на 500 км. Именно, так как уголь перевозится на расстояние 500 км, а разница оценок  $120 - 30 = 90$  руб. за тонну или  $16 \times 90 = 1440$  руб. за вагон (16 т), то примерно так и следует оценить перевозку одного вагона на 500 км. Пусть примерно такие же результаты дает оценка перевозки, если подобный расчет произвести и по другим грузам. Тогда можно принять оценку равной 1–2 тыс. руб. за вагон или 2–4 руб. за вагонокилометр.

4. Имея оценку транспорта, можем дать оценку горючего. Пусть возможно его добычу увеличить с затратами 500 руб. на тонну. Тогда, если расстояние до места

---

\*Примеры 1–5 связаны с обстановкой военного времени.

добычи равно 4000 км, то в том же месте, о котором шла речь, можно оценить тонну горючего в  $500 + (4 \times 4000) : 16 = 1500$  руб. Еще более высокую оценку для горючего мы получили бы, рассматривая те многочисленные случаи, когда недостаток горючего для автотранспорта и механизмов вызывает значительные потери: простои, выполнение вручную трудоемких работ и т. п. Здесь обычны случаи, когда тонна горючего могла бы спасти от потерь в несколько тысяч, а иногда и более десяти тысяч рублей. Учитывая оба подсчета, нужно остановиться на некоторой средней оценке, скажем, 2500 руб. за тонну. При этом различие этих оценок укажет и пути более рационального распределения нефтепродуктов.

5. Высокая оценка горючего определяет высокую оценку автоперевозок. Прокатная оценка автомашины, работающей на горючем, будет невелика, так как значительное число машин не используется из-за недостатка горючего, резины или из-за недостатков планирования перевозок. При такой высокой оценке горючего окажется, что газогенераторная машина требует значительно меньших затрат по сравнению с работающей на жидком горючем. Так как газогенераторных машин недостаточно, а используются как те, так и другие, для того, чтобы оценка автоперевозок оказалась одинаковой, газогенераторная машина должна иметь высокую прокатную стоимость. Если исходить из определенной таким образом стоимости горючего, то окажется целесообразным ряд мер по экономии горючего, которые иначе не были бы оправданны. Высокая прокатная оценка газогенераторных машин говорит о том, что их следует интенсивно использовать: работать полный рабочий день, обеспечивать минимальный простой под погрузкой и разгрузкой (даже за счет привлечения большего числа людей и повышения себестоимости этих работ), применять ускоренный ремонт, обеспечивать резиной в первую очередь. Во всех случаях газогенераторной машине должно даваться преимущество. Так, в соответствии с этим, в периоды, когда объем перевозок небольшой, нужно обходиться в основном газогенераторными машинами, а горючее сохранять. Тогда в период больших перевозок, используя сэкономленное горючее, можно полностью загрузить автопарк и справиться с перевозками. В настоящее время часто поступают наоборот: при сокращении перевозок в основном используют машины, работающие на горючем, так как они проще в эксплуатации и требуют меньше забот, чем газогенераторные, и полностью расходуют горючее (да и горючего в такие периоды хватает). Зато в периоды больших перевозок, несмотря на привлечение газогенераторных машин, автопарк с перевозками не справляется, так как автомашины простаивают из-за недостатка горючего. Результат — большие потери (простои предприятий из-за сбоя в снабжении и пр.), которых можно было бы избежать. Кроме того, высокая прокатная оценка газогенераторной установки говорит о том, что они должны шире производиться, несмотря на высокую оценку металла и занятость соответствующих предприятий.

<sup>v</sup> Для дальнейшего улучшения плана нужно производить анализ плана отдельных отраслей и районов, составляя для них модели условий планирования (используя укрупненные показатели) и определяя наилучший план и значения н. ц. оценок. Анализ такой модели может быть произведен с помощью описанных выше методов. Затем производятся согласования этих планов между собой и некоторые дальнейшие изменения и перемещения, дающие улучшение плана. После этого получаются

значения н. ц. оценок, которыми нужно руководствоваться при решении частных проблем. При этом все время надлежит иметь в виду баланс средств.

*vi* Следует сказать далее, что если такая методика планирования будет применяться систематически, то ее использование значительно упростится тем, что для следующего периода можно будет исходить из плана и значений оценок для предыдущего периода, исправляя их в соответствии с произошедшими за это время изменениями в требованиях программы и в объемах производства.

*vii* Таким образом, социалистический строй дает возможность устанавливать в процессе составления плана то наилучшее согласование между потребностью в продукте и его производством, которое обеспечивает максимальное развитие производительных сил. При капиталистической системе такое согласование достигается, и только в известной мере, лишь в периоды процветания в результате конкурентной борьбы на рынке, сам процесс которой требует значительных непроизводительных потерь.

Следует, однако, подчеркнуть — такое согласование может быть достигнуто только при том условии, что будет использована методика решения вопросов планирования, обеспечивающая составление и поддержание оптимального плана. Без этого, при механических, произвольных методах регулирования баланса, основанных на несоответствующих моменту и обстановке оценках, эта возможность останется далеко не полностью реализованной. И в таком случае несоответствия и диспропорции между потребностью и производством могут исправляться иногда даже с меньшей гибкостью и большими потерями, чем в капиталистическом обществе.

Именно благодаря глубокому пониманию значения этого вопроса, тов. Сталин еще в 1929 г. выдвигал перед экономистами как проблему первостепенной важности разработку более совершенных методов составления и регулирования баланса.

## ГЛАВА III

### Вопросы, связанные с расширением производственной базы.

#### Эффективность капиталовложений

[Вопрос об эффективности использования средств для капиталовложений имеет первостепенное значение для развития народного хозяйства. От правильного его решения существенно зависит быстрота развития производительных сил, успехи нашей промышленности и сельского хозяйства, полная реализация преимуществ социалистической системы хозяйства. Глубокий и конкретный анализ важности для темпов развития народного хозяйства правильного выбора объектов капиталовложений дан в выступлении Н. С. Хрущева на открытии Волжской гидроэлектростанции им. В. И. Ленина.

Многообразие возможных технических решений и путей развития в современной промышленности, взаимосвязанность различных отраслей в пределах народного хозяйства, переплетенность проблемы капиталовложений с другими основными экономическими задачами, а также вопросами техники и технической политики делают эту проблему исключительно сложной. Трудно надеяться на ее удовлетворительное решение в теории и на практике примитивными средствами. Эта проблема требует глубокого и всестороннего анализа.

При капитализме эффективность капиталовложений оценивается капиталистами с точки зрения получения максимальной прибыли; она рассчитывается, исходя из стихийно складывающихся на рынке системы цен и нормы прибыли.

В плановом социалистическом хозяйстве вопросы эффективности капиталовложений решаются в процессе составления плана развития народного хозяйства и принятия отдельных экономических решений, входящих в этот план. При распределении средств на капиталовложения и выборе отдельных вложений главным является обеспечение максимального роста народного хозяйства в соответствии с задачами и потребностями общества. При этом, хотя народнохозяйственный план и используемые при его построении экономические показатели определяются в результате совокупности решений плановых и хозяйственных органов, однако эти решения и показатели не произвольны. Они объективно обуславливаются состоянием и задачами народного хозяйства и совокупностью экономических законов, управляющих социалистическим обществом. Задача советской экономической науки — познать эти законы и механизм их действия и сознательно использовать это при решении стоящих перед обществом планово-экономических задач.

Правильный, наиболее эффективный выбор объектов для капиталовложений имеет исключительное значение, если учесть огромные, астрономические суммы, направляемые нашей страной на капиталовложения: «Только за 1946–1958 гг. объем государственных капиталовложений в современных ценах составил более 1 триллиона 600 миллиардов рублей. За это время построено и введено в действие около

12 тысяч крупных государственных промышленных предприятий и большое количество средних и мелких предприятий»[\*].

Объем государственных капитальных вложений увеличивается за 1959–1965 годы «до 1940–1970 миллиардов рублей, или в 1,8 раза в сравнении с предыдущим семилетием, что почти равно объему капитальных вложений в народное хозяйство за все годы существования Советской власти»[\*\*].

В социалистической экономике определение эффективности капиталовложений коренным образом отличается от решения этого же вопроса в условиях капитализма. Это делает недопустимым механический перенос методов расчета эффективности, используемых в капиталистической экономике, а требует непосредственного анализа. В настоящей главе делается попытка построить методику расчета эффективности капиталовложений в условиях социализма на основе анализа оптимального плана вложений.

Сначала мы рассматриваем эти методы по отношению к краткосрочным производственным вложениям и приводим некоторые расчетные приемы для определения их эффективности (§ 1). Затем анализируем вопрос о том, в какой мере полученные выводы применимы к долгосрочным вложениям (§ 2). Далее, мы обсуждаем пути и возможности использования полученных методов в практике планирования (§ 3). Наконец, производим сопоставление предлагаемой методики с другими предложениями по расчету эффективности (§ 4).

### § 1. Кратковременные вложения. Нормальная эффективность

Известно, что наряду с лучшим использованием наличной производственной базы существенным для обеспечения роста объема производства является расширение этой базы за счет капиталовложений. Поэтому из конечной продукции каждый год выделяется определенная часть для капиталовложений, обеспечивающая покрытие амортизации и дальнейшее расширение производственной базы<sup>{1}</sup>. [«Коммунистическая партия придает первостепенное значение наиболее эффективным направлениям капитальных вложений, позволяющим при меньших затратах средств наращивать производственные мощности и увеличить выпуск промышленной продукции в наиболее короткие сроки при резком увеличении производительности труда и снижении себестоимости продукции»[\*\*\*].

Что является критерием целесообразности данного капиталовложения — применения данной машины, приспособления? Первым необходимым условием является то, чтобы применение машины за все время ее работы дало бы не меньшую экономию труда, чем затраты труда, связанные с ее изготовлением<sup>{2}</sup>.

\*[Контрольные цифры развития народного хозяйства СССР на 1959–1965 гг. Стенографический отчет XXI съезда КПСС. Т. II. — С. 466.]

\*\*[Там же. С. 501.]

<sup>{1}</sup>{Очень важным является вопрос о наиболее целесообразном их использовании с тем, чтобы обеспечить максимально возможный рост производства и притом в кратчайшие сроки.}

\*\*\*[Там же. С. 501.]

<sup>{2}</sup>{Ср. Маркс К. Капитал. — М., 1936. — Т. 1. — С. 397.}

Однако число такого рода машин и, вообще, объектов возможного применения капиталовложений чрезвычайно велико, в то время как средства, которые могут быть использованы на эти цели, ограничены. Поэтому из всех возможных объектов нужно выбрать те, в которых применение имеющихся средств даст наибольший эффект. Как подойти к заданному вопросу? Прежде всего, здесь важна оценка той народнохозяйственной экономии, которую даст оборудование, полученное в результате данного капиталовложения. Но этот вопрос нами рассматривался в § 5 главы II; именно, там указывалось, что величину этой экономии дает прокатная оценка оборудования.

Теперь уже нетрудно наметить принцип решения этого вопроса. Пусть у нас имеются две машины, причем о. о. оценка изготовления каждой из них 100 тыс. руб., но прокатная оценка первой 5 тыс. руб. в месяц, а второй 12 тыс. руб. в месяц. Тогда ясно, что в первую очередь нужно предоставить средства для второй машины, так как ее применение дает ежемесячную экономию в 12 тыс. руб., а первая дала бы только 5 тыс. руб. Следовательно, при решении данного вопроса нужно расположить конкурирующие места для вложений в порядке величины их эффективности, равной отношению прокатной оценки (достигаемой экономии) к необходимым затратам (в примере это 5% в месяц для первой машины и 12% для второй). В первую очередь следует обеспечить средствами те вложения, где эффективность наибольшая, что обеспечит максимальный рост чистой продукции\*. В основных чертах этот вывод и дает правильное решение данного вопроса. Без всяких существенных оговорок он применим по отношению к вложениям, реализуемым или окупающимся в короткий период времени (несколько месяцев). При более длительных сроках решение вопроса усложняется за счет ряда обстоятельств. Основное из них состоит в том, что вложение облакается в определенную форму и только с большими потерями может быть или вовсе не может быть переведено в другую форму, если та, в которой оно было сделано, перестала быть эффективной. Например, вследствие того, что с течением времени система о. о. оценок изменится и в результате может существенно снизиться прокатная оценка данного вида оборудования, что скажется на эффективности вложений в него.

Далее, нужно учитывать, что для вложений с более длительным сроком службы возврат средств и реализация экономии затягиваются часто на довольно длительный срок, что иногда делает вложение нецелесообразным. Наконец, само вложение часто требует значительного времени для своего осуществления. Решая вопрос о целесообразности таких вложений, мы должны учитывать будущую ситуацию, поскольку вложение начнет давать экономический эффект только после того, как соответствующее оборудование будет запущено, а сооружения закончены.

Как учесть влияние некоторых из этих обстоятельств, мы покажем на примерах, используя которые и будем вести дальнейший анализ. Первый из этих примеров относится к случаю кратковременных вложений в условиях производственного планирования.

---

\*Может возникнуть такое сомнение: не даст ли это увеличение выпуска не той продукции, которая нужна. Это сомнение неоправданно. Если с помощью введенной машины мы можем получить на 12 тыс. руб. некоторой продукции, которая нам не требуется, то ввиду реализуемости о. о. оценок мы можем сохранить выпуск этой продукции на прежнем уровне, а, высвободив рабочую силу, материалы и прочее, получить на ту же сумму другую, нужную продукцию.



**Таблица 37**  
**Экономия текущих затрат,**  
**стоимость приспособлений и чистая экономия**

Инструменты и приспособления		Экономия затрат в месяц (в руб.)	Стоимость (в руб.)	Чистая экономия	
				(в руб.)	в % к стоимости
Тип	Число	( в р а с ч е т е н а о д н о п р и с п о с о б л е н и е )			
I	100	800	500	300	60
II	100	1200	1000	200	20
III	500	300	100	200	200
IV	1000	56	40	16	40
V	200	250	200	50	25
VI	30	2000	1000	1000	100

ПРИМЕР. На металлообрабатывающем предприятии требуется большое число инструментов, приспособлений, штампов, применение которых обеспечивает как сохранение достигнутого выпуска продукции, так и его дальнейший рост.

Все требуемые приспособления разбиты по своему характеру на ряд групп (табл. 37). В таблице указана также экономия, которую дает каждое приспособление, или соответственно потери, вызванные его отсутствием. Полагаем, что и в том и в другом случае эти величины определены по о. о. оценкам для основного производства.

Срок службы всех инструментов и приспособлений считаем равным одному месяцу; за этот срок и рассчитана экономия. Эти приспособления и инструменты производятся в собственном инструментальном цехе предприятия; в таблице указана стоимость каждого приспособления, также найденная по о. о. оценкам. Далее, вычитая из экономии, получаемой в производстве, стоимость приспособления, получаем чистую экономию в результате его использования. Во всех случаях эта экономия положительна, и поэтому применение всех приспособлений представляется целесообразным. Общая стоимость этих приспособлений и инструментов 310 тыс. руб., экономия, достигаемая их применением, 516 тыс. руб., чистая экономия 206 тыс. руб. Однако возможная сумма вложений в приспособления ограничена 150 тыс. руб., так как именно этой величиной определяются на данный месяц производственные возможности инструментального цеха\*. Таким образом, не все инструменты и приспособления, на которые дана заявка, могут быть изготовлены.

Чтобы выбрать те приспособления, на которых следует остановиться, производим подсчет эффективности каждого вложения. Для этого чистую экономию, которую дает приспособление, совпадающую с прокатной оценкой (вывод 19), относим к его стоимости (о. о. оценке затрат по изготовлению). Величина этой эффективности, выраженная в процентах, и дана в последнем столбце табл. 37.

\*Считаем, что в данном случае объем выпуска каждого изделия в денежном выражении достаточно точно отражает производственную мощность инструментального цеха, используемую для изготовления данного изделия.

Таблица 38

## План работы инструментального цеха

Тип приспособления	Число приспособлений	Общая стоимость	Экономия текущих затрат	Чистая экономия
Первый месяц				
I	100	50 000	80 000	30 000
II	—	—	—	—
III	500	50 000	150 000	100 000
IV	500	20 000	28 000	8000
V	—	—	—	—
VI	30	30 000	60 000	30 000
Всего	1130	150 000	318 000	168 000
Второй месяц				
I	100	50 000	80 000	30 000
II	—	—	—	—
III	500	50 000	150 000	100 000
IV	1000	40 000	56 000	16 000
V	150	30 000	37 500	7500
VI	30	30 000	60 000	30 000
Всего	1780	200 000	383 500	183 500

Из него видно, что затрата в 100 руб. (и, следовательно, расходование соответственной доли производственной мощности инструментального цеха) на изготовление приспособления I дает 60 руб. в месяц чистой экономии в основном производстве, в то время как для II приспособления эта величина равна только 20 руб. Поэтому ясно, что в первую очередь нужно изготовить приспособления (последовательно): III, VI, I, IV. Оказывается, что эти приспособления (IV — не полностью) уже исчерпывают производственную мощность инструментального цеха. В соответствии с этим и составлен его план на первый месяц (табл. 38).

Хотя мы имели возможность выполнить лишь около 50% (по объему) заявок на инструменты и приспособления, благодаря правильному, наилучшему выбору мы получили около 80% возможной экономии (168 тыс. руб. из 206 тыс. руб.).

Аналогично составляем программу на второй месяц, исходя из того, что запланировано увеличение производственной мощности инструментального цеха до 200 тыс. руб. В этом месяце удастся не только изготовить все приспособления IV, но частично и V. Соответствующий план приведен в табл. 38.

**Нормальная эффективность.** Выбирая последовательно вложения по их эффективности, мы остановились (для первого месяца) на приспособлении IV, для которого эта эффективность составляет 40%. Данная величина является для нас мерой целесообразности вложения и основой для получения оптимального плана.

Именно, осуществляя те вложения, для которых эффективность выше 40% (I, III, VI), и отказываясь от тех, для которых она ниже 40%, мы приходим к наилучшему плану. Эту величину мы будем называть нормальной [(или объективно обусловленной)] эффективностью вложений. Она представляет один из видов о. о. оценок. То обстоятельство, что нормальная эффективность равна, скажем, 40% в месяц, говорит о том, что дополнительная сумма на капиталовложения может быть использована с указанной эффективностью, т. е. выделение дополнительных 100 руб. на вложения позволит в течение месяца получить 40 руб. чистой экономии, иначе говоря, даст через месяц увеличение продукции или экономию затрат на 140 руб. Коротко: 100 руб., направленные на вложения сегодня, дадут 140 руб. через месяц. Напротив, уменьшение на 100 руб. средств на вложения сегодня повлечет за собой уменьшение на 140 руб. выпуска продукции в следующем месяце. Таким образом, нормальная эффективность характеризует то, насколько в данных условиях наличие или отсутствие средств на вложения может повлиять на успешность результатов труда в будущем; точнее, она показывает, какую экономию труда в будущем смогут дать затраты труда, произведенные сегодня.

Как всякая о. о. оценка, нормальная эффективность конкретна. Это видно из уже рассмотренного примера. Увеличение средств на вложения снизило нормальную эффективность для второго месяца до 25% (эффективность вложений в приспособления V вида). Равным образом для нее имеют место и остальные свойства — устойчивость, реальность. Сказанное сформулируем так.

**Вывод 23.** *В условиях ограниченности средств на кратковременные вложения существует определенная нормальная эффективность вложений. Если руководствоваться ею, т. е. осуществлять вложение, когда его эффективность (отношение чистой экономии за месяц, получаемой благодаря вложению, к его величине) превосходит нормальную, и отказываться от него, когда она ниже нормальной, то это приводит к оптимальному плану вложений. Последнее означает, что этому плану соответствует максимальная суммарная экономия в затратах, возможная за счет данных средств на вложения.*

Нормальная эффективность вложений конкретна — она определяется всей совокупностью условий: объемом средств на вложения, возможностями и эффективностью их применений. При увеличении средств на вложения она падает и, наоборот, при их уменьшении растет. Нормальная эффективность показывает, в какой мере в данных условиях наличие или отсутствие средств на вложения может повлиять на успешность результатов труда в дальнейшем.

Следует сказать, что наш вывод о том, что нужно пользоваться одной мерой эффективности при определении целесообразности вложения, существенным образом опирается на то, что и экономия и объем вложения определены по о. о. оценкам. Мы подчеркиваем эту оговорку, так как попытка применить данное положение, опираясь в расчете на существующие цены или значения себестоимости, является недопустимой. Попытка применения этого положения в таком виде может привести к столь неправильным выводам, что вызовет недоумение и сомнения в самой его справедливости.

Например, могут сослаться на то, что некоторый инструмент и не дает значительной экономии, но сделать его необходимо, поскольку без него нельзя обрабатывать определенные детали, а потому сократится выпуск некоторого вида продукции. Однако если мы правильно подсчитаем потери из-за отсутствия данного инструмента, учитывая, что при недостатке указанной детали ее оценка резко возрастает, а потому возрастет и прокатная оценка соответствующего инструмента, то окажется, что эффективность для этого вложения чрезвычайно велика, и потому оно будет, безусловно, включено в план[\*].

Другая возможность. Хотя некоторое приспособление принесет значительную экономию и обеспечит эффективность выше нормальной, но его нельзя реализовать, так как оно производится из дефицитных материалов, либо его изготовление потребует занятия тех станков в инструментальном цехе, которые и так загружены. В этом случае, если учесть высокую о. о. оценку дефицитных материалов или высокую прокатную оценку занятого станка, подсчет стоимости данного приспособления покажет значительно большую величину, а эффективность гораздо ниже, чем по обычной калькуляции. Если эффективность окажется меньше нормальной, то его применение в данных условиях действительно нецелесообразно. Если все же она окажется выше, то приспособление должно быть изготовлено, несмотря на указанные трудности, т. е. материалы или время станка следует высвободить за счет каких-то других работ.

Нам неизвестно, чтобы в сходных вопросах практически применяли подобный расчет, да его и трудно применить ввиду отсутствия о. о. оценок. Применение же себестоимости вместо них дало бы непригодные результаты, главным образом из-за того, что в ней не учитывается загрузка оборудования. [Между тем такой расчет в данном вопросе очень важен.]

Известно, что заявки на инструменты и приспособления, применение которых представляется выгодным, часто намного превышают возможности инструментальных цехов. Невозможность объективно оценить и сравнить эффект каждого из этих приспособлений приводит к тому, что либо эти заявки механически или случайно сокращают в соответствии с реальными возможностями, либо оставляют их полностью, заведомо идя на невыполнение инструментальным цехом части задания. В первом случае потери значительно превзойдут то, что могло бы быть при наилучшем решении вопроса (в нашем примере, при равномерном механическом сокращении заявок чистая экономия от приспособлений составила бы 101 000 руб. вместо 168 000 руб. в плане из таблицы 38). Во втором случае несоответствие задания возможностям инструментального цеха неизбежно вызовет простой и срывы работы основных цехов из-за несвоевременных поставок инструмента и приспособлений.

Возросшие {в условиях войны} требования к инструментальным цехам приводят к тому, что они в значительной степени лимитируют основное производство. Правильная загрузка инструментальных цехов и выбор их плана в соответствии с приведенной выше методикой могли бы значительно снизить потери, связанные с их недостаточной мощностью.

---

\*[Впрочем, такого рода безусловные заявки можно было бы с самого начала исключить из анализа, подобно тому, как мы поступили с безусловными грузами в примере § 7 главы II.]

{Единная нормальная эффективность.} При рассмотрении приведенного примера естественно возникает мысль, что раз нельзя осуществить все мероприятия, обеспечивающие значительную экономию, было бы оправданно расширить инструментальный цех, хотя бы за счет производственных. Действительно, если данный станок и недодаст на 100 руб. основной продукции, то использование его в инструментальном цехе позволит получить на 100 руб. инструментов, и соответственно на 140 руб. продукции вместо прежних 100 руб. при тех же затратах. Однако такое рассуждение не всегда будет правильным. Дело в том, что на 100 руб. продукции мы можем получить {и направить на фронт} немедленно, а продукции на 140 руб. мы получим только через месяц или полтора месяца. И вполне возможно, что в данной обстановке [и если продукция нужна для немедленного использования, или ее поставка необходима для обеспечения работы других предприятий,] важнее иметь на 100 руб. {мин} [продукции] сегодня, чем даже в полтора раза больше, но через один-два месяца. Поэтому целесообразность расширения инструментального цеха за счет остальных сомнительна. Однако бесспорно важно использовать его наличные производственные возможности наилучшим образом.

Приведенное соображение необходимо учитывать и в других случаях. Например, хотя постройка новой железной дороги или подъездных путей предприятия с лихвой окупит сделанные затраты увеличением продукции, но эта дополнительная продукция будет получена лишь через несколько месяцев или год, а металл для рельс надо потратить немедленно, отнимая его {у фронта}[у других нужд]. В силу этого далеко не все вложения, которые позволяют увеличить объем производства, могут быть осуществлены. Для капиталовложений выделяется только определенная доля конечной продукции, размер которой определяется общей обстановкой. Увеличивать эти средства нельзя, а нужно стараться использовать их наилучшим образом.

[Приведенное выше рассмотрение вопроса носит общий характер. Поэтому выводы, полученные на основе анализа плана вложений в этом примере, имеют общее значение.

Иначе говоря,] решение этого вопроса в общем случае такое же [и базируется на тех же соображениях], как и в приведенном примере. Именно, данной конкретной обстановкой (наличные средства для вложений, возможные объекты) определяется нормальная эффективность вложения на данный период, которой и следует руководствоваться при принятии решений. В частности, из двух вложений в первую очередь следует реализовывать то, эффективность которого выше. В самом деле, если у нас в плане для изготовления продукции I типа намечено вложение в 1 тыс. руб. с эффективностью в 20%, но открывается возможность вложить те же средства в изготовление продукции II типа с эффективностью 100%, то, вообще говоря, возможно и целесообразно заменить одно другим. Именно, ввиду реальности о. о. оценок, материальные средства в 1 тыс. руб. для первого вложения могут быть заменены другими материальными средствами в той же сумме, достаточными для второго вложения. В свою очередь, полученная благодаря этому через месяц продукция II вида, стоимостью 2 тыс. руб., может быть заменена продукцией I вида на ту же сумму, и в результате, не изменяя затрат в данный момент, мы через месяц будем иметь большее количество нужной продукции.

Из этого рассуждения видно, что положение о нормальной эффективности применимо в той мере, в какой допустимы перемещения по эквивалентам, определяемым о. о. оценками, т. е., как правило. [Сказанное не относится к случаю очень крупных вложений, существенно меняющих обстановку и систему оценок.]

Итак, в каждый момент имеется объективно обусловленная нормальная эффективность вложений. Ее значение определяется тем, что совокупность объектов для вложений с эффективностью больше нормальной допускает реализацию выделенными на эти цели средствами, и тем, что этими вложениями данные средства исчерпываются. Для различных участков народного хозяйства нормальная эффективность может различаться, но незначительно. Именно ею и следует руководствоваться при решении отдельных вопросов, касающихся использования средств на вложения.

[Эти положения могут при надлежащих условиях прилагаться к различным комплексам, где ставится задача составления оптимального плана вложений: группа предприятий, отрасль, экономический район.]

**Техника расчетов с нормальной эффективностью.** О возможной величине этой меры эффективности мы будем говорить ниже. Сейчас предположим, что нормальная эффективность определена для народного хозяйства в целом [или для экономического района, отрасли, предприятия] в данный и последующие моменты, и покажем, как с ее помощью производить различные расчеты, относящиеся к вложениям.

В основном расчет основан на том, что если нормальная эффективность в данный момент есть 20% в месяц [(квартал, год)], то это значит, что имеются неиспользованные возможности вложений такого рода, что сегодняшние затраты в 100 руб. дадут увеличение продукции на 120 руб. в следующий месяц [(квартал, год)]. Иначе говоря, рационально произведенные затраты труда в данный период дают возможность значительно большей экономии труда в будущем (за счет повышения производительности труда). Это и дает исходный пункт для приведения затрат следующего периода данному]. Таким образом, сумма 100 руб. сегодня в некотором смысле эквивалентна сумме 120 руб. через месяц. Если же нормальная эффективность окажется такой же и в следующий месяц, то сумме 100 руб. будет отвечать сумма 144 руб.  $(120 + 20\%)$  или более грубо 140 руб.  $(100 + 2 \times 20\%)$  через два месяца. Наоборот, 100 руб. через месяц отвечает 83 руб. сегодня. Именно отсюда и следует исходить. Рассмотрим несколько примеров[\*].

**ПРИМЕР 1.** В условиях рассмотренного выше примера (стр. 239) предлагается приспособление со сроком службы два месяца. Его стоимость 2000 руб., ежемесячная экономия 1400 руб. Конечно, оно вполне окупится, но оправданно ли его изготовление с учетом нормальной эффективности, т. е. с учетом других возможных объектов для вложений.

Произведем подсчет, приводя все затраты и получаемую экономию к последнему месяцу рассматриваемого периода (третий месяц) с учетом нормальной эффек-

---

\*[Фигурирующая в примерах эффективность вложений 20–40% в месяц практически может встретиться довольно редко. Однако такой уровень эффективности делает примеры более наглядными. В то же время методика расчета не зависит от уровня эффективности.]

тивности — 40% для первого месяца и 25% для второго (стр. 240–241). Получим:

для суммы вложения:  $2000 \times (1 + 0,40) \times (1 + 0,25) = 3500$  руб.,

для суммы экономии:  $1400 \times (1 + 0,25) + 1400 = 3150$  руб.

Отсюда следует, что данное вложение неоправданно.

Таким образом, очень существенно не только то, в какой мере окупится произведенное вложение, но и в течение какого срока оно реализуется (срок службы). Так, если нормальная эффективность 30% в месяц, то вложение в 1000 руб., которое в течение полугода будет давать ежемесячную экономию 300 руб., т. е. окупится почти дважды, окажется неэффективным. <<sup>3)</sup> Вложение в тысячу рублей при нормальной эффективности 30% должно ежемесячно давать экономию не меньше трехсот рублей, а наши затраты больше, так как через полгода вложение придется повторить.

ПРИМЕР 2. Нормальная эффективность 20% в месяц. Приспособление стоит 1000 руб., срок службы четыре месяца, ежемесячная экономия 400 руб. Время его изготовления два месяца, причем основные затраты производятся в первый месяц.

Через два месяца, к моменту, когда оно начнет применяться (на третий месяц), его стоимость составит  $1000 \times (1 + 2 \times 0,20) = 1400$  руб., а экономия только:

$$400 \times (1 + 1 : 1,2 + 1 : 1,4 + 1 : 1,6) = 400 \times 3,17 = 1268 \text{ руб. } >$$

Таким образом, если экономия реализуется не сразу после произведенных затрат, то для того, чтобы вложение оказалось оправданным, его эффект должен быть значительно большим\*.

[Отметим, что расчетам, подобным только что сделанным, может быть придана несколько иная форма. Именно, можем для каждого месяца записать относительную оценку (коэффициент) для приведения суммы (продукции или затрат) этого месяца к первому месяцу на основе значения нормальной эффективности. После этого достаточно сосчитать согласно этим оценкам эффект вложения и связанные с ним затраты, чтобы убедиться, оправданно оно или нет, т. е. достаточно ли эффективно в данных условиях. Так, в рассматриваемом примере, где нормальная эффективность равна 20%, эти коэффициенты приведения имеют следующие значения (табл. 39).

Действительно, 100 руб. второго месяца отвечает  $100 : (1 + 0,20) = 83$  руб. в первый месяц, 100 руб. третьего месяца  $100 : (1 + 0,20)^2 = 69$  руб. и т. д.

Подсчитывая для данного примера полученную экономию и затраты и приводя их к первому месяцу, согласно коэффициентам из табл. 39, получаем:

$$400 \times 0,69 + 400 \times 0,58 + 400 \times 0,48 + 400 \times 0,40 - 1000 \times 1,00 = -140 \text{ руб.,}$$

<sup>3)</sup> < ... > — здесь текст соответствует редакции 1942 г. (Прим. ред.)

\*Приводимые расчеты могут напомнить обычные расчеты с нормой прибыли (процентом на капитал). Принципиальная разница здесь в том, что мы учитываем вложения, не как способные сами по себе давать новый продукт, как считают некоторые буржуазные экономисты, а лишь как средство, позволяющее повысить производительность труда, уменьшить себестоимость и тем самым дать известное повышение эффективности труда. Такую роль прошлый труд способен играть как при капитализме, так и при социализме. Отличие социализма от капитализма не в том, что прошлый труд в нем играет эту роль и учитывается в цене производства, а в том, что этот прошлый труд превращен в капитал, находящийся в частной собственности капиталистов и служащий оружием эксплуатации.

**Таблица 39**  
**Коэффициенты для приведения затрат и экономического эффекта**  
**к начальному моменту (первому месяцу)**

Месяцы	1	2	3	4	5	6	7
Коэффициенты приведения	1,00	0,83	0,69	0,58	0,48	0,40	0,33

т. е. вложение неоправданно и должно быть отклонено как недостаточно эффективное (некоторая разница с предыдущим расчетом объясняется тем, что там он производился с простыми процентами и усреднением данных).]

**ПРИМЕР 3.** Нормальная эффективность 20%. Ежемесячно требуется 25 инструментов определенного вида, и потребность в них не вызывает сомнения. Если произвести партию в 25 инструментов, то стоимость каждого будет 40 руб., если 50, то 35 руб., и если 100, то 32 руб. Какой из размеров партии наиболее экономичен?

Для производства дополнительных 25 шт. в данном месяце придется затратить  $50 \times 35 - 25 \times 40 = 750$  руб. Если же их произвести через месяц, то придется затратить  $25 \times 40 = 1000$  руб., т. е. на 33% больше, а так как нормальная эффективность 20%, то размер партии в 50 шт. экономичнее, чем в 25. Переходя от партии в 50 шт., к партии в 100 шт., т. е. производя дополнительно 50 шт., мы затратим на них  $100 \times 32 - 50 \times 35 = 1450$  руб. вместо  $50 \times 35 = 1750$  руб. через два месяца. Эффективность  $300 : 1450 = 21\%$  за два месяца недостаточна при нормальной эффективности 20% в месяц. Таким образом, в данных условиях правильным будет размер партии в 50 шт.

Еще раз подчеркнем, что при расчете эффективности вложения необходимо затраты на вложение и полученную экономию определять на основе о. о. оценок, а нормальная эффективность должна соответствовать сложившимся условиям и обстановке. Без этого, если в качестве нормальной эффективности брать величину произвольную или перенесенную совсем из других условий, как это делалось иногда, весь расчет превращается в пустую игру цифрами.

Мы только что продемонстрировали способ расчета эффективности и оценки целесообразности вложения в более сложных случаях, чем это предусматривает вывод 23. Опишем этот способ в следующем выводе.

**Вывод 24.** Если нормальная эффективность и система о. о. оценок для данного и для других промежутков времени, на которые разбит рассматриваемый период, известны, то для суждения об оправданности некоторого вложения нужно: 1) затраты, связанные с осуществлением вложения, а также эффект, получаемый в результате его применения, для каждого промежутка времени подсчитать по о. о. оценкам; 2) привести все эти суммы к одному промежутку времени, руководствуясь значениями нормальной эффективности; 3) сравнить между собой сумму затрат и общий эффект — суммарную экономию (при приведении к одному промежутку времени теоретически нужно пользоваться сложными процентами, но практически можно ограничиться и простыми).



[ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в частном случае, когда вложение реализуется в следующем же периоде, т. е. мы находимся в условиях вывода 23, вывод 24 дает тот же самый критерий. Действительно, если  $n$  — значение нормальной эффективности,  $C$  — величина вложения и  $\Delta$  — достигнутая чистая экономия (полная экономия  $C + \Delta$ ), то с учетом коэффициента приведения  $1/(1+n)$  сопоставление суммы затрат с полученным эффектом дает условие:

$$(C + \Delta)/(1 + n) \geq C, \quad \text{или } \Delta/C \geq n.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Другой важный простой случай — когда нормальная эффективность и экономия постоянны, а объект вложения не изнашивается (весьма большой срок службы), т. е. экономия практически совпадает с чистой экономией. В этом случае критерий целесообразности тот же — эффективность вложения должна быть не ниже нормальной. Действительно, при тех же обозначениях, если  $\Delta$  есть ежегодная чистая экономия, то сопоставление затрат и суммарной экономии, приведенной к первому году, дает условие:

$$C \leq \Delta \times (1/(1+n)) + \Delta \times (1/(1+n))^2 + \dots = \Delta \times (1/(1+n)) \times (1/(1-1/(1+n))) = \Delta/n,$$

или  $\Delta/C \geq n$ .

Отношение  $\Delta/C$  и представляет эффективность вложения в данном случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае конечного срока службы вложения, равного  $k$ , если обозначить через  $C^*$  стоимость реализации объекта вложения к концу срока его службы, условие оправданности вложения может быть записано в виде:

$$C \leq \tilde{\Delta} \times (1/(1+n)) + \tilde{\Delta} \times (1/(1+n))^2 + \dots + \tilde{\Delta} \times (1/(1+n))^k + C^* \times (1/(1+n))^k,$$

где  $C$  — объем вложения и  $\tilde{\Delta}$  — ежегодная экономия. Это условие может быть преобразовано:

$$\tilde{\Delta}/C \geq n + (n/(1+n)^k - 1) \times (1 - C^*/C).$$

В частности, в случае, если вложение не изнашивается ( $C^* = C$ ), второе слагаемое исчезает, и мы имеем то же условие, что и в замечании 2 (здесь  $\tilde{\Delta} = \Delta$ ). Если, наоборот, стоимостью реализации можно пренебречь,  $C^* = 0$ , условие принимает вид:

$$\tilde{\Delta}/C \geq n + (n/(1+n)^k - 1).$$

Обычно и при конечном сроке службы условие эффективности вложения используют (исходя из нормы эффективности либо из нормы срока окупаемости) в виде, указанном в замечании 1, где под  $\Delta$  понимают чистую экономию, т. е. ежегодную экономию за вычетом амортизационных отчислений (на реновацию). Иначе говоря, принимают  $\Delta = \tilde{\Delta} - C/k$ . Условие оправданности вложения, следовательно, записывается в виде

$$\Delta/C = (\tilde{\Delta} - C/k)/C \geq n \quad \text{или } \tilde{\Delta}/C \geq n + 1/k.$$

Это условие отличается от более точного, полученного выше, и дает близкие с ним результаты, только если  $kn$  мало, т. е. либо срок службы мал по сравнению со

сроком окупаемости, либо  $kn$  весьма велико. Таким образом, в более точных расчетах последним условием пользоваться нельзя. В меньшей мере тот же недостаток имеет учет затрат на капитальный ремонт равными ежегодными долями. Правильнее все затраты учитывать по их сроку осуществления с последующим приведением к одному моменту.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Понятие об эффективности данного вложения можно определить также и в случае, когда срок службы не бесконечен или когда размер ежегодной экономии не является постоянным. Именно, под эффективностью данного вложения будем разумеать то максимальное значение нормальной эффективности, при котором данное вложение остается еще оправданным. Для случаев, рассмотренных в замечаниях 1 и 2, это понятие совпадает с прежним, так как такое наибольшее значение нормальной эффективности есть

$$n = \Delta/C.$$

В качестве примера подсчитаем эффективность для вложения, описанного в примере 1. Ее значение определяется из условия (все приводим к первому месяцу):

$$2000 = 1400/(1+n) + 1400/(1+n)^2.$$

Решая это квадратное уравнение, находим  $n = 0,257$ . Эффективность вложения 25,7%.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае, если нормальная эффективность изменяется от года к году, условие оправданности вложения записывается более сложным образом, именно:

$$\begin{aligned} C &\leq \Delta_1/(1+n_1) + \Delta_2/((1+n_1) \times (1+n_2)) + \dots + \Delta_k/((1+n_1) \times \dots \times (1+n_k)) = \\ &= r_1\Delta_1 + r_2\Delta_2 + \dots + r_k(\Delta_k + C^*), \end{aligned}$$

где  $\Delta_i$  — экономия в  $i$ -й год,  $n_i$  — норма эффективности от  $(i-1)$ -го года к  $i$ -му,  $r_i$  — коэффициент приведения  $i$ -го года к начальному (нулевому).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для той же цели расчета эффективности капиталовложений широко применяется методика определения сроков окупаемости для дополнительных капиталовложений. Именно, если при одном способе изготовления данной продукции текущие (ежегодные) затраты составляют  $C_1$  и капиталовложения  $K_1$ , а при другом соответственно  $C_2$  и  $K_2$ , то сроком окупаемости дополнительных вложений называют величину:

$$(K_2 - K_1)/(C_1 - C_2) = t.$$

По этому сроку производится сопоставление эффективности различных дополнительных вложений; нормирование его определяет приемлемую степень эффективности.

Если бы срок службы капиталовложений был весьма велик, текущие затраты и капитальные вложения были бы оценены правильно (по о. о. оценкам), то, поскольку капиталовложение  $(K_2 - K_1)$  позволяет получать ежегодную экономию  $(C_1 - C_2)$ , эффективность данного вложения согласно сказанному выше (замечание 1) равнялась бы:

$$n = (C_1 - C_2)/(K_2 - K_1) = 1/t,$$

т. е. представляла бы величину, обратную сроку окупаемости. Поэтому сопоставление по срокам окупаемости и нормирование их эквивалентны в этих условиях сопоставлению эффективности и установлению нормальной эффективности. Например, срок окупаемости 5 лет соответствовал бы нормальной эффективности 20%. Существенные отличия (и недостатки, по нашему мнению) этой методики по сравнению с описанной выше (выводы 23, 24) в следующем: а) ее применение затруднено при небольших сроках службы, изменении значения эффективности по годам, при учете одновременности капитальных затрат и т. п.; б) она касается эффективности только дополнительных, а не основных вложений; в) нормативный срок окупаемости назначается обычно условно, а не определяется объективно из обстановки, подобно нормальной эффективности; г) величины  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  рассчитываются на основе себестоимости или действующих цен и потому не всегда правильно отражают действительные народнохозяйственные затраты, переход к которым мог бы совершенно изменить значение  $t$ .

**Учет изменения о. о. оценок.** В случае если соотношение о. о. оценок изменяется с течением времени, то эти изменения необходимо учитывать при расчете эффективности капиталовложений.

Чтобы дать представление о том, как должен производиться анализ в этом случае, вернемся к примеру об изготовлении инструментов и приспособлений, несколько усложнив его. Именно, предположим, что изготовление необходимых инструментов требует некоторого дефицитного материала, возможность использования которого ограничена определенным лимитом — 68 000 руб. в первый месяц и 88 500 руб. во второй. Данные о затратах этого материала, а также оптимальный план с учетом лимитов приведены в табл. 40.

В связи с необходимостью учитывать расход лимитируемого материала понадобилось внести в план некоторые изменения по сравнению с планом из табл. 38, частично заменяя в нем приспособления I на IV, требующими меньших затрат дефицитного материала, в первый месяц и V на II во второй месяц. Размер получаемой экономии в связи с этим несколько снизился.

Чтобы убедиться в оптимальности приведенного плана, достаточно установить наличие соответствующих оценок.

Укажем, что в качестве таких оценок можно принять для первого месяца: 0,76 — как коэффициент приведения получаемой экономии (реализуемой в следующий месяц) к первому месяцу и 1,27 — коэффициент дефицитности для лимитируемого материала. Иначе говоря, объем работ инструментального цеха на 100 руб. должен обеспечивать  $100 : 0,76 = 132$  руб. экономии в следующем месяце; увеличение затрат дефицитного материала на 100 руб. должно соответствовать по эффективности 127 руб. других затрат.

Мы не будем останавливаться на нахождении этих оценок[\*]; для установления оптимальности плана на первый месяц проверим, что в соответствии с этими

---

\*[Нужно использовать методы, указанные в главе I (стр. 129–132). Значения оценок могут быть найдены, например, путем уравнивания продукции и затрат для способов, не полностью используемых в оптимальном плане. Если эти оценки обозначить через  $r$  и  $d$ , то их значения найдем из уравнений  $100 + 400d = 800r$ ;  $30 + 10d = 56r$ , откуда  $r = 0,76$ ;  $d = 1,27$ .]

**Таблица 40**  
**План работы инструментального цеха**  
**с учетом дефицитности материала**

Приспособления и инструменты	Стоимость одного приспособления (в т.ч. дефицитного материала) (в руб.)	Чистая экономия на одно приспособление (в руб.)	Число приспособлений		Стоимость приспособлений (в т.ч. дефицитных материалов) (в руб.)		Чистая экономия на приспособлениях (в руб.)	
			М е с я ц ы					
			1-й	2-й	1-й	2-й	1-й	2-й
I	500 (400)	300	80	100	40 000 (32 000)	50 000 (40 000)	24 000	30 000
II	1000 (200)	200	-	20	-	20 000 (4000)	-	4000
III	100 (45)	200	500	500	50 000 (22 500)	50 000 (22 500)	100 000	100 000
IV	40 (10)	16	750	1000	30 000 (7500)	40 000 (10 000)	12 000	16 000
V	200 (120)	50	-	50	-	10 000 (6000)	-	2500
VI	1000 (200)	1000	30	30	30 000 (6000)	30 000 (6000)	30 000	30 000
<b>В с е г о</b>					<b>150 000 (68 000)</b>	<b>200 000 (88 500)</b>	<b>166 000</b>	<b>182 500</b>

оценками включенные в план на первый месяц приспособления оправданны: приведенная оценка затрат не превосходит экономии; например, для I приспособления:

$$100 \times 1 + 400 \times 1,27 = (500 + 300) \times 0,76;$$

для III приспособления:

$$55 \times 1 + 45 \times 1,27 < (100 + 200) \times 0,76.$$

Для второго месяца аналогичные оценки составляют: коэффициент приведения получаемой экономии (реализуемой в следующем, третьем, месяце) к затратам данного (второго) месяца равен 0,84; коэффициент дефицитности материала равен 1,1.

Объединяя, можем все эти оценки привести к одной единице — затратам первого месяца. Так, экономия, полученная в третьем месяце, будет приводиться к затратам первого месяца с коэффициентом  $0,76 \times 0,84 = 0,64$ . Для материала во втором месяце, затраты на который к прочим затратам во втором месяце приводятся с коэффициентом 1,10, коэффициент приведения к затратам в первом месяце

**Таблица 41**  
**Относительные оценки, приведенные к первому месяцу**

	Месяцы		
	1-й	2-й	3-й
Оценка затрат и экономии	1,00 (1,00)	0,76 (1,00)	0,64 (1,00)
Оценка материала	1,27 (1,27)	0,84 (1,10)	–

получается равным  $1,10 \times 0,76 = 0,84$ . В итоге приходим к системе оценок, данной в табл. 41 (о цифрах, приведенных в скобках, будет сказано ниже).

Имея эти оценки, легко решить вопрос о целесообразности того или иного производственного способа, в котором затраты и эффект получаются в разное время.

Пусть приспособление стоит 2000 руб. (в том числе дефицитный материал — 800 руб.) и может быть изготовлено в течение двух месяцев с равными в каждый месяц затратами, зато в течение третьего месяца даст экономию 3000 руб. Оправданно ли его изготовление? Приведем затраты и экономию к первому месяцу, имеем:

*затраты:*  $(600 \times 1,00 + 400 \times 1,27) + (600 \times 0,76 + 400 \times 0,84) = 1900$  руб.,

*экономию:*  $3000 \times 0,64 = 1920$  руб.

Приспособление эффективно.

Этот расчет может быть построен и в иной форме, именно, можно исходить из своих оценок для каждого периода и по ним подсчитывать затраты и эффект за каждый период, а затем на основе единых коэффициентов приведения весь эффект привести к одному сроку. Так, беря в качестве единицы в каждый промежуток времени рубль затрат и экономии (кроме дефицитного материала), имеем для относительных оценок каждого месяца цифры, указанные в табл. 41 в скобках. Коэффициенты приведения к первому месяцу будут: 0,76 — для второго месяца и 0,64 — для третьего (0,84 для приведения третьего ко второму). Эти коэффициенты отвечают нормальной эффективности 32% ( $1 : 0,76 = 1,32$ ) для первого месяца и 19% ( $1 : 0,84 = 1,19$ ) для второго.

Расчет затрат и экономии будет тогда выглядеть так:

*затраты:*  $(600 \times 1,00 + 400 \times 1,27) + (600 \times 1,00 + 400 \times 1,1) \times 0,76 = 1900$  руб.

*экономию:*  $3000 \times 0,84 \times 0,76 = 3000 \times 0,64 = 1920$  руб.

Необходимо отметить, что в рассматриваемом случае, когда относительные оценки изменяются, коэффициенты приведения затрат к одному моменту или соответственно уровни эффективности вложений существенно зависят от избранной единицы для оценок в каждый период. Так, в данном примере в качестве единицы для оценок были избраны затраты (на 1 руб.), не связанные с использованием дефицитного материала; при другом выборе единицы значение коэффициентов приведения и эффективности были бы другими.

Изложенный порядок расчета может быть применен при анализе кратковременных вложений в тех случаях, когда приходится учитывать изменение относительных оценок. Вопрос об эффективности кратковременных вложений непосредственно связан с составлением оптимального производственного плана, охватывающего несколько периодов времени и учитывающего наличные ресурсы производ-

ственных факторов и задание по составу продукции. Отличие от задач производственного планирования на один период состоит здесь в том, что приходится учитывать производственные способы, в которых часть затрат производится в одни промежутки времени (капиталовложения), а продукция получается в другие. Условия по наличию ресурсов и требования к получаемой продукции также связаны с этими периодами. Естественно, нам не безразлично, в какой период будет произведена продукция данного вида. Поэтому каждый вид производственных факторов и продукции каждого периода нужно рассматривать как особый, самостоятельный вид. Тогда задача составления производственного плана на ряд периодов оказывается подобной обычной задаче составления оптимального плана, в котором число видов продукции и производственных факторов умножено на число планируемых периодов. Поэтому естественно, что и здесь оптимальный план характеризуется системой объективно обусловленных оценок каждого вида продукции и факторов (различных для каждого периода), такой, что используемые в оптимальном плане производственные способы должны быть оправданными.

Эти оценки будут взаимосвязанными и будут включать в себя не только приведение различных видов продукции и затрат к одному эквиваленту, но также приведение затрат и эффекта к одному моменту. Можно поступить и иначе: выбрать одинаковый масштаб для всех периодов, приняв, например, оценку некоторого продукта, фактора или фиксированного их набора для каждого периода равной единице и соответственно пропорционально изменив оценки всех продуктов и факторов. Тогда уже нельзя судить о способе, исходя непосредственно из полученных оценок, а необходимо построить коэффициенты приведения всех периодов к одному или, что равносильно, определить значения нормальной эффективности вложений при переходе от одного периода к другому. Эти коэффициенты перехода представляют не что иное, как оценки фиксированного набора в первоначальной системе, следовательно, зависят от его выбора. Две системы таких оценок были определены в нашем примере (табл. 41).

Резюмируем только что сказанное в следующих выводах.

**Вывод 25.** *Оптимальный производственный план, построенный для ряда периодов (план капиталовложений), характеризуется наличием динамической системы оценок, т. е. системы оценок всех видов продукции и факторов для каждого периода. Эти оценки, вообще говоря, изменяются при переходе от одного периода к другому как абсолютно, так и относительно. Они могут быть даны в двух формах: либо приведенными к одному моменту, либо в форме относительных оценок для каждого периода с указанием единых коэффициентов приведения к одному моменту, что эквивалентно заданию нормальной эффективности при переходе от каждого периода к следующему.*

*В соответствии с этими оценками все производственные способы, рассчитанные на ряд периодов и используемые в оптимальном плане, «оправданны» (рентабельны), а неиспользуемые — не более чем оправданны.*

**Вывод 26.** *Если для данного плана построена характеризующая его динамическая система оценок, то для суждения о целесообразности применения некоторого производственного способа, рассчитанного на ряд периодов (обычно связанного с*

капиталовложениями), достаточно сопоставить для него ожидаемую за все время продукцию и плановые затраты согласно динамической системе оценок. Подсчет продукции и затрат можно также произвести, исходя из оценок каждого периода и приводя затем полученные данные к одному моменту согласно коэффициентам приведения или нормам эффективности. В случае, когда относительные оценки можно считать неизменными, расчет упрощается и может быть осуществлен на основе знания только норм эффективности и оценок одного периода (ср. выводы 23 и 24)<sup>[\*]</sup>.

**Дальнейшие примеры расчета эффективности вложений.** Приведем еще несколько примеров анализа краткосрочных вложений, в которых предполагается, что значение нормы эффективности или, где это требуется, динамическая система оценок, так или иначе, известны.]

{<sup>1</sup>}<sup>4)</sup> [ПРИМЕР 4. Котел работает на дальнепривозной нефти, с суточной затратой 20 тонн. Намечается заменить его котлом, работающим на газе с расходом 25 тыс. м<sup>3</sup> ежесуточно. Затраты на новый котел и его установку — 250 тыс. руб. (по о. о. оценкам), срок производства работ — четыре месяца. О. о. оценка нефти, включая доставку, — 200 руб. за тонну, газа — 20 руб. за 1 тыс. м<sup>3</sup>. Нормальная эффективность — 10% в месяц. Определить целесообразность мероприятия.]

Ежемесячная экономия по о. о. оценке  $30 \times (20 \times 200 - 25 \times 20) = 105$  тыс. руб. Ввиду большого срока службы котла, полная экономия будет здесь практически совпадать с чистой экономией. Оценка затрат на котел к моменту пуска его в эксплуатацию  $250\,000 \times (1 + 4 \times 0,10) = 350$  тыс. руб. Эффективность вложения 30% ( $105 : 350$ ). Мероприятие явно оправданно.

Если бы оценка газа была бы 120 руб. за 1 тыс. м<sup>3</sup>, например, если бы газ полностью использовался в химической промышленности, то мероприятие оказалось бы уже неэффективным.]

ПРИМЕР 5. Структура затрат на некоторое изделие на данном машиностроительном предприятии такова: материалы — 25%, затраты труда и эксплуатационные затраты предприятия — 25%, прокатная оценка предприятия — 50%.

Создание двухнедельного задела деталей и организация благодаря этому ритмичной работы позволит без привлечения дополнительной рабочей силы, без изменения трудовых и эксплуатационных затрат предприятия и с пропорциональным увеличением затрат материала повысить на 10% выпуск продукции. При каком значении нормальной эффективности это мероприятие рационально?

Пусть месячная продукция предприятия — 1 млн руб. После проведения мероприятия она составит 1,1 млн руб. Возрастут только затраты на материалы на 25 тыс. руб. Таким образом, получим чистую экономию 75 тыс. руб. в месяц. Двухнедельный задел деталей стоит несколько меньше двухнедельной готовой продукции, учитывая, что в задел входят и детали на начальной стадии обработки, и составляет, скажем, 350 тыс. руб. Тогда эффективность данного мероприятия бу-

\*[Математическое рассмотрение этих вопросов дано в Приложении I (стр. 336–338), пример расчета в Приложении II (стр. 376–380).]

<sup>4)</sup>В тексте 1942 г. пример немного иной. См. сноску в конце главы. (Прим. ред.)

дет  $75\,000 : 350\,000 = 21\%$  в месяц. Следовательно, мероприятие рационально, если нормальная эффективность не превосходит  $20\%$  в месяц.

Данный пример был взят с произвольными, но довольно реальными цифрами. Действительно, на многих предприятиях отсутствует нормальный задел деталей и его создание {и поддержание} могло бы существенно повысить выпуск продукции{\*}\*\*. Конечно, как показывает произведенный расчет, в таких условиях данное вложение во много раз эффективнее, чем многие из тех, что производились и производятся. Поэтому ссылки на возможное омертвление средств в заделах не обоснованны. {На важность этого вопроса указывал тов. Маленков в своем докладе на XVIII партконференции: «На большинстве предприятий мы имеем такую картину: цеха по выпуску готовой продукции, сборочные цеха получают полуфабрикаты из других цехов с перебоями, неравномерно. Предприятия работают без нормального задела и, как правило, в первую половину месяца все силы предприятия бросаются на создание такого задела. Такой неправильный режим в работе приводит к постоянным авралам, к простоям оборудования, простоям рабочей силы, к недоиспользованию производственных мощностей, к увеличению брака, к непроизводительным переплатам за сверхурочные работы. Такой неправильный режим держит предприятия в лихорадочном состоянии и ставит под постоянную угрозу срыва выполнение государственного плана».

Неоднократно давались даже прямые указания {сверху} о необходимости создания нормальных заделов, а во многих случаях такие заделы и фактически создавались на заводах. Однако очень часто их «съедали» в конце месяца, чтобы обеспечить выполнение и перевыполнение плана. В результате — и в конце и в начале каждого месяца предприятия не работают нормально. Причина этого не только в перебоях снабжения, но в способе отчета о выполнении плана. Именно, такому «съеданию» нормального задела способствует учет результата работы предприятий только по товарной продукции. Разумеется, он является прогрессом по сравнению с учетом результата по валовой продукции, {когда безгранично накапливалась} [при котором на отдельных предприятиях могла безгранично накапливаться] незавершенная и некомплектная продукция. Однако более правильным, чем оба эти способа, был бы такой учет, при котором к товарной продукции присоединялось бы движение в незавершенной, но только в пределах планового задела. [Такой же порядок учета незавершенной продукции мог бы быть введен и при переходе от

---

{\*}{Так, в выступлении директора одного из крупных заводов на XVIII партконференции указывалось, что ликвидация штурмовщины, связанной с отсутствием нормальных заделов, могла бы на  $25\%$  повысить выпуск продукции на многих предприятиях.}

\*\*[Так, отмечалось, что по данным обследования некоторых заводов в 1956 г. вследствие неритмичной работы выпуск продукции в отдельные месяцы на них снижался на  $16\%$ , а себестоимость ряда изделий возрастала более чем вдвое (см. Алибекова А. М. Влияние ритмичной работы на себестоимость продукции // Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий. — М.: Машгиз, 1958. — С. 132–133). Большие возможности роста за счет улучшения планирования и снабжения отмечаются и в выступлении В. И. Горбунова на XXI съезде КПСС: «Можно с полной уверенностью и без всякого преувеличения сказать, что своевременная, в соответствии с планом и графиками поставка комплектующих деталей, узлов, оборудования, металла и других материалов позволит без дополнительных капитальных вложений, на тех же производственных площадях, при том же количестве рабочих увеличить выпуск кораблей на  $20\text{--}30\%$ » (Стенографический отчет. — Т. I. — С. 372).]



показателя товарной продукции к чистой продукции, целесообразность которого отмечалась в § 1 главы I.]

Сходным с предыдущим является также вопрос о своевременной остановке агрегатов на ремонт и о проведении профилактических работ даже в тех случаях, когда это приводит к снижению выпуска продукции в текущем периоде. Такие мероприятия следует рассматривать как кратковременные вложения. При оценке их эффективности, несмотря на включение в затраты потерь продукции по о. о. оценкам даже при ее высокой значимости, все же получаем обычно весьма эффективное вложение. Отказ от таких мероприятий в то время, когда осуществляются вложения с гораздо меньшей эффективностью, никак не может быть оправдан и ведет к большим потерям в самое ближайшее время. Между тем ошибочное решение подобных вопросов является весьма распространенным в практике {многих} [отдельных] предприятий и объединений. [Это отчасти связано также с некоторыми недостатками в показателях работы предприятий: именно произведенные подготовительные работы не находят отражения в товарной и валовой продукции.

Наконец, в ряде случаев весьма существенным для обеспечения работы данного или других предприятий является хранение в течение некоторого срока определенного запаса готовой продукции. Достижимый за счет этого выигрыш от лучшего удовлетворения потребностей часто может значительно превосходить ущерб, наносимый омертвлением средств. Характерный пример этого представляет сохранение готового набора книги для возможности допечатки тиража в случае выявившейся в этом необходимости после начала распространения книги. Достижимое этим устранение возможного ущерба (от затоваривания при завышенном тираже и от неполного обеспечения книгой круга ее читателей при заниженном тираже) во много раз превзойдет потери, связанные с омертвлением средств в металле в течение нескольких месяцев. Даже при самой высокой о. о. оценке типографского металла расчетная эффективность этого мероприятия составит, по крайней мере, несколько сот процентов в месяц.

**ПРИМЕР 6.** Тепловая электростанция может быть построена в течение либо года, либо двух лет. Скоростная стройка связана с некоторыми дополнительными затратами (строительство в зимних условиях, привлечение большего коллектива строителей и т. п.), но при этом электроэнергия начнет производиться на год раньше. Данные о затратах и производстве электроэнергии в обоих вариантах приведены в табл. 42.

Сопоставление вариантов достаточно произвести за срок в три года, так как после этого срока в обоих вариантах станция вступает в действие на полную мощность (со второго года после окончания строительства), и дальнейшие результаты ее работы практически одинаковы.

Для выполнения такого анализа необходимо иметь динамику оценок для фигурирующих здесь видов затрат и продукции. Предположим, что эти данные в масштабе народного хозяйства в целом (или экономического района) нам известны и даются цифрами, указанными в табл. 43.

В табл. 43 даны оценки, приведенные к первому году, в соответствии с нормальной эффективностью 25% в год (коэффициент приведения к предыдущему году 0,8) и в скобках — оценки для каждого года. Для затрат, оцениваемых в денежной форме, указаны коэффициенты приведения к первому году. Цифры таблицы говорят

**Таблица 42**  
**Данные о затратах на строительство электростанции**  
**и производство электроэнергии**

Варианты строительства	Затраты на строительство и оборудование (млн руб.)*		Затраты на производство электроэнергии				Производство электроэнергии (млн кВт·ч)	
			угля (тыс. т)		прочие эксплуатационные затраты (млн руб.)			
	Г о д ы							
	1-й	2-й	1-й	2-й	1-й	2-й	1-й	2-й
Одногодичное	110 (30)	-	300	500	10	15	600	1000
Двухгодичное	50 (20)	50 (20)	-	300	-	10	-	600

\* Цифры в скобках выделяют прокатную стоимость строительных механизмов в затратах.

**Таблица 43**  
**Динамика оценок**

Виды продукции и затрат	Оценка, приведенная к 1-му году, и коэффициент приведения		
	Г о д ы		
	1-й	2-й	3-й
Уголь за 1 т	—	80 (100)*	64 (100)
Электроэнергия за 1 тыс. кВт·ч	—	84 (105)	61 (95)
Затраты на строительство и эксплуатационные расходы (коэффициент приведения)	1,0 (1,00)	0,8 (1,00)	0,64 (1,00)

\* Цифры в скобках — либо сама оценка, либо ее относительный коэффициент для данного года.

об ослаблении дефицитности электроэнергии, относительном снижении ее оценки со 105 до 95 руб.

Исходя из этих цифр, подобно тому как это делалось выше, произведем расчет затрат на строительство и планового дохода от работы станции для обоих вариантов, приводя все к первому году.

Стоимость строительства:

I вариант: 110 000 тыс. руб. = 110 млн руб.

II вариант:  $50\,000 + 50\,000 \times 0,8 = 90$  млн руб.

Доход за три года (по плану):

I вариант: 2-й год:  $600\,000 \times 84 - 300\,000 \times 80 - 10\,000\,000 \times 0,80 = 18,4$  млн руб.

3-й год:  $1\,000\,000 \times 61 - 500\,000 \times 64 - 15\,000\,000 \times 0,64 = 19,4$  млн руб.

Всего: ... .. 37,8 млн руб.

II вариант: 3-й год:  $600\,000 \times 61 - 300\,000 \times 64 - 10\,000\,000 \times 0,64 = 11$  млн руб.

Всего: ... .. 11 млн руб.

Как видим из подсчета, при увеличении стоимости строительства в I варианте по сравнению со II на  $110 - 90 = 20$  млн руб. планируемый доход в нем больше на  $37,8 - 11,0 = 26,8$  млн руб. (все суммы приведены к первому году). Таким образом, в данных условиях скоростное строительство предпочтительнее.

В этом расчете, на основе данных о динамике оценок, включая нормальную эффективность, отражены те основные соображения, которые существенны при выборе такого решения: фактор омертвления средств, важность скорейшего получения электроэнергии, учитывая, что она особенно дефицитна в ближайший период и т. д. Такой расчет (при наличии необходимых данных) позволяет в объективной количественной форме оценить все те моменты, которые обычно сопоставляются лишь качественно. Решение о скоростном строительстве, возможно, было бы принято и без такого расчета, но считалось бы, что оно принимается исходя из указанных соображений, несмотря на его нерентабельность. Правильно произведенный расчет (с учетом эффективности капиталовложений и других моментов) показывает, что в действительности скоростное строительство рентабельнее.

Нужно отметить, что для правильности этого анализа недостаточно исходить только из учета нормальной эффективности вложений, а важно также применение о. о. оценок, иначе не были бы учтены дефицитность электроэнергии и высокая ее оценка, без чего результаты расчета оказались бы совсем иными. Сама стоимость вложения была бы другой. Так, в расчете было учтено, что при строительстве, наряду с возможными большими затратами по другим статьям, в I варианте затраты, связанные с прокатной оценкой строительных механизмов, меньше. Это естественно, так как при скоростном строительстве строительные механизмы используются круглогодично и более интенсивно. При обычном расчете, когда прокатная оценка не учитывается, скоростное строительство оказалось бы менее выгодным. Учет нормы эффективности вложений, конечно, имеет основное значение для решения подобных вопросов, позволяя отразить в расчете омертвление средств и возможности их использования в других местах.

Приведенный пример является характерным, хотя он и построен на условных данных. Очень часто, как указывалось в постановлениях партии и правительства по вопросам строительства, недооценивались значение и эффективность для народного хозяйства скоростного строительства, не учитывался большой вред от омертвления средств в результате их распыления по многим длительно сооружаемым объектам. Применение методов расчета, опирающихся на нормальную эффективность и динамику о. о. оценок, способствовало бы более правильному выбору сроков строительства, очередности объектов и рациональному распределению средств и

механизмов между ними для достижения наибольшего народнохозяйственного эффекта<sup>†</sup>.

В этой связи уместно сказать, что распространенное мнение о том, будто велико число случаев, когда в решениях вопроса не следует считаться с экономикой, сильно преувеличено. Как довод, приводят тот факт, что «очень нужное вложение» необходимо осуществлять в возможно кратчайший срок, не считаясь с экономикой. В действительности почти во всех без исключения таких случаях и правильный экономический расчет приводит к тому же выводу. Например, известно, что первые экземпляры электронных счетных машин дали годовой эффект в несколько сот миллионов рублей, не говоря уже об эффекте, не оцениваемом экономически[\*]. Поэтому ясно, что увеличение себестоимости их изготовления даже на 50–100%, т. е. на несколько миллионов рублей было вполне оправданно, если оно давало возможность приблизить их ввод в эксплуатацию хотя бы на полгода. И только при самом поверхностном анализе (ориентируясь на показатель себестоимости электронных машин) могло показаться, что это не экономично. Правильный анализ (подобный вышеприведенному) показал бы, что в данном случае вложение, связанное с сокращением срока, имеет эффективность в несколько тысяч процентов в год!]

## § 2. Долговременное вложение

**Особенности долговременных вложений.** До сих пор мы рассматривали кратковременные вложения, т. е. такие, для которых произведенное вложение полностью затрачивается (изнашивается) в небольшой промежуток времени, и потому для оценки его результатов можно ограничиться рассмотрением этого короткого периода.] Как кратковременные могут рассматриваться и такие вложения, которые хотя и продолжают давать эффект в течение длительного времени, но их целесообразность вполне оправдывается эффектом, получаемым в короткий период (примеры 4 [и 6]). Величина промежутка, позволяющая считать его кратким, определяется тем, что в течение этого периода не происходит коренных изменений в обстановке, в частности, в характере производственного задания (распределении конечной продукции) и в производственных способах.

С принципиальной точки зрения анализ вопросов, касающихся долговременных вложений, не отличается существенно от анализа кратковременных вложений. В частности, вывод 24 в той общей форме, в которой он высказан, полностью применим, как мы увидим ниже, и для оценки целесообразности долговременных вложений. Однако практическое его применение связано со значительными трудностями.

[Отдельные решения, требующие анализа эффективности капиталовложения, не могут приниматься изолированно, а должны быть увязаны с общим народнохозяйственным планом. Поэтому при анализе данного капиталовложения мы должны опираться на такие показатели народнохозяйственного плана, как о. о. оценки и

---

<sup>†</sup>Экономическая практика последних десятилетий, к сожалению, хорошо подтверждает эти положения, — неправильная система экономических показателей строительства привела к резкому увеличению объема незавершенного строительства (*примечание 1984 г.*)

\*[За 1958 г. экономия от действующих электронных машин составила уже около одного миллиарда рублей. См. выступление Ф. Р. Козлова на XXI съезде КПСС (Стенографический отчет. — Т. II. — С. 135).]

обусловленную планом нормальную эффективность для народного хозяйства в целом.]

В период, связанный с анализом кратковременных вложений, не происходило значительных изменений условий, поэтому в расчетах мы могли пользоваться существующими на данный момент о. о. оценками и величиной нормальной эффективности или предвидеть приблизительно те изменения, которые в них произойдут за рассматриваемый небольшой промежуток времени.

Для долговременных вложений сделать это неизмеримо сложнее даже со сколько-нибудь удовлетворительной степенью точности, а потому и расчет эффективности таких вложений очень затруднен.

Дело в том, что значения и динамика о. о. оценок существенным образом связаны со всеми условиями, в особенности с характером и распределением программы по видам конечной продукции. Последнее же зависит от многих обстоятельств, в том числе от принятых политических решений и общей обстановки.

[Социалистический путь индустриализации страны, требовавший развития крупной, в первую очередь тяжелой промышленности — средств производства — собственными силами, определял большую народнохозяйственную потребность в металле и высокую его оценку. В силу этого вложения средств в черную металлургию в период индустриализации были не только необходимыми, но и при правильном экономическом анализе оказались бы и весьма рентабельными, вопреки тому, что калькуляция, исходившая из действующих в то время и не соответствовавших обстановке цен, показывала их нерентабельность.] Только зная о решении по коллективизации сельского хозяйства, можно было предвидеть, что в 1931–1933 гг. резко возрастет потребность в тракторах и другой сельскохозяйственной технике. В результате этого при расчете они должны были бы получить высокую народнохозяйственную оценку, а потому и вложения, сделанные в 1928–1930 гг. в тракторные заводы и заводы сельскохозяйственного машиностроения, и по расчету оказались бы весьма эффективны. {Также и вложения в черную металлургию в тот же период, их рентабельность и эффективность могла быть видна только из предвидения изменений в общей обстановке.}

[Из сказанного ясно, что эффективность и о. о. оценки продукции являются, как и другие стоимостные показатели, не регулятором, определяющим направление капиталовложений, а наоборот, сами объективно обуславливаются общей обстановкой, экономическими задачами и необходимыми для их решения основными экономическими мероприятиями. Или, согласно удачному выражению А. Ф. Засядько, критерий эффективности должен пониматься не как регулятор, а как деловой, обоснованный и точный механизм для планирования народного хозяйства[\*]. Именно в силу этого полученные на их основе данные экономического расчета и выводы не только не могут вступать в противоречие с указанными решениями, а наоборот, дают средство наилучшего претворения их в жизнь.

Коротко можно сказать, что если в вопросе о том, что производить (конечная продукция), экономический расчет играет второстепенную роль, то в вопросе о том, как производить, в выборе наиболее экономных способов получения требуемой продукции эти показатели весьма существенны.]

\*[Стенографический отчет XXI съезда КПСС. — Т. II. — С. 77.]

Таким образом, основной характер и направление долговременных вложений могут определяться только на основе общего плана политических и экономических решений<sup>{<sup>5</sup>}</sup>.

[В то же время в процессе реализации плана, намеченного общей линией, расчет эффективности должен играть очень большую роль, в особенности при рассмотрении более частных, но также существенных вопросов такого рода, как выбор используемых видов сырья и технологических процессов, типа предприятий, степени концентрации и специализации и т. п. Причем и эти вопросы должны решаться с учетом общего плана.

Если расчет эффективности] нельзя провести с большой точностью, даже грубый расчет позволит избежать многих ошибок, которые достаточно часты. Они состояли, например, в том, что в план включался ряд малоэффективных вложений, которые окупались только в течение многих лет, в то время как многие возможности вложений с чрезвычайно высокой эффективностью вовсе не осуществлялись из-за недостатка средств или осуществлялись с большим опозданием. Тот факт, что некоторые стройки были законсервированы даже после того, как туда были вложены значительные средства, и что некоторые вновь построенные предприятия оказывались незагруженными, свидетельствует о наличии таких неудачных вложений.

Положение о том, что срок окупаемости вложения должен играть роль при решении вопроса о его целесообразности, является настолько бесспорным, что, пожалуй, никем всерьез не отрицалось. Однако по вопросу о том, насколько объем капиталовложений существен и каким должен быть их эффект, встречались различные суждения и различная практика.

[Можно было встретить высказывания, что капиталовложения через амортизацию полностью учитываются в себестоимости. Однако большинству экономистов и техников было ясно, что учет амортизации объекта не в полной мере отражает фактор времени и задолженность средств в капиталовложениях. Поэтому с показателем себестоимости обычно сопоставлялся показатель удельных капиталовложений, но ему придавалось часто второстепенное значение либо он учитывался только качественно<sup>{<sup>6</sup>}</sup>. Это чрезвычайно] затрудняло правильное и объективное решение вопроса, ибо, решая данный частный вопрос, было трудно учесть всю обстановку и другие возможности вложений. Поэтому соблазнительность тех или иных перспектив проекта могли заслонить экономическую сторону вопроса.

[При количественном анализе вопрос о принципах учета показателя удельных капиталовложений становился особенно острым в тех случаях, когда сопоставление

---

<sup>{<sup>5</sup>}</sup> {Расчет эффективности здесь должен играть вспомогательную роль, скажем, при решении вопросов о способах реализации плана, намеченного общей линией, т. е. при рассмотрении более частных вопросов, таких как выбор типа предприятия, технологических процессов, степени концентрации и специализации производства и т. п., причем и эти вопросы должны решаться с учетом общего плана. При решении этих более частных, но очень существенных вопросов, правильный экономический расчет, в особенности учет нормальной эффективности, должен играть большую роль. И хотя его}

<sup>{<sup>6</sup>}</sup> {При этом анализ эффективности вложений производился главным образом качественно, что чрезвычайно}

по себестоимости и по удельным капиталовложениям приводило к противоположным выводам. Естественно, при этом возникало стремление с целью установления объективного подхода в той или иной форме объединить эти показатели в один синтетический. Такие попытки делались неоднократно.]

Одно время, например, в расчете эффективности гидроэлектростанций в себестоимости электроэнергии учитывался определенный процент на произведенное вложение. Однако его величина бралась почти произвольно (2,5%, 6%), а не на основе общего анализа эффективности вложений в стране. Поэтому такой расчет приносил, пожалуй, даже больше вреда, чем пользы, так как создавал видимость того, что момент задолженности средств во вложении уже полностью учтен, в то время как в действительности это было не так.

Такого же рода расчеты применялись и при проектировании железных дорог\*<sup>{7}</sup>. [В ряде проектных организаций при рассмотрении вариантов использовался срок окупаемости дополнительных капиталовложений (по поводу этого показателя см. выше, стр. 248<sup>\*\*</sup>). Эта методика получила более широкое признание в последние годы, когда были разработаны рекомендации по ее применению.]

Из сказанного ясно, что основными исходными данными при составлении плана капиталовложений являются общий объем средств на капиталовложения, а также состав конечной продукции и в связи с этим общее направление капиталовложений.

Проблема эффективности капиталовложений не может рассматриваться в отрыве от других планово-экономических проблем. Прежде всего, вопросы эффективности капиталовложений и сопоставления одних вложений с другими могут быть правильно проанализированы только в увязке с перспективным планированием в целом. Действительно, с одной стороны, общий перспективный план составляется, в конечном счете, из отдельных решений о капиталовложениях. С другой стороны, при изолированном рассмотрении отдельного капиталовложения не могут быть выяснены ключевые моменты, необходимые для принятия решения: надобность в данном вложении в сопоставлении с другими возможными решениями, баланс имеющихся средств на капиталовложения и потребность в них.

При расчете эффективности капиталовложений не могут не учитываться и данные текущего планирования, так как, только имея их, можно судить о том, насколько полно и правильно загружены те или иные наличные средства производства и какова надобность в них, какой они дадут эффект.

Наконец, для оценки экономического эффекта капиталовложения и получаемой за счет него продукции, а также затрат, связанных с его осуществлением, важ-

---

\*См. Протождяконов М. М. Изыскание и проектирование железных дорог. — 1934.

<sup>{7}</sup>{Однако нам неизвестно, чтобы когда-либо определялась на основе общего анализа проблемы капиталовложений единая (конкретная и реальная) нормальная эффективность, и она бы применялась систематически при оценке целесообразности вложений. (Напомним, что положение о наличии и применимости единой нормальной эффективности справедливо только при условии, что и затраты на вложение и его эффект подсчитаны по о. о. оценкам.) Несмотря на понятные трудности ее определения, хотя бы приблизительное нахождение нормальной эффективности и грубый ее учет, т. е. отказ о *t* вложений с эффективностью значительно меньшей нормальной и осуществление всех вложений, эффективность которых существенно превосходит нормальную, могло бы принести большую пользу.}

\*\*[Мы возвращаемся к его обсуждению и сопоставлению с нашими предложениями на стр. 295.]

на правильная народнохозяйственная оценка отдельных видов продукции и услуг. Следовательно, вопросы капиталовложений теснейшим образом связаны с вопросами исчисления народнохозяйственных затрат, с оценкой продукции и ценообразованием.

Однако проблемы капиталовложений связаны, прежде всего, со структурой перспективного плана развития народного хозяйства. Перспективный план народного хозяйства в социалистическом обществе направлен на развитие производительных сил, обеспечивающее максимальный рост продукции и производственных мощностей в соответствии с задачей наилучшего удовлетворения потребностей общества, на основе наиболее полного и целесообразного использования ресурсов, т. е. должен представлять, в принципе, оптимальный план. Социалистический общественный строй по своей природе позволяет обеспечить наиболее полное и рациональное использование ресурсов, поэтому такой оптимальный план является в нем осуществимой реальностью, а закономерности оптимального плана представляют реальные экономические закономерности народного хозяйства.

Схематически проблему составления народнохозяйственного плана можно себе представить в общих чертах так.

Известны ресурсы на начало планируемого периода. На основе общей политической и экономической обстановки, задач, которые ставятся перед народным хозяйством, изучения общественных потребностей определяется состав конечной продукции для личного потребления и нужд общества в целом, а также та доля продукции, которая может быть направлена на накопление. Исходя из известных технических и производственных данных, а также данных о возможностях развития производства, в особенности прогноза дальнейшего развития техники и освоения естественных ресурсов (разведка полезных ископаемых и пр.), могут быть количественно описаны осуществимые производственные способы. На основе всех этих данных и должен быть построен план, дающий быстрейший рост продукции и производственных мощностей в нужном направлении в будущем, с обеспечением в необходимых размерах текущего потребления, определяемого в соответствии с потребностями общества.

Ясно, что в такой постановке задача перспективного планирования в принципе по характеру подобна задачам планирования краткосрочных вложений, рассмотренным в предыдущем параграфе, что наводит на мысль о возможности использования приведенного выше анализа. Однако грандиозный объем данной задачи, огромное количество требуемых исходных данных, необозримое число мыслимых производственных способов, трудность фактического получения сведений о них, необходимость предвидения дальнейшего развития технологии и организации производства, зависимость плана от ряда внеэкономических моментов, в особенности в части конечной продукции, не позволяют рассчитывать на непосредственное, буквальное применение к этой задаче описанной в § 1 схемы расчета и построения плана, а также связанных с ним оценок (к этому вопросу мы возвратимся ниже).

Однако, несмотря на это, главные черты решения задачи оптимального планирования во времени — наличие количественных оценочных характеристик оптимального плана, выясненное нами выше при анализе конкретных задач краткосрочного планирования, — должны сохраняться и в рассматриваемой гораздо более



сложной ситуации. В силу сказанного можно считать достаточно обоснованным положение, что оптимальному перспективному плану соответствует определенная динамика объективно обусловленных оценок, а также изменяющееся во времени значение единой нормальной эффективности капиталовложений.

Как и выше, возможны две формы их введения — динамическая система оценок, приведенных либо к одному периоду, либо к одной единице в каждый период с введением нормальной эффективности (зависящей от выбора этой единицы). При этом если оценки мало изменяются относительно друг друга, то для характеристики оптимального плана можно приближенно ограничиться указанием одной системы оценок для продукции и значений нормальной эффективности для перехода от каждого периода к следующему. Характеристика оптимального плана упростится еще больше, если можно нормальную эффективность считать постоянной.

Предполагая, что перспективный народнохозяйственный план намечен и основные экономические показатели (в частности, динамика о. о. оценок и величина нормальной эффективности) для него определены, покажем, как, исходя из этих показателей, можно анализировать эффективность отдельных капиталовложений и давать заключение об их целесообразности (ср. выводы 23–26).

Этот анализ особенно упрощается, если мы можем не учитывать динамику относительных оценок и строить (приближенно) расчет только с учетом значений нормальной эффективности. В большинстве приведенных ниже примеров принимается именно такое предположение, и более того, нормальная эффективность предполагается постоянной.]

**Примеры расчета эффективности вложений.** Покажем теперь на нескольких примерах долговременных вложений, как примерно может решаться вопрос об их целесообразности.

**ПРИМЕР 7<sup>8)</sup>.** Имеется два типа машин данной мощности. Для машины *A* начальные затраты — 500 тыс. руб., срок службы — 5 лет. Эксплуатационные расходы — 500 руб. в сутки. Для машины *B* начальные затраты — 1 млн руб., срок службы — 10 лет. В отношении эксплуатационных расходов машина *B* экономичнее машины *A* на 20%. Требуется определить, при каких условиях целесообразно применение той и другой машины, а также в каком случае имеет смысл заменить уже работающую машину *A* машиной *B*.

На первый взгляд представляется, что всегда предпочтительнее машина *B*, ибо капитальные затраты, рассчитанные на год, одинаковы в обоих случаях, а эксплуатационные расходы во втором случае значительно ниже.

Для более обоснованного решения вопроса произведем подсчет для нескольких значений нормальной эффективности.

Примем нормальную эффективность, равной 20% в год.

Подсчитываем годовую экономию. Она составит  $360 \times 500 \times 0,20 = 36$  тыс. руб. Далее, подсчитываем разницу во вложениях в течение 10 лет, приводя их к данному моменту. Вложения, если выбрать машину *B*, составляют 1 млн руб. Если остановиться на машине *A*, то они составят 500 тыс. руб. сегодня и столько же

---

<sup>8)</sup>В аналогичном примере (№ 6) в тексте 1942 г. говорится о двух типах котлов, работающих на торфе. Цифры в примере те же. (Прим. ред.)

через 5 лет, что, если привести к сегодняшнему дню, эквивалентно 250 тыс. руб. (так как 100 руб. сегодня при нормальной эффективности, равной 20%, отвечает 200 руб. через 5 лет[\*]), т. е. всего 750 тыс. руб.

Таким образом, экономия на вложении — 250 тыс. руб. Вложение такого объема позволяет получать при нормальной эффективности, равной 20%, ежегодную экономию 50 тыс. руб. Поэтому при такой нормальной эффективности ожидаемая экономия в 36 тыс. руб. недостаточна, следовательно, применение машины *A* правильное.

В случае, когда машина *A* уже работает и речь идет о ее замене более совершенной машиной *B*, затраты на сооружение первой машины *A* не нужны, и разница во вложениях составит 750 тыс. руб. Ясно, что такая замена чрезвычайно невыгодна при данной нормальной эффективности, равной 20%. Произведя такой же подсчет и для других значений нормальной эффективности [или алгебраический анализ] приходим к выводу, что решение поставленного вопроса зависит от значения нормальной эффективности. Именно:

1) Если нормальная эффективность больше 16%, то выгоднее применение машин типа *A*.

2) Если нормальная эффективность меньше 16%, но больше 6%, то для новых установок лучше применять машины типа *B*. Однако замена существующих и исправно работающих машин *A* на машины *B* нецелесообразна. Таким образом, хотя машина *A* «морально амортизирована», целесообразно продолжать ее использование там, где она имеется.

3) Если нормальная эффективность меньше 6%, то машину *B* надо применять не только при новых установках, но и заменять ею машину *A*.

В связи с этим примером заметим, что в результате недостаточного понимания роли нормальной эффективности часто пропагандировалось применение весьма сложного и дорогостоящего оборудования, дающего незначительную экономию труда или материалов. При этом если и подсчитывалась эффективность, то часто для нее получалось преувеличенное значение вследствие того, что стоимость оборудования при подсчете учитывалась неполно, не принималась во внимание дефицитность материалов и пр. Нередко обоснованием служило применение такого оборудования некоторыми передовыми предприятиями за границей, что никак не может считаться достаточным. Следует сказать, что действительная эффективность оказывалась еще ниже из-за неполного использования такого оборудования.

Далее, на том основании, что таким оборудованием оснащались новые предприятия, некоторые склонны были выдвигать требования немедленной замены и демонтажа прежних типов оборудования как «морально изношенных». Как показывает приведенный пример, одно заключение никак не может служить основанием для другого.

Следует, впрочем, сказать, что эти попытки отдельных хозяйственников встретили должный отпор со стороны центральных органов, и фактически демонтаж

---

\*[Более правильно было бы учитывать сложные проценты. Однако, приняв во внимание вероятность некоторого уменьшения нормальной эффективности с течением времени, мы получили бы примерно тот же результат.]

проводился в сравнительно небольших размерах. Нецелесообразность преждевременного демонтажа подтвердилась], в частности, во время Отечественной [уже в начале] войны, когда большая часть такого «устаревшего» и даже демонтированного оборудования была с успехом пущена в дело.

[Таким же образом в настоящее время, несмотря на переход к более прогрессивной тепловозной и электровозной тяге, обоснованно предусматривается использование в течение ряда лет имеющихся паровозов (преимущественно на линиях с менее интенсивным движением)].

Правильное решение подобных вопросов возможно лишь с учетом знания нормальной эффективности.]

**ПРИМЕР 8.** Имеется два проектных варианта моста: деревянного и каменного. Оба удовлетворяют техническим условиям.

Стоимость деревянного моста 1 млн руб., срок службы 10 лет, затраты на ремонт в среднем 20 тыс. руб. в год. Стоимость каменного моста той же грузоподъемности 2,5 млн руб., срок службы 50 лет, средние затраты на ремонт 5 тыс. руб. в год.

При каких условиях эффективнее тот или иной проект?

Подсчитаем затраты на год службы для того и другого варианта.

*Деревянный:*  $(1\,000\,000 + 10 \times 20\,000) : 10 = 120$  тыс. руб. на год.

*Каменный:*  $(2\,500\,000 + 50 \times 5\,000) : 50 = 55$  тыс. руб. на год.

Преимущество каменного моста кажется бесспорным.

В действительности вопрос не так прост, и его решение должно зависеть от размера нормальной эффективности.

Примем, например, нормальную эффективность, равной 10% в год. Сравним затраты: 1) на каменный мост за 10 лет; 2) на постройку в данный момент деревянного, эксплуатацию его и постройку через 10 лет каменного. В обоих случаях получим в смысле обеспечения потребности примерно одинаковый результат.

При сравнении затрат их нужно привести к данному моменту. Получим:

*для первого случая*

стоимость каменного моста ..... 2 500 000 руб.

затраты на ремонт по 5000 руб.,

приведенные к данному моменту\* ..... 35 000 »

Всего ..... 2 535 000 »

*для второго случая*

стоимость деревянного моста ..... 1 000 000 »

затраты на его ремонт по 20 000 руб.,

приведенные к данному моменту ..... 140 000 »

затраты через 10 лет на каменный мост 2 500 000 руб.,

приведенные к данному моменту ..... 1 250 000 »

Всего ..... 2 390 000 »

\* Эти затраты производятся в среднем через пять лет. А сумма 35 тыс. руб. сегодня равносильна 50 тыс. руб. через пять лет при нормальной эффективности, равной 10%. Более точный подсчет может быть сделан по сложным процентам.

При большем значении нормальной эффективности преимущества деревянного моста были бы еще значительнее. Таким образом, если нормальная эффективность равна 10% и выше, правильным будет в данный момент построить деревянный мост. Если сэкономленные сегодня 1,5 млн руб. будут, например, вложены в новую шахту, которую не удастся ввести в строй из-за недостатка средств, а эффективность вложения для шахты 40%, то полученная в результате этого дополнительная продукция за 10 лет в несколько раз превзойдет затраты, которые потребуются через 10 лет для постройки каменного моста.

Из этого примера мы отнюдь не собираемся делать вывод, что всегда следует строить деревянные мосты, а не каменные. Конечно, и соотношение в затратах может быть иным, а тогда по нашему расчету сооружение деревянного моста может и не оказаться более экономичным, и, главное, во многих случаях деревянный мост не будет удовлетворять тем же техническим условиям, что и каменный, а это может заставить отказаться от деревянного моста, даже если он и более экономичен. Однако в последнем случае, останавливаясь на варианте каменного [(металлического, железобетонного)] моста, надо учесть, что он менее экономичен (а не более, как показал первоначальный расчет), и следует сопоставить эти потери с его техническими преимуществами. Уместно сделать общее замечание о том, что увлечение без особой необходимости монументальными решениями, которыми страдают многие наши проектировщики, является вредным, так как это лишает нужных средств другие, более эффективные возможности вложений. Одной из причин таких неправильных решений был неверный экономический расчет, не учитывающий нормальной эффективности. [Отсутствие должного внимания к экономической стороне дела и неудовлетворительный ее анализ были, нам кажется, одной из причин излишеств в области архитектуры.

Поясним характер расчета эффективности по динамике оценок на следующем примере.

**ПРИМЕР 9.** Пусть требуется определить эффективность капиталовложения, направленного на расширение производственной мощности по некоторому изделию *A* на 100 тыс. единиц в год за счет оборудования нового цеха с определенным производственным процессом. Затраты на единицу изделия *A* в этом процессе составляют 10 единиц материала *B* и 10 дней труда. Требуется определить эффективность данного вложения, если нам известен общий оптимальный перспективный план и динамика соответствующих ему оценок. Они приведены в табл. 44.

Необходимо пояснить, что оценки в этой таблице даны с приведением к одному периоду (первому году). Таким образом, снижение оценки для труда отнюдь не означает снижения оплаты его. В действительности, так как оценки продукции снижаются значительно быстрее, чем оценки труда, то данные таблицы указывают, что предусматривается значительный рост производительности труда, а это, естественно, позволяет предполагать определенное повышение реальной зарплаты. Такое снижение оценки труда в действительности соответствует тому положению, что рационально произведенная затрата труда сегодня позволяет получить гораздо большую экономию труда в будущем, что заставляет выше оценивать единицу труда данного года по сравнению с последующими.

Отметим, что приведенная оценка оборудования цеха через 5 лет указывает не стоимость производства его в тот момент, а оценку использованного уже оборудо-

**Таблица 44**  
**Оценки, приведенные к данному году**  
**(в скобках — оценки для текущего года)**

Продукт или фактор	Г о д ы				
	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й
Изделие А (за единицу)	500	420 (503)	350 (507)	280 (465)	200 (380)
Материал В (за единицу)	10	8 (9,6)	6 (8,7)	4 (6,6)	3 (5,8)
Труд (на единицу)	20	18 (21,3)	16 (23,1)	14 (23,2)	12 (23,1)
Оборудование цеха (млн руб.)	70	-	-	-	15 (29)
Нормальная эффективность (в %)	20	20	20	15	15
Коэффициент приведения к первому году	1,0	0,83	0,69	0,60	0,52

вания с учетом его физического и морального износа. Напомним также, что для простоты мы считаем затраты для рассматриваемого технологического процесса постоянными.

Для подсчета эффективности, как указывалось выше, подсчитываем суммарный доход цеха, приведенный к данному моменту — первому году, за рассматриваемый период (5 лет). Вычитая из оценки продукции для каждого года затраты, суммируя и умножая на объем выпуска, имеем:

$$\begin{aligned}
 & 100\,000 \times [(500 - 10 \times 10 - 10 \times 20) + (420 - 10 \times 8 - 10 \times 18) + \\
 & + (350 - 10 \times 6 - 10 \times 16) + (280 - 10 \times 4 - 10 \times 14) + (200 - 10 \times 3 - 10 \times 12)] = \\
 & = 100\,000 \times (200 + 160 + 130 + 100 + 50) = 64 \text{ млн руб.}
 \end{aligned}$$

В то же время затраты на вложение составят 70 млн руб. — 15 млн руб. = 55 млн руб. Таким образом, расчет показывает оправданность данного вложения.

Аналогичный расчет мог бы быть произведен и с использованием оценок на каждый период с последующим приведением к одному периоду при помощи коэффициентов приведения или значений нормальной эффективности.

Отметим, что и здесь правильность расчета эффективности существенно связана с применением о. о. оценок. Так, если бы, например, вместо о. о. оценки производимого изделия, включающей в себя прокатную оценку использования оборудования, а также учитывающей соотношение потребности в нем с объемом производства, была бы взята обычным образом исчисленная себестоимость или построенная на ее основе цена, то результат расчета эффективности оказался бы совсем другим. Вложение могло бы показаться малоэффективным или совсем неэффективным.

Решение вопроса о целесообразности конкретного капиталовложения лишь в редких случаях может быть сделано на основании изолированного его рассмотрения; как правило, оно зависит от общей экономической обстановки и народнохозяйственного плана. В предыдущих примерах эта обстановка учитывалась использова-

Таблица 45

**Тип машин и эффективность их применения**

Тип машины	Число обслуживающих рабочих	Годовая производительность (в тыс. руб.)	Эксплуатационные расходы, кроме зарплаты (в тыс. руб.)	Срок износа (лет)	Стоимость (в тыс. руб.)	Выработка на одного работающего (в тыс. руб.)	Эксплуатационные расходы и зарплата		
							(в руб. на 1000 руб. продукции)		
<i>А</i>	10	800	60	5	800	80	200	200	400
<i>Б</i>	20	3200	60	20	8000	160	81	125	206

нием экономических показателей (нормальной эффективности и динамики оценок) общего народнохозяйственного плана. В других случаях увязка с общим планом может осуществляться посредством плановых заданий для данной отрасли (выпуск продукции, снабжение, размер средств на капиталовложения). Такая постановка вопроса может оказаться нереальной, если для народного хозяйства в целом мы еще не располагаем перспективным планом и указанной системой показателей (нормальная эффективность и о. о. оценки), либо если речь идет об улучшении ранее составленного плана отдельной отрасли. В таком случае оказывается нужным составить оптимальный план непосредственно для данной отрасли с учетом исходных заданий.

При построении такого плана внутренним образом определится система оценок или значение нормальной эффективности в пределах данной отрасли (группы предприятий). Эти оценки могут использоваться для корректирования внутриотраслевого плана. Кроме того, сопоставление этих показателей с аналогичными показателями для народного хозяйства в целом или для других отраслей (группы предприятий) может дать основание для пересмотра самих плановых заданий (перемещения программы и ресурсов).

Рассмотрим пример такого рода.]

**ПРИМЕР 10.** В данном экономическом районе в некоторой отрасли добывающей промышленности разработки производятся с помощью простейших средств. Число занятых рабочих — 2 тыс. человек. Годовая выработка одного рабочего 1 тыс. тонн руды, годовая зарплата — 10 тыс. руб. Цена тонны руды на месте — 20 руб., т. е. цена годовой продукции одного рабочего — 20 тыс. руб. Для увеличения добычи решено ее механизировать. Первоначальные средства для вложений отпускаются в размере 80 млн руб., в дальнейшем механизация должна идти за счет собственных накоплений отрасли. Количество работающих в отрасли сохраняется неизменным. Имеются два вида машин для механизации добычи: *А* и *Б*, данные о них приведены в табл. 45.

Какой тип машин следует выбрать для механизации работы? Как видно из этой таблицы, в отношении производительности труда, себестоимости продукции

машина *B* превосходит машину *A*; видимо, ей и следует отдать предпочтение. Однако такое решение вопроса будет поверхностным, так как игнорирует важнейший момент — объем вложений, связанных с машиной *B*. В данном случае нормальная эффективность не указана, но зато определен объем средств на вложения. Поэтому она определится сама собой.

Подсчитаем прокатную оценку и эффективность каждой машины. Для машины *A* имеем: 10 рабочих, обслуживающих машину при работе простейшими средствами, дали бы продукции на  $10 \times 20\,000 = 200$  тыс. руб. Таким образом, стоимость дополнительной продукции, производимой за счет механизации:

$$800\,000 - 200\,000 = 600 \text{ тыс. руб.}$$

Годовые расходы:

$$160\,000 + 60\,000 = 220 \text{ тыс. руб.}$$

(амортизация и эксплуатационные расходы, кроме зарплаты).

Чистая экономия (и прокатная оценка) в результате применения машины

$$A : 600\,000 - 220\,000 = 380 \text{ тыс. руб. в год.}$$

Эффективность вложения  $380\,000 : 800\,000 = 47\%$ .

Для машины *B* дополнительная выработка

$$3\,200\,000 - 400\,000 = 2,8 \text{ млн руб.}$$

Чистая экономия (прокатная оценка):

$$2\,800\,000 - 400\,000 - 60\,000 = 2340 \text{ тыс. руб.}$$

Эффективность вложения  $2\,340\,000 : 8\,000\,000 = 29\%$ .

Для простоты расчета мы не делали приведения к одному сроку службы, которое заставило бы несколько иным образом учесть амортизацию. Однако существенной разницы это бы не дало. Полученный результат показывает, что в данном случае правильно начать механизацию с внедрения машины *A*. Их удается приобрести 100 шт., что механизует труд половины работающих; оставшаяся тысяча рабочих будет продолжать добычу простейшими орудиями. Так как возможности более эффективного вложения в машину *A* не исчерпаны, нормальная эффективность будет 47%. Накопления за год (без учета амортизационных отчислений) составят

$$1000 \times 20\,000 + 100 \times 800\,000 - (2000 \times 10\,000 + 100 \times 60\,000) = 74 \text{ млн руб.}$$

Это позволит приобрести еще 90 машин *A* и вооружить ими рассматриваемую отрасль на 95%<sup>9)</sup>. <sup>ii)</sup> В следующий год накопления позволят приобретать машины *B*. С этого момента, когда возможности вложения в машину *A* будут исчерпаны, нормальная эффективность заменится на 29%. После этого начнется перевооружение отрасли более совершенной машиной *B*.

<sup>9)</sup> Это не совсем верно. Точное решение задачи приведено в сноске <sup>ii</sup> в конце главы. (Прим. ред.)

Начать прямо с внедрения машины *B* было бы неправильно. Мы смогли бы приобрести только 10 таких машин, а 1800 рабочих продолжали бы добычу простейшими орудиями. Накопления за год составили бы:

$$1800 \times 20\,000 + 10 \times 3\,200\,000 - (2000 \times 10\,000 + 10 \times 60\,000) = 47,4 \text{ млн руб.},$$

т. е. процесс перевооружения отрасли пошел бы гораздо медленнее, чем в первом случае. Нетрудно убедиться, что в результате и полное перевооружение отрасли машинами *B* в первом случае, т. е. начиная механизацию с машин *A*, произойдет быстрее, чем если бы сразу применили машины *B\**.

Рассмотрение этого примера показывает, что в условиях недостатка средств на вложения нельзя увлекаться особо крупными и производительными, но сложными и дорогостоящими агрегатами. Тот большой выигрыш в производительности труда, который получится там, где они будут применены, при одновременном использовании самых примитивных средств на многочисленных остальных участках, которые не удастся оснастить этой совершенной машиной, не сможет обеспечить ту же продукцию, которую дало бы повсеместное применение менее совершенной и производительной, но более дешевой машины. [При этом, как ясно из последнего произведенного расчета, такое последовательное осуществление механизации, начиная с менее капиталоемких агрегатов, обеспечивает не только больше продукции в ближайшие годы, но и более быстрый рост ее выпуска в будущем.] Конечно, этот качественный вывод не является всеобщим и должен в каждом случае проверяться результатами экономического расчета, производимого с учетом значения нормальной эффективности.

В рассмотренном примере капиталовложения на единицу продукции для машины *B* были выше, чем для машины *A*. Следует сказать, что если даже и в этом отношении крупный агрегат или предприятие окажется не хуже, чем средний, то это не всегда обеспечивает его предпочтительности. В частности, это вызывается тем, что с крупным предприятием связано большое число косвенных вложений, которые также необходимо учитывать при расчете. Таким образом, в данном вопросе приходится принимать во внимание следующие соображения.

1) Срок сооружения и ввода в строй крупного предприятия значительно больше, чем мелкого и среднего. Как это снижает эффективность вложения, мы видели выше при рассмотрении примера 2<sup>{10}</sup>.

---

\* Более точно расчет этого примера следовало бы провести, учитывая изменение с течением времени значений о. о. оценок и нормальной эффективности в соответствии с выводом 24. Однако в данном случае такое уточнение расчета не повлияло бы заметно на результаты анализа. Существенно также более правильный учет амортизации. Здесь она была принята пропорциональной стоимости вложения. При более точном расчете, если имеются необходимые данные, амортизацию нужно включать в расчет по планируемым затратам на капитальный ремонт и реновацию по срокам их осуществления, приводя их к одному моменту (ср. замечание 3, стр. 247).

<sup>{10}</sup> {Характерный пример приведен в докладе тов. Молотова на XVIII съезде партии: «Как пример того, к чему ведет гигантомания, можно привести Фрунзенскую теплоэлектроцентраль в Москве. Станция была запроектирована как гигант — мощностью 200 тыс. кВт, а первая очередь в 100 тыс. кВт. Строится она с 1932 г. и все же до сих пор не достроена. Возьмись мы за это дело поскромнее, начни строить не одну, а несколько небольших теплоэлектроцентралей, скажем, по 20–25 тыс. кВт, и мы бы теперь имели две-три теплостанции законченными. Таких уроков у нас немало». (XVIII съезд, Стенографический отчет. — С. 303.)}



[Кроме того, более поздний срок вступления в строй крупного предприятия не позволяет покрыть потребность в данной продукции в ближайшие годы, когда нужда в ней может быть наиболее острой, а ее о. о. оценка особенно высока.]

2) В то время как мелкое и среднее предприятия могут в течение некоторого времени работать, опираясь на существующую инфраструктуру (электроснабжение, транспортную сеть, жилой фонд, коммунальную сеть и пр.), крупное предприятие требует одновременно и крупных вспомогательных вложений.

3) Крупным предприятиям или агрегатам трудно постоянно обеспечивать полную загрузку (например, для мясокомбинатов в некоторые периоды, для отдельных гидростанций), труднее освоить проектную мощность, а при неполной загрузке их эффективность резко падает.

4) Связанные с крупными предприятиями большие перевозки при высокой о. о. оценке транспорта значительно повышают себестоимость продукции, а тем самым снижают их эффективность.

5) [Так как срок реализации достигаемого экономического эффекта для крупного предприятия обычно более длителен, труднее учесть те изменения в обстановке и технологии, которые могут произойти в течение этого срока (возможность уменьшения потребности в данном виде продукции, появление новой технологии для данного или заменяющих его видов продукции и т. п.).]

С учетом главным образом этих соображений [в свое время были приняты] {связаны} решения XVIII Парт. съезда, осуждающие гигантоманию {и фиксирующее внимание на строительстве мелких и средних предприятий}. Экономический расчет, опирающийся на нормальную эффективность, [подтвердил бы справедливость этих выводов в тот момент и дал бы] {подтверждает справедливость этих решений, а главное, дает} средства расчета для наиболее правильного выбора размера предприятия.

[Расчет эффективности данного капиталовложения и заключение о его целесообразности согласно выводам 25–26 может строиться на основе динамики народнохозяйственных оценок, если изменения, связанные с включением этого вложения, настолько невелики, что не влияют существенно на систему о. о. оценок и ее динамику. В ряде случаев, однако, оказывается, что включение в план данного конкретного вложения в тех размерах, которые являются для него естественными, влияет существенно, если не на все народное хозяйство в целом и всю систему оценок, то на положение какой-либо отрасли, производство какого-либо продукта вообще или в определенном экономическом районе, и соответственно на значения некоторых о. о. оценок. Так, создание нового крупного производства некоторого изделия в определенном районе может заметно изменить затраты, соотношение баланса по нему, а также значение его о. о. оценки. Сказанное в первую очередь относится к тем случаям, когда данное вложение по своему характеру не может быть раздроблено: крупная гидростанция, канал, оросительное сооружение, новая железная дорога и т. п.]

Поэтому в расчетах по таким крупным капиталовложениям нельзя исходить непосредственно из имеющейся системы оценок, а необходимо так или иначе учитывать те изменения, которые внесет в нее включение в план самого вложения. Здесь требуется, собственно, сопоставление оптимального плана в первоначальном виде с измененным оптимальным планом, включающим это вложение.

Таблица 46

## Грузопотоки и экономия

Вид груза	Объем перевозок в сутки (вагонов)	Народнохозяйственная экономия на один вагон (руб.)	Чистая экономия		
			на один вагон (руб.)	Для всего грузопотока в сутки (руб.)	в год (млн руб.)
I	100	2000	1800	180 000	64,8
II	200	1100	900	180 000	64,8
III	300	500	300	120 000	43,2
IV	200	400	200	40 000	14,4
V	200	300	100	20 000	7,2

Обычно при этом нет надобности заново составлять весь план, а можно ограничиться лишь учетом тех моментов, которые данное вложение затрагивают в наибольшей степени, а также учетом некоторых изменений оценок связанных с ними факторов и продуктов, пользуясь для остальных прежними их значениями. Некоторое представление о подобном расчете может дать следующий пример.]

ПРИМЕР 11. Рассматривается вопрос о строительстве железной дороги, соединяющей два пункта *A* и *B*. При однопутной колее пропускная способность дороги составит 600 вагонов в сутки, стоимость полотна и подвижного состава 350 млн руб.; для двухколейной — пропускная способность 1 тыс. вагонов в сутки, полная стоимость 480 млн руб. В обоих случаях себестоимость перевозки — 200 руб. за вагон, срок строительства — один год. Нормальная эффективность — 30% в год.

Для выбора варианта дороги нужно оценить грузопотоки, которые она будет обслуживать в первые годы. Эти грузопотоки даны в табл. 46. Там же подсчитана экономия, которую даст появление дороги. В третьем столбце указана экономия, получаемая другими отраслями народного хозяйства благодаря возможности перевозки одного вагона груза по железной дороге, в четвертом — чистая экономия (за вычетом себестоимости перевозки).

Так, I вид грузов в настоящее время фактически перевозится автотранспортом с затратой 2000 руб. на перевозку в объеме одного вагона; при переводе этого груза на проектируемую железную дорогу чистая экономия составит  $2000 - 200 = 1800$  руб. на вагон. Всего, если дорога будет построена в одну колею, пропускная способность позволит обеспечить перевозку грузов первых трех видов и получить годовую экономию  $64,8 + 64,8 + 43,2 = 172,8$  млн руб. Стоимость дороги — 350 млн руб., но к моменту ее вступления в эксплуатацию она возрастет на 30%, т. е. составит 455 млн руб., учитывая, что строительство займет год. В соответствии со значением нормальной эффективности годовая экономия при таком вложении должна быть не меньше  $455 \times 0,30 = 137$  млн руб. Подсчет экономии говорит о том, что вложение вполне оправданно.

Двухколейная дорога позволила бы осуществить перевозку еще и IV и V грузов, что дало бы дополнительную экономию в  $14,4 + 7,2 = 21,6$  млн руб. в год.

Дополнительные вложения, которые потребуются, составят 130 млн руб., что к моменту открытия дороги следует учитывать как 169 млн руб. Народнохозяйственная экономия такого вложения при нормальной эффективности, равной 30%, должна быть не меньше 50 млн руб., а ожидается в размере только 21 млн руб. Поэтому ясно, что немедленное строительство второго пути нецелесообразно. Оно может стать оправданным в будущем, например, увеличится объем предъявляемых к перевозке грузов или снизится нормальная эффективность, когда возможности более эффективных вложений будут исчерпаны.

[Впрочем, правильно было бы произвести расчет более полно и наряду с рассмотренными возможностями использования железной дороги, учитывающими уже функционирующие производства, принять во внимание и те новые производства, которые станут эффективными после вступления в эксплуатацию этой дороги, и подсчитать тот дополнительный доход, который они смогут дать сверх нормальной эффективности. При этом такой ориентировочный расчет должен быть произведен не только за данный год, но и на ближайшие следующие годы. И тогда с учетом этих дополнительных грузов строительство вторых путей могло бы оказаться оправданным уже сейчас или через более короткий срок.

Отметим, что вообще при оценке эффективности крупных неделимых объектов капиталовложений мы считаем оправданным включение в расчет и тех сопутствующих вложений, которые становятся эффективными благодаря данному основному объекту. Это может в ряде случаев обоснованно повысить значение эффективности последнего, так как к его экономическому эффекту добавится эффект сопутствующих вложений в той части, в которой он превосходит нормативный.]

Мы говорили выше, что хотя нормальная эффективность имеет совершенно иную природу, чем норма прибыли в капиталистическом обществе, они могут быть сопоставлены в том отношении, что и та и другая определяют решения в вопросах размещения средств в капиталовложениях. [Необходимо, однако, подчеркнуть коренное, принципиальное отличие нормальной эффективности от нормы прибыли по ее происхождению, социальным проявлениям и роли в экономике.

Первая определяется объективным плановым расчетом и представляет объективный количественный показатель одной из закономерностей социалистической экономики, сознательно применяемый в экономическом расчете и планировании и позволяющий выявить наиболее эффективные варианты использования капиталовложений в народном хозяйстве для достижения быстрейшего роста производительности труда.

Вторая возникает на рынке капитала в процессе погони за максимальной прибылью, представляет собой количественное выражение закона усреднения нормы прибыли, стихийно складывающееся в процессе капиталистической конкуренции и регулирующее распределение прибавочной стоимости между различными группами капиталистов. Она проявляется в перекачке капиталов из одной отрасли в другую и не только не обеспечивает эффективного использования труда, а наоборот, связана с перепроизводством, постоянно возникающими диспропорциями, кризисами и сдерживает развитие производительных сил.]

Коренные различия между нормальной эффективностью и нормой прибыли не только принципиальные, качественные, но, что важно подчеркнуть, и количествен-

ные, сказывающиеся на результатах расчета и на получаемых выводах. Это станет наглядным из анализа рассмотренного примера.

Предположим, что вопрос о строительстве железной дороги при тех же условиях рассматривал бы предприниматель или акционерное общество в капиталистическом государстве, и пусть норма прибыли такая же, как и нормальная эффективность — 30%. Принципиальное различие в расчете состоит в том, что предприниматель подсчитывал бы не народнохозяйственную экономию, получающуюся в результате вложения, которая его мало интересует, а ту прибыль, которую он выручит, осуществив его. Размер этой прибыли зависит от избранного тарифа. Самый высокий тариф, при котором однопутная дорога будет полностью загружена, это 600 руб. Тогда прибыль на каждом перевезенном вагоне составит  $600 - 200 = 400$  руб., а всего за год  $600 \times 400 \times 360 = 86,4$  млн руб. в год. Вложение в 455 млн руб. при норме 30% должно принести 137 млн руб. прибыли в год, таким образом, вложение окажется для частного капитала невыгодным.

Любопытно, что несколько большую прибыль даст другой тариф — 1100 руб. При таком тарифе будут оправданы перевозки только I и II грузов (300 вагонов в сутки), т. е. дорога будет загружена всего на 50%, но прибыль окажется большей и составит 900 руб. на вагон или  $300 \times 900 \times 360 = 97,2$  млн руб., но этого, однако, недостаточно[\*]. Попутно заметим, что это один из нередких примеров экономического уродства в капиталистическом обществе, где вполне возможна ситуация, при которой дорога недогружена и есть грузы, перевозка которых целесообразна, но не производится, так как при завышенном (монопольном) тарифе она невыгодна, а нормальный тариф снизит прибыль владельца дороги.

Приведенный пример является характерным. Большое число возможных вложений в капиталистическом обществе, являющихся эффективными для хозяйства (даже с учетом существующей нормы прибыли), не реализуется, так как рамки частной собственности не обеспечивают возможности фактического извлечения всего народнохозяйственного эффекта в виде прибыли — единственной формы проявления эффекта, в которой и заинтересован капиталист. Это относится, прежде всего, к различным социально-культурным мероприятиям, а также к таким крупным сооружениям, как дороги, каналы, крупные гидростанции, жилищное строительство, оросительные системы, лесонасаждение и пр.

[Более того, при наличии и народнохозяйственной потребности в увеличении производства многих товаров и возможностей для этого они в условиях капита-

---

\*[Так группа английских инженеров, характеризуя советскую металлургическую промышленность, пишет в своем отчете, опубликованном в журнале «Стил ревью»: «Своим успехом эта промышленность во многом обязана также одному фактору, который можно считать явно уникальным. Металлургическая промышленность в России явно планировалась. Советской сталеплавильной промышленности на протяжении целого периода был обеспечен готовый выход для ее продукции и всегда имелся стимул как внутренний, так и внешний, заставляющий стремиться к максимальному развитию производства и максимальной производительности. Капитал, необходимый для новых сооружений, поступает беспрепятственно, и рост сталеплавильных заводов сопровождается предоставлением всех транспортных возможностей, а также энергии и сырья. В таких условиях каждому агрегату гарантирована полная загрузка, и при таком сочетании обстоятельств эти блестящие достижения можно считать естественным результатом». (См. «Коммунист». — 1958. — № 6. — С. 83).]

лизма во многих случаях фактически не реализуются, так как соответствующие товары не находят сбыта из-за недостаточной покупательной способности населения. Такое положение в условиях социализма исключено<sup>[\*\*]</sup>.

Таким образом, при численном равенстве нормальной эффективности и нормы прибыли многие возможности вложений, являющихся невыгодными при капиталистической системе, не дающими достаточной прибыли, могут оказаться целесообразными при социализме, т. е. обеспечивать эффективность выше нормальной.

Следует сказать, что многими этот важный тезис трактовался расширительно. Именно, что в капиталистическом обществе возможные вложения ограничиваются только теми, которые обеспечивают получение прибыли не меньше нормальной, а в социалистическом обществе оправданно всякое вложение, дающее экономию труда. Конечно, в таком виде этот тезис неверен, так как не учитывает того, что средства на вложения ограничены, и нужно находить их наилучшее применение. Кроме того, он и практически вреден, так как может привести к омертвлению средств в малоэффективных объектах.

[Возвращаясь к рассмотренному примеру, нужно отметить еще одну особенность, связанную неделимым вложением. Именно, его осуществление позволяет во многих случаях удовлетворить не только наиболее острые нужды в данном виде продукции или услуг, но и менее важные, эффект от удовлетворения которых сам по себе не оправдывал бы подобного вложения. Поэтому при удовлетворении и этих нужд (если оно целесообразно) прокатная оценка для осуществленного вложения, определенная с учетом таких малоэффективных его применений, может оказаться весьма небольшой, а иногда, если возможности его использования практически неограниченны (канал, мост и т. п.), даже нулевой. Несмотря на это, соответствующее вложение может обеспечивать, как мы видели, необходимую эффективность, если учитывается его полный народнохозяйственный эффект.

Поэтому было бы ошибкой пытаться эффект такого вложения (соответствующий нормальной эффективности) реализовать непосредственно на месте за счет повышения прокатной оценки, включения прокатной оценки в продукцию и т. п., так как это воспрепятствовало бы получению всего достижимого эффекта<sup>[\*]</sup>. То есть в подобных случаях хозрасчетный подход в реализации эффекта капиталовложения непригоден.

Капиталовложения в социалистическом обществе должны оправдываться не непосредственным эффектом для той отрасли, куда они сделаны, а эффектом для народного хозяйства (или экономического района) в целом. Попутно отметим, что

---

<sup>\*\*</sup>[Мы не учитываем здесь возможности применения дифференцированных тарифов для разных грузов.]

<sup>\*</sup>[Характерный пример этого — принцип построения цен на книги в СССР. Несмотря на большую зависимость себестоимости от тиража, книги одной категории продаются у нас примерно по одной и той же цене (в расчете на 1 лист) независимо от тиража. Это объясняется тем, что вопрос об издании книги у нас обычно не решается соображениями доходности. Например, народнохозяйственный эффект от издания учебной, технической, научной книги определяется в основном не суммой, вырученной от ее продажи, а ее полезностью. Если же вопрос об издании уже решен и, следовательно, можно исключить из затрат авторский гонорар, редакционно-издательские расходы и оплату набора, то себестоимость экземпляра книги мало зависит от тиража.]

и объем капиталовложений в данную отрасль не обязательно связывать с накоплениями, созданными в ней самой.]

**Уровень нормальной эффективности.** При равной степени хозяйственного развития и одинаковом объеме средств на вложения в социалистической экономике имеется гораздо больше возможностей их реализации с высокой эффективностью, чем при капитализме, где рамки частной собственности сдерживают развитие производительных сил. Ввиду этого уровень нормальной эффективности в социалистической экономике должен быть намного выше, чем норма прибыли в капиталистической при той же степени экономического развития. В связи с этим некоторые типы машин, используемые в капиталистических странах и обеспечивающие там достаточную прибыль, применять в социалистическом хозяйстве нецелесообразно вследствие наличия других возможностей вложений с еще большей эффективностью, не реализуемых при капитализме.

[Необходимо подчеркнуть, что, говоря об эффективности капиталовложений, мы имеем в виду их эффективность, рассчитанную по о. о. оценкам, а не на основе действующих цен или себестоимостей. Переход к о. о. оценкам коренным образом меняет привычные представления о рентабельности и эффективности, давая иную меру продукции и объему капиталовложения. Меняется и относительная эффективность. Вложения, эффективные по обычной калькуляции, могут при расчете по о. о. оценкам оказаться в действительности неэффективными, может оказаться и наоборот.

В частности, при правильном расчете (по о. о. оценкам) рациональные вложения в тяжелую промышленность оказываются не менее эффективными, чем вложения в легкую промышленность[\*]. Таким образом, тезис о том, что установление высокого уровня эффективности воспрепятствует вложениям в тяжелую промышленность, является бездоказательным. Тем более что, как мы уже не раз говорили, направления капиталовложений и распределение средств между отраслями определяются в основном программным заданием по конечной продукции, а расчет эффективности служит лишь для выбора системы решений, оптимально реализующей это задание.]

Наличие огромных дополнительных возможностей для эффективных вложений, открывающихся при социализме, говорит о способности социалистической экономики к более быстрому росту, чем капиталистической даже в периоды ее «процветания». Об этом же свидетельствуют невиданные темпы роста промышленного

---

\*[Так, при расчете годовой прокатной оценки (ренты с оборудования) металлургического комбината (стр. 226), мы получили для нее значение  $12 \times 99\,000\,000 = 1188$  млн руб. Если стоимость (о. о. оценка) строительства комбината составляет 3 млрд руб. или, если с учетом срока строительства принять ее равной 4 млрд, то эффективность его  $1188 : 4000 = 29,7\%$ . Таким же образом электростанция, требующая 1 млрд руб. капиталовложений (включая вложения в смежные отрасли) и отпускающая 5 млрд кВт·ч электроэнергии в год с себестоимостью кВт·ч 9 коп., если расчет производить исходя из цены 10 коп. за кВт·ч, будет иметь эффективность  $0,01 \times 5 : 1 = 5\%$ . Если же о. о. оценка электроэнергии, установленная с учетом ее эффекта у потребителей, а также значительного объема ее производства на менее совершенных электростанциях, будет равна, скажем, 18 коп. за кВт·ч, то эффективность этого вложения составит уже 45%; если по о. о. оценкам стоимость электростанции окажется даже выше, скажем 1,5 млрд руб., то эффективность все же будет 30%.]

производства<sup>{11}</sup> [в большинстве отраслей, который был достигнут у нас как в годы довоенных пятилеток, так и после войны, и в особенности тот рост, который намечен на предстоящее семилетие контрольными цифрами].

Потенциально возможный рост может фактически быть достигнут только при научно-обоснованных методах планирования и стимулирования реализации плана. Это подтверждается тем фактом, что в некоторых отраслях, где руководство было слабым {или действовали вредители}, в течение ряда лет был незначительный рост {или они топтались на месте}. Но и о тех отраслях, где рост производства был достаточно быстрым, никак нельзя с уверенностью сказать, что там были использованы все возможности, которые открывают самый прогрессивный способ производства — социалистический. Применение более совершенной методики планирования могло бы обеспечить еще больший рост. [Об этом говорят, в частности, те результаты, которые приносит перестройка управления промышленностью, связанная с образованием экономических районов.]

Нужно сказать, что хотя задолженность средств на капиталовложения в какой-то мере качественно и учитывалась, известное внешнее сходство расчетов по эффективности с процентами на капитал отпугивало от количественного учета этого основного фактора<sup>iii</sup>, и вопрос об эффективности вложений начал более или менее серьезно обсуждаться лишь в последнее время]. Между тем никаких реальных оснований для такой боязни нет. Введение таких расчетов в практику планирования будет способствовать только росту производительных сил и не может изменить природы социалистического строя, {так же как введение званий генерала и полковника не изменило природы Красной армии, а только усилило ее организацию}. Высокий уровень нормальной эффективности является объективной характеристикой наших огромных возможностей развития производительных сил, а поэтому следует {не отрицать само существование нормальной эффективности, а} говорить о ней во весь голос.

<sup>{iv}</sup>[Несомненно, что нормальная эффективность в СССР, в силу большой нужды в капиталовложениях, больших возможностей их весьма эффективного применения, с одной стороны, и недостаточностью средств для них, поскольку приходилось ограничиваться внутренними накоплениями, с другой, во все годы восстановления, индустриализации, довоенных пятилеток должна была бы в несколько раз превосходить значение нормы прибыли в капиталистических странах и в дореволюционной России. В период Великой Отечественной войны она должна была быть еще выше, поскольку требовались большие затраты на перебазирование и перепрофилирование промышленности, на восстановление разрушенных районов при крайней скудности средств на вложения, ввиду необходимости направлять основную часть продукции на нужды фронта.

Также высоким должен был оставаться уровень нормальной эффективности и в период послевоенного восстановления. В дальнейшем, с одной стороны, были удовлетворены самые неотложные нужды и осуществлены некоторые наиболее эффективные вложения. С другой стороны, появившиеся возможности направ-

---

<sup>{11}</sup>{в годы Сталинских пятилеток. Однако высокие темпы роста не обеспечиваются автоматически, сами собой.}

лять на капиталовложения значительные средства, благодаря росту накоплений, как результату развертывания производства и отсутствия у нас непроизводительного потребления паразитических классов, должны были привести к известному снижению значения нормальной эффективности, делая оправданными вложения не в столь быстро окупаемые объекты. В то же время быстрый прогресс современной техники, перестройка ряда отраслей на основе автоматизации, открывающие возможности исключительно эффективных капиталовложений, дающих при сравнительно небольших затратах резкий рост производительности труда, ведут к повышению уровня нормальной эффективности. Это позволяет считать, что значение нормальной эффективности продолжает оставаться у нас довольно высоким.

Мы воздержимся даже от приблизительного указания уровня нормальной эффективности в настоящее время, так как это требует сбора и анализа соответствующих данных, но мы надеемся вернуться к этому вопросу.

Установление определенного уровня нормальной эффективности означает, что, как правило, все вложения с большей эффективностью должны осуществляться, а с меньшей реализоваться не должны. Однако в плановой практике положение о единой норме эффективности не применялось достаточно последовательно. Нередко длительное время не осуществлялись вложения с весьма высокой эффективностью, заведомо превосходящей нормальную.]

В то же время был осуществлен ряд крупных вложений, для которых калькуляция показывала весьма невысокую эффективность {5–10%}. Относительно таких вложений следует сказать, что для многих из них правильный расчет с учетом о. о. оценок продукции, отражающих ее значимость и потребность в ней, показал бы реальную, значительно более высокую эффективность этих объектов как в момент их строительства, так и в последующие годы. Такие вложения (например, Магнитогорский комбинат) блестяще оправдали себя. Другие, эффективность которых и по правильному подсчету оказалась бы такой же низкой, были неоправданны (гиганты пищевой промышленности, некоторые гидроэлектростанции др.).

Следует сказать, что высокое значение нормальной эффективности не всегда учитывалось планирующими органами. В основном, именно с этим связано омертвление средств в многолетних и малоэффективных стройках {, частично возникавшее и в результате вредительства}. Правильный экономический расчет, учитывающий высокую нормальную эффективность, помог бы и здесь и дал бы возможность [вскрыть] {вовремя разоблачить} вред таких планов.

Следует остановиться еще на одном вопросе, решение которого без учета нормальной эффективности приводит к значительным потерям. Это распределение средств между долговременными и краткосрочными вложениями.

В то время как на долговременные вложения часто выделялись средства даже при небольшой их эффективности, порядка 5–10% в год, оборотные средства предприятий крайне урезались, что препятствовало созданию нормальных заделов, нормального запаса материалов, обеспечивающего бесперебойную работу, реализации многочисленных усовершенствований производства, требующих даже сравнительно небольших затрат. В результате из-за отсутствия необходимых средств, денежных или материальных, здесь оставалось нереализованным большое число возможных вложений с эффективностью 10–20% в месяц. Об одном из этих моментов, именно



об обеспечении нормального задела, мы говорили выше при рассмотрении примера 5. {<sup>v</sup>} [Систематический учет нормальной эффективности способствовал бы более своевременному устранению узких мест и диспропорций. Он позволил бы] {Это позволит} в первую очередь направить вложения именно на наиболее отстающие участки, сдерживающие развитие остальных, на ликвидацию диспропорций между отраслями, на рост тех отраслей, в продукции которых ощущается особенно острый недостаток, так как именно в таких случаях эффективность, найденная с учетом о. о. оценок, должна оказаться особенно высокой\*.

{<sup>vi</sup>} [Подобного рода соображения имели определенное значение на практике при распределении средств на вложения. Однако подкрепление качественных соображений научно-обоснованным анализом и расчетом способствовало бы более рациональному использованию средств.]

Резюмируем наши заключения.

**Вывод 27.** При решении вопросов о целесообразности долговременных вложений сохраняет силу принцип сравнения их эффективности с нормальной. Однако, в отличие от кратковременных, при расчете долговременных вложений необходимо, что существенно, принимать во внимание изменения в соотношении о. о. оценок и нормальной эффективности в период действия вложений. Этот учет может и должен производиться, только исходя из намечаемых общих решений политического и экономического характера на этот период.

**Вывод 28.** Нормальная эффективность принципиально отличается от нормы прибыли при капитализме, хотя и та и другая связаны с вопросом о капиталовложениях. Результаты расчета, исходящего из нормы прибыли, и расчета по нормальной эффективности также существенно различаются.

При равной степени развития капиталистического и социалистического хозяйств капиталистическая норма прибыли ниже нормальной эффективности социалистической экономики, что связано с неограниченными возможностями развития производительных сил в социалистическом обществе.

{<sup>vii</sup>}<sup>12)</sup> **Нормальная эффективность и оценки продукции.** В главах I и II, рассматривая задачу оптимального текущего планирования, мы в известной мере отделили ее от задачи перспективного планирования. Такой подход при допущениях, которые были там приняты (фиксированные объемы ресурсов, в частности, производственных мощностей, более или менее точные задания по составу конечной продукции и движению запасов и др.), представляется правомерным. Это подтверждается тем, что проведенный анализ оказался достаточно содержательным. Он

\*Так, например, пусть для загруженной дороги прокатная оценка перевозки составляет 850 руб. за вагон. Пропускную способность дороги лимитирует один узел. Реконструкция узла с вложениями в 10 млн руб. позволяет повысить пропускную способность всей дороги на 100 вагонов в сутки. Экономия, достигаемая благодаря вложению, составит  $360 \times 850 \times 100 = 40,6$  млн руб., а его эффективность — порядка 400% в год. Это исключительно эффективное мероприятие без учета о. о. оценки перевозки, определяющей его насущную необходимость и своевременность, могло потонуть в ряду других, быть может, важных и нужных мероприятий и, при недостатке средств, оказаться неосуществленным. (Содержание этого примечания размещено внутри основного текста 1942 г. *Прим. ред.*)

<sup>12)</sup> Весь дальнейший текст книги относится к 1959 г. (*Прим. ред.*)

позволил прийти к полезным экономическим показателям — о. о. оценкам, характеризующим относительные затраты и эффективность производственного использования разных видов продукции и ресурсов для данного момента в оптимальном плане.

Однако такое рассмотрение является неполным. План данного периода, если его не ограничивать столь жесткими условиями, связан с другими периодами. Производственные мощности, которыми мы располагаем, зависят от результатов деятельности в предыдущие периоды, а производственные результаты данного периода определяют ресурсы следующего. Сама программа текущего периода в значительной мере направлена на производство средств производства, которые предназначены для использования в будущем. Таким образом, если в задачи текущего планирования на данный период включить и построение программного задания, то ее решение будет уже невозможным без учета перспективного плана, то же самое относится и к движению запасов.

В свою очередь в перспективном планировании при выборе объектов капиталовложений наряду с общими направлениями экономического развития играют роль результаты анализа состояния экономики и данных текущего плана — выявление потребности в отдельных видах продукции или производственных мощностях, оценка необходимых затрат при том или ином способе их изготовления.

Показатели текущего и перспективного оптимального плана также взаимосвязаны. Анализ этой связи позволяет глубже понять характер и смысл о. о. оценок. Так, если сами значения оценок в данный момент могут быть установлены при анализе текущего плана, то их динамику и тенденции можно вскрыть, только привлекая перспективный план.

В главе II мы указывали, что о. о. оценки продукции должны существенно отличаться от себестоимости, которая отражает в основном лишь непосредственные затраты труда и игнорирует косвенные. Это отличие связано, прежде всего, с учетом в о. о. оценках ренты при использовании ограниченных природных ресурсов и прокатной оценки при использовании дефицитного оборудования. Если ограниченные природные ресурсы используются в производстве далеко не всех видов продукции, то оборудование требуется почти всегда, а следовательно, в оценку продукции необходимо систематически включать прокатную оценку. При этом, когда мы говорим о таком исправлении ценообразования, речь вовсе не идет о каком-то подтягивании уровня цен на средства производства к ценам на предметы потребления (уровня цен на них, в особенности розничных, мы вовсе не затрагиваем). Речь идет в основном о целесообразности таких изменений в соотношениях цен на различные средства производства, которые обеспечат их полное соответствие народнохозяйственным затратам.

Размер прокатной оценки оборудования определяется всей конкретной обстановкой и выявляется при составлении оптимального текущего плана. Однако привлечение перспективного плана и анализа капиталовложений к рассмотрению этого вопроса дает возможность сделать некоторые важные общие выводы.

Если прокатная оценка некоторой машины настолько велика, что вложения в нее оправданны даже с учетом действующей нормы эффективности, то изготовление таких машин в оптимальном плане будет увеличено. Поэтому о. о. оценка соответствующей продукции и прокатная оценка машины снизятся. В результа-

те эффективность дальнейших вложений в эту машину будет уменьшаться и со временем не превзойдет нормальную, что, как правило, будет свидетельствовать о ненужности дальнейшего расширения ее производства. Тогда значение прокатной оценки данной машины следует считать нормальным. Это нормальное значение равно той доле стоимости изготовления данной машины, которая соответствует величине нормальной эффективности.

Таким образом, мы приходим к первому принципиальному выводу, что необходимость учета в числе затрат прокатной оценки оборудования представляет собой не случайное явление, вызванное временной дефицитностью того или иного вида оборудования, подлежащей вскоре устранению. Напротив, она определяется постоянно действующим реальным экономическим фактором ограниченности средств на капиталовложения по сравнению с возможными объектами их применения, количественной характеристикой которого служит нормальная эффективность. Мы пришли и ко второму принципиальному заключению — размер прокатной оценки в какой-то мере обусловлен значением нормальной эффективности, точнее, им определяется та средняя (нормальная) величина прокатной оценки, к которой она, как правило, должна приближаться. Это нормальное значение равно  $nK$ , где  $n$  — нормальная эффективность,  $K$  — объем капиталовложений в данную машину.

Прокатная оценка (приходящаяся на единицу продукции) входит в оценку продукции, а потому значение последней (в среднем) будет приближаться к некоторой величине, которую можно назвать *нормальной оценкой*. Нормальная оценка продукции включает, помимо непосредственных затрат, долю (соответствующую значению нормальной эффективности) капиталовложений, связанных с данным производством и приходящихся на единицу продукции. Иначе говоря, нормальная оценка единицы продукции определяется формулой  $p = C + nK_{уд}$ , где  $C$  — себестоимость, а  $K_{уд}$  — удельные капиталовложения. При этом имеется в виду, что оценки используемых материалов, сырья и т. д. были построены по тому же принципу; по тем же оценкам должен быть исчислен и объем капиталовложений. Эта нормальная оценка по своей структуре напоминает цену производства, но принципиально отличается от нее тем, что вместо нормы прибыли включает нормальную эффективность, показатель совершенно иной социальной природы.

При наилучшем распределении средств на вложения, при постоянном значении нормальной эффективности и постоянном составе конечной продукции о. о. оценки должны приближаться к указанным нормальным их величинам. Эта нормальная оценка сама изменяется, если меняется нормальная эффективность или появляются новые технологии. В этом отношении она также в известной мере напоминает цену производства.

Однако в реальном оптимальном плане значения о. о. оценок должны систематически отклоняться от этих нормальных значений. Помимо того, что указанные выше условия, например, неизменность величины нормальной эффективности\*, как правило, не соблюдены, имеется ряд причин как постоянных, так и временных,

---

\*Последнее обстоятельство, а также сложная взаимозависимость нормальных оценок делает далеко не простым само понятие системы нормальных оценок, а также метод их исчисления. Мы воздержимся от уточнений в этом вопросе, а также не будем останавливаться на видоизменении понятия нормальной оценки в случае переменной нормы эффективности.

преходящих, но реально систематически действующих, которые вызывают значительные отклонения о. о. оценок от их нормальных значений.

Постоянными причинами таких отклонений являются следующие:

1) Ограниченность особо благоприятных природных ресурсов, различия в эффективности их использования и необходимость учета этого путем включения в затраты ренты, что отклоняет оценки той продукции, производство которой связано с использованием природных ресурсов (уголь, нефть, руда, лесоматериалы, зерно, хлопок и т. д.), от нормальных оценок.

2) Разница в динамике относительных оценок разных видов продукции, в частности, например, относительное повышение оценки труда вызывает наибольшее повышение оценок тех видов продукции, производство которых требует значительных затрат живого труда.

3) Особенности оценок продукции, производимой с использованием крупных единичных вложений, не допускающих по своему характеру дробления (оронительные и судоходные каналы, мосты, железные и шоссеиные дороги, гидростанции и пр.). В этом случае в о. о. оценки услуг или продукции произведенное вложение может включаться не полностью и даже, несмотря на его большой размер, оказаться нулевыми (мосты). В определенной мере сказанное относится к оценкам продукции уже построенных крупных предприятий и изделий, требующих больших затрат по освоению их производства.

4) Наличие совместно, комплексно производимой продукции (полимеры, материалы, извлекаемые из полиметаллической руды, лесоматериалы, сталь и чугун, электроэнергия и тепло и т. п.). Для таких видов продукции о. о. оценки являются взаимосвязанными, а их соотношение зависит, в частности, от размера изменяющейся потребности в каждом из таких продуктов.

5) Необходимость резерва производственных мощностей некоторых видов сверх того, что требуется для покрытия потребности в соответствующей продукции в обычное время. Следствием этого является пониженная прокатная оценка этих мощностей по сравнению с нормальной и соответственно меньшая о. о. оценка такой продукции.

Наряду с постоянными причинами отклонений, имеется ряд временных, обусловливаемых как сложившейся в ходе экономического развития обстановкой и состоянием народного хозяйства, так и рядом других причин. Именно:

1) Наличие свободных производственных мощностей данного вида или их недостаток. Например, наличие значительных мощностей для производства алюминия в послевоенный период должно было снизить их прокатную оценку, а также о. о. оценку алюминия, что делало экономически целесообразным более широкое его использование.

2) Соотношение производственных возможностей по данному виду продукции и экономически оправданной народнохозяйственной потребности в нем на данный момент.

3) Дефицит некоторого вида рабочей силы, нужной для производства данной продукции, или наличие резервов ее, которые не могут быть иначе полноценно использованы.

4) Появление более дешевого заменителя данной продукции.

5) Рост или уменьшение потребности в данной продукции.

6) Особенности местных условий.

Такого рода отклонения обычно должны постепенно устраняться, однако их существование является объективным фактом, который не может игнорироваться. Учет этих возмущений тем более необходим, что их появление является систематическим и неизбежным, в особенности в условиях современного производства.

Появление этих отклонений порождается целым рядом причин: изменениями в составе конечной продукции, вызванными изменением конкретных условий; возникновением новых потребностей; появлением новых видов продукции, заменяющих прежние; появлением новой, более совершенной технологии, которая, не сразу получая общее применение (§ 2, пример 7), снижает прокатную оценку ранее изготовленного оборудования (моральный износ).

Далее, к самому понятию нормальных оценок мы пришли, считая, что план является оптимальным в течение длительного времени. Между тем средства на капиталовложения фактически используются еще далеко не лучшим образом. Однако даже при оптимальном планировании реально осуществленный план за ряд лет неизбежно окажется не оптимальным, так как изменения обстановки и новые данные заставляют непрерывно его менять, и в свете этого уже сделанные вложения могут оказываться не самыми эффективными.

Поскольку экономические решения должны приниматься в данной конкретной обстановке, а не для каких-то идеализированных условий, мы не можем игнорировать указанные факторы, вызывающие отклонения о. о. оценок от нормальных значений. Поэтому мы считаем неприемлемой в экономическом расчете и в текущем планировании замену о. о. оценок их нормальными значениями, хотя последние и могут быть полезными.

Знание о. о. оценок важно и при выборе объектов для вложений. Например, знание оценки электроэнергии, характеризующей степень напряженности энергобаланса в данном районе, поможет решить вопрос о том, строить ли новую электростанцию в данном году или в следующем обычным или скоростным способом. Благодаря о. о. оценке, включенной в расчеты при определении эффективности вариантов, будет учтена напряженность баланса, что позволит выбрать правильное решение. О. о. оценки стройматериалов, рабочей силы разных категорий, прокатные оценки строительного оборудования помогут найти наилучший вариант проекта и его реализации.

Необходимо учитывать ожидаемые изменения оценок, например, вызванных повышением производительности труда и удешевлением работ в результате механизации. При подсчете эффективности вложений в производство некоторой продукции нужно предусмотреть возможность появления более дешевых ее заменителей и т. п. Важно также прогнозировать систематические изменения относительных величин оценок, в частности, повышение относительной оценки труда и трудоемкой продукции.

Первостепенную роль в расчетах по эффективности вложений имеет рента, не отражаемая нормальной оценкой. Можно ли без знания земельной ренты правильно оценить, например, эффективность капиталовложений в орошение?

В то же время из-за невозможности сколько-нибудь точно предсказать динамику оценок подсчет эффекта вложения для отдаленного времени особенно сложен и недостоверен, и здесь мы считаем допустимым использование нормальных оценок вместо системы динамических о. о. оценок. Величина нормальных оценок может быть определена более обоснованно, поскольку динамику одного показателя — нормальной эффективности — предсказать, по-видимому, легче.

Может возникнуть вопрос, чем отличаются соотношения, определяющие о. о. оценки, от цен в капиталистической экономике. Не поднимая этот большой вопрос, требующий самостоятельного рассмотрения, в полном объеме, ограничимся по этому поводу только одним замечанием.

Хотя оценки имеют иной смысл и происхождение, а именно, они должны быть исчислены на основании анализа оптимального плана в отличие от цен, складывающихся стихийно на рынке, но и те и другие объективно определяются условиями производства и производственными затратами.

Несмотря на коренное различие в производственных отношениях при капитализме и при социализме, в количественных соотношениях, определяющих о. о. оценки и рыночные цены, имеется одна общая черта. И те и другие определяются необходимыми затратами труда, но не совпадают с ними, а отклоняются от последних. В условиях капитализма цены колеблются около цен производства, а в социалистической экономике в условиях оптимального плана о. о. оценки в среднем приближаются к нормальным оценкам.

Выше было отмечено, что нельзя вместо о. о. оценок использовать их нормальные значения, а нужно находить их непосредственно путем анализа оптимального плана. В то же время при анализе капиталистического рынка марксистская политическая экономия, отмечая постоянно имеющиеся место отклонения рыночных цен от цен производства, не занималась изучением этих отклонений. Представляется, что такое различие в подходе оправданно и вызвано двумя причинами.

Во-первых, предметом анализа. В условиях стихийного капиталистического рынка колебания цен имеют столь случайный характер, вызываются таким множеством факторов, что точное научное исследование этих колебаний вряд ли возможно. «Вообще при капиталистическом производстве всякий общий закон осуществляется лишь как господствующая тенденция, весьма запутанным и приблизительным образом, как некоторая средняя постоянных колебаний, которая не может быть точно установлена»\*. Напротив, в условиях планового социалистического хозяйства возможен настолько точный анализ, что он позволит объективно учесть отклонения о. о. оценок от нормальных.

Во-вторых, целью анализа. Марксистский анализ капиталистической экономики имел целью общее, принципиальное исследование капиталистического производства и изучение его основных закономерностей, а потому, естественно, мог отвлечься от всех временных, преходящих факторов и влияний.

Экономический расчет (и анализ) в социалистической экономике служит базой практических решений, поэтому он должен быть более точным и детальным, должен учитывать конкретную обстановку, включая сюда временные, случайные обстоятельства.

---

\* Маркс К. Капитал. — Т. III. — С. 146.

### § 3. Пути осуществления оптимального перспективного планирования

**Задача построения оптимального перспективного плана и его показателей.** Необходимые для решения вопросов о капиталовложениях величины нормальной эффективности и динамических о. о. оценок являются характеристиками оптимального перспективного плана народного хозяйства, и потому их определение непосредственно связано с задачей построения такого плана. Вместе с тем эта задача представляется проблемой исключительной сложности, для которой даже разработка методики ее решения потребует длительной и интенсивной исследовательской и практической работы.

Мы попытаемся здесь описать возможные подходы к этой задаче, общий характер и этапы ее, отвлекаясь пока от тех огромных трудностей и осложнений, с которыми неизбежно будет связано их осуществление. При этом мы приведем лишь отдельные соображения о возможных путях практической реализации некоторых этапов этого процесса и подходов к предварительному и грубому определению о. о. оценок.

Как уже говорилось, отвлеченно, схематически задачу перспективного планирования можно себе представлять следующим образом: 1) имеются данные обо всех ресурсах, которыми располагает страна, включая перспективы роста ресурсов труда и освоения природных богатств; 2) известны возможные технологические процессы и способы организации производства, как опирающиеся на наличную производственную базу, так и связанные с ее расширением, с капиталовложениями; для них имеются точные данные о необходимых затратах и о достижимых объемах выпуска продукции; 3) аналогичные данные имеются и о технологических процессах, которые будут освоены в дальнейшем в течение планового периода; 4) на основании изучения потребностей общества и конкретной обстановки в настоящий момент и с учетом перспектив определены: состав конечной продукции для личного и общественного потребления; необходимые объемы производственных мощностей и требования к их размещению; движение запасов; доля национального продукта, выделяемая на капиталовложения, во все моменты планового периода.

Требуется составить оптимальный перспективный план, обеспечивающий быстрое развитие производительных сил и максимальный выпуск продукции.

Если бы все указанные данные действительно имелись, то в этих условиях построение оптимального перспективного плана представляло бы задачу, вполне разрешимую известными методами, если отвлечься от ограниченности расчетных средств. Поэтому вполне возможно построение оптимального плана в соответствии с перечисленными данными и заданиями и получение динамической системы оценок (для всех видов продукции и производственных факторов в каждый момент времени планируемого периода и для каждого географического пункта), а также значение нормальной эффективности капиталовложений для каждого момента.

Конечно, реальное осуществление такой программы непосредственно в описанном виде невысказано: невозможно иметь точные данные обо всех видах ресурсов, о многих миллионах мыслимых технологических способах для производства сотен тысяч видов продукции, включая и те, которые будут изобретены; невозможно ука-

зять и точно оценить потребности во всех видах продукции на большой срок, тем более, что они зависят от производственных затрат и осуществимых объемов выпуска, и т. д. Даже если бы все эти данные и возможно было получить, их сбор и расчетная обработка были бы технически неосуществимы и при использовании самой современной вычислительной техники. И наконец, если бы такой план был построен на весь период, то осуществление его могло бы встретить также немалые затруднения, так как появление новых неучтенных обстоятельств требовало бы каждый раз пересчета и изменения всего плана.

Однако, несмотря на нереальность буквального осуществления такой схемы, представление о ней и, в частности, отчетливое знание того, каковы свойства и характеристики такого плана, какие данные желательно иметь — к чему надо стремиться, может существенно помочь и ориентировать как при практическом построении плана и его показателей, так и в понимании отдельных экономических вопросов.

Оптимальный перспективный план вряд ли может быть построен сразу и в окончательной форме, даже приблизительно. Его построение, по-видимому, должно представлять процесс, состоящий из ряда этапов, на которых уточняются не только сам план и его показатели, но одновременно и исходные данные и задания. Окончательно план формируется в процессе его осуществления.

**Некоторые особенности перспективного планирования.** Не пытаясь дать методику фактического построения оптимального плана и его показателей, отметим лишь некоторые моменты, поясняющие возможности преодоления трудностей, стоящих на этом пути.

1) Для грубого определения контуров плана и главных его показателей — уровня нормальной эффективности и динамической системы оценок — может быть использована упрощенная модель народного хозяйства. Такая модель, построенная для агрегированных продуктов и услуг (условное топливо, металлопрокат, метизы, станки, электроэнергия, отдельные виды производственных мощностей, транспортные услуги и т. п.) на основании данных, полученных усреднением, может включать лишь несколько десятков или сотен (а не сотни тысяч) видов продукции и производственных факторов.

Такого рода модель может быть проанализирована при помощи описанных выше методов (выводы 25, 26). При использовании вычислительной техники этот анализ может быть произведен в сравнительно короткие сроки.

В результате таких расчетов будут получены лишь самые ориентировочные характеристики оптимального плана. Наибольшую ценность представят найденные при этом показатели плана — нормальная эффективность, динамика оценок. Хотя эти величины будут указаны лишь приблизительно и обобщенно и существенно изменятся в дальнейшем, но даже знание таких грубых приближений будет чрезвычайно полезным, давая ориентиры в процессе уточнения плана.

2) Очень важную роль при составлении оптимального перспективного плана должен сыграть действующий план. Его данные могут дать отправные точки при анализе общественных потребностей и структуры конечного продукта, а план на ближайший период может рассматриваться как вариация действующего плана.



Из анализа действующего плана могут быть почерпнуты также реальные данные о натуральных затратах в производстве различных продуктов и услуг, а также о необходимых капиталовложениях для создания производственных мощностей. Очень важно, чтобы в затраты, наряду с материальными и трудовыми, включались и такие их виды, как использование природных ресурсов, оборудования и производственных площадей (рента, прокатная оценка), которых применяемый анализ не учитывает.

Например, сопоставляя экономичность синтетического и естественного волокна, мы получим заведомо искаженную картину для затрат, если не учтем прокатную оценку оборудования в первом случае и земельную ренту во втором. Точно так же, рассматривая вопрос о возможности применения водного транспорта вместо железнодорожного для доставки руды или иной продукции добывающей промышленности, что потребует создания полугодовых ее запасов, мы сможем получить правильное решение только при учете загрузки железнодорожного транспорта (через прокатную оценку) и омертвления средств в запасах (через норму эффективности).

Само собой разумеется, что данные о наличных ресурсах должны быть почерпнуты именно из анализа состояния народного хозяйства и показателей действующего плана. Наконец, на основе его данных и производственного опыта можно предварительно отобрать те технологические способы, которые разумно учитывать при составлении оптимального плана как на ближайший период, так и на будущее.

Таким образом, построение оптимального плана может осуществляться как некоторый процесс последовательного совершенствования и объединения ранее составленных планов, текущего и предварительного перспективного.

Наконец, анализ действующего плана и принятых в нем технических и перспективных решений можно использовать (наряду с анализом модели) для получения ориентировочных значений характеристик оптимального плана, подобно тому, как это было описано ранее применительно к задаче текущего планирования (глава II, § 8, стр. 224–227). Однако при этом нужно иметь в виду ограниченность возможностей такого анализа.

Наличие согласованных с планом оценок является свойством лишь оптимального плана. Реально действующий план не оптимален, и непосредственное построение оценок для него может привести к противоречивым соотношениям. Поэтому приближенные значения оценок можно получить, опираясь при его анализе только на оправданные, систематически применяемые, целесообразные способы, отвечающие рациональному использованию ресурсов, и отбрасывая способы случайные, неоправданные, не соответствующие уровню развития производительных сил и конкретной обстановке. Полученные при таком анализе противоречия устранятся в процессе совершенствования плана, исправления его недостатков.

3) Одним из моментов, вызывающих наибольшие трудности в реализации предлагаемой схемы, является необходимость получения данных о многочисленных возможных технологических способах, в том числе и связанных с расширением производственной базы. Получение таких данных сопряжено со значительными затратами — составлением технических проектов, расчетов, экспериментов и т. п. При этом число способов, которые могут показаться целесообразными при тех или иных

обстоятельствах и для которых, следовательно, нужно было бы иметь все эти данные, весьма велико. Фактически же в оптимальном плане будет реализована лишь небольшая часть этих способов и решений, т. е. данные о большинстве из них не будут нужны. При построении плана методом последовательного уточнения можно избежать такой излишней работы. Именно, на основании ориентировочных значений оценок (см. пп. 1 и 2) уже по предварительным данным и эскизным проектам некоторые технологические способы и проектные решения могут быть отвергнуты как неэкономичные в данных условиях, и, следовательно, детальное проектирование и получение полных данных понадобится только по отношению к тем из них, возможность применения которых будет достаточно реальной.

4) Наряду с известными технологическими способами при составлении перспективного плана приходится принимать во внимание и как-то учитывать технический прогресс, который должен произойти за рассматриваемый период, что потребует прогноза развития техники. В одних случаях учет технического прогресса может строиться, исходя из предполагаемых сроков внедрения некоторой конкретной новой технологии. В других — придется опираться на имеющийся в данной отрасли опыт и ориентировочно планировать ожидаемое в среднем изменение показателей, вызванное улучшением применяемых технологических процессов (повышение производительности, снижение удельных затрат и т. п.). Конечно, эти данные будут крайне неточными и могут частично не оправдаться.

Следует заметить, однако, что это не столь существенно, так как может повлиять лишь на величину оценок в будущем, а такие изменения не сильно сказываются на решениях первых лет.

5) По-видимому, прогноз величины нормальной эффективности окажется значительно проще и может быть сделан гораздо точнее, чем прогноз всей системы динамических оценок.

В то же время знание ее величины позволит приблизительно определить нормальные оценки, которые в ориентировочных расчетах могут заменить систему динамических оценок. Следует, конечно, при этом учитывать взаимозависимость нормальных оценок разных продуктов, так, если один продукт затрачивается при производстве другого, то требуется совместно находить их оценки. Однако, хотя эта трудность и вносит существенные осложнения, в целом получение приближенной системы нормальных оценок, по-видимому, проще, чем расчет полной динамической системы.

Необходимо подчеркнуть, что система нормальных оценок имеет ограниченное применение, поскольку она определяется вне связи с конкретной обстановкой, без учета ресурсов производственных мощностей и требований по составу продукции и т. п. Поэтому естественно, что нормальная система оценок, не отражая конкретных реалий плана, не может быть непосредственно использована при выборе решений на ближайшее время. В то же время ее построение имеет определенную ценность, давая ориентиры на будущее — она может использоваться как грубое приближение к динамической системе. По-видимому, такое использование оправданно в расчетах эффективности вложений для будущих лет, для которых сколько-нибудь точное построение динамических оценок, как уже указывалось, вряд ли осуществимо. Что касается затрат и продукции ближайшего периода, то здесь для целей прибли-

женного соизмерения, вероятно, правильнее пользоваться о. о. оценками данного момента (текущего плана).

Важно отметить, что в нормальных оценках совсем не отражается использование более эффективных и недостаточных природных ресурсов; поэтому даже как приближения их можно использовать только для тех видов продукции, для которых этот момент не очень существен.

6) При постановке задачи составления оптимального плана предполагалось, что требования к составу конечной продукции на весь период являются исходными данными.

В какой-то степени это требование является необходимым, поскольку состав конечной продукции определяется потребностями общества и может быть установлен, исходя из задач, поставленных перед народным хозяйством с учетом ряда внеэкономических факторов, в том числе и общей политической обстановки. Однако требования по составу конечной продукции могут не быть детальными, не иметь характера точных заданий по объемам или заданных их соотношений по всем видам продукции на много лет вперед.

Во-первых, поскольку они относятся только к конечной продукции (непосредственно идущей на потребление), то соотношения по промежуточным видам продукции, производственным мощностям\* и пр., будучи в какой-то степени предопределены конечной продукцией, в большой мере все же определяются и конкретизируются в процессе составления оптимального плана. В этом отношении требования по составу конечной продукции в перспективном плане являются менее жесткими, чем в текущем, где задания по выпуску средств производства облечены в определенную конкретную форму.

Во-вторых, многие задания по конечной продукции могут устанавливаться в обобщенной номенклатуре (ткани, продукты питания, жилищное строительство и т. д.). Более детальная разбивка продукции по видам может быть произведена уже в процессе составления плана с учетом выявившихся оценок общественных затрат на тот или иной вид продукции. Частично состав конечной продукции, идущей на личное потребление, должен корректироваться с учетом спроса населения, но этого вопроса мы здесь не касаемся.

7) В процессе планирования важным его элементом должна стать координация перспективного и текущего планов. Перспективным планом в значительной мере определяется задание по составу продукции для текущего плана на данный период, именно, в части выпуска средств производства и движения запасов. В то же время элементы и показатели текущего плана, в частности найденные о. о. оценки и данные о структуре затрат, которые определены в соответствии с реальной обстановкой и являются более точными, могут быть использованы при построении оценок и выборе решений перспективного плана. Так, их использование особенно важно при определении очередности ввода производственных мощностей, исчислении затрат для различных проектных решений и для выбора наилучших вариантов среди них.

---

\*Лишь в некоторых случаях производственные мощности могут фигурировать непосредственно в заданиях.

8) Перспективный план, естественно, должен строиться менее точно и детально для отдаленных периодов и более точно и полно для ближайших. То же самое относится и к таким его экономическим показателям, как о. о. оценки.

По мере приближения планируемого периода элементы плана должны конкретизироваться и уточняться. Окончательное формирование плана произойдет в процессе его реализации, при этом использование системы о. о. оценок даст возможность производить необходимые изменения и уточнения более гибко и целенаправленно.

9) Очень важным моментом в текущем и перспективном планировании является согласование общего народнохозяйственного плана с планами отраслей, экономических районов и отдельных предприятий, совхозов и колхозов.

На основе общего народнохозяйственного плана с учетом основных его заданий и взаимосвязей отраслей и регионов составляются более детальные перспективные планы отдельных отраслей, экономических районов, конкретных предприятий. Использование методики оптимального планирования и о. о. оценок существенно облегчит их взаимное согласование.

С одной стороны, знание, даже приближенное, динамики оценок позволит при составлении местного плана правильно учитывать общие балансы в народном хозяйстве по продукции, а также по сырью и материалам, производимым другими отраслями и районами. С другой стороны, построение системы местных о. о. оценок и их динамики при составлении плана данного района или отрасли на основании заданий общего плана (программы по продукции, объемам капиталовложений и т. д.) даст в удобной форме данные для согласования этих планов. Скажем, различия в соотношении о. о. оценок некоторых видов продукции (или различие норм эффективности) может подсказать желательность перемещения тех или иных ресурсов, изменения заданий и пр., улучшающих общий народнохозяйственный план.

10) Наконец, очень важным моментом является стимулирование системой расчета и поощрения хозяйственных руководителей выполнения оптимального плана и его перевыполнения. Это достигается построением системы показателей, оценивающих хозяйственную деятельность таким образом, чтобы она благоприятствовала рациональному использованию ресурсов при выполнении плановых заданий и их перевыполнению за счет вскрытия новых, не предусмотренных планом резервов. Следует ожидать, что основные характеристики текущего и перспективного планов (о. о. оценки, нормальная эффективность) станут базой для таких показателей. Частично мы уже говорили об этом, когда речь шла о текущем планировании.

Естественно также возникает вопрос о необходимости учета нормы эффективности при предоставлении оборотных средств и банковских кредитов на кратковременные вложения, в хозяйственных договорах при досрочных поставках или их задержке, при стимулировании скоростного строительства и т. п.

**Возможности практического использования методики расчета эффективности капиталовложений и выводов из нее.** Методика расчета эффективности капиталовложений в предыдущем изложении непосредственно связывалась с системой оптимального перспективного народнохозяйственного планирования и с показателями этого плана (динамика оценок, нормальная эффективность). Ясно, что осуществление этой системы — дело сложное и длительное, требующее

значительной исследовательской работы и накопления опыта. Возникает естественный вопрос, не могут ли в какой-то мере быть использованы проведенный анализ и методика расчета эффективности до осуществления общей системы оптимального планирования.

Наиболее ценным нам представляется, прежде всего, понимание количественной взаимосвязи различных факторов, определяющих эффективность вложений, а также принципов целесообразного их выбора, достигаемое применением основных положений этой методики. Особенно важными представляются следующие тезисы: связь вопроса об эффективности конкретного вложения с общим оптимальным планом; необходимость оценки эффекта вложения не с точки зрения отдельных показателей, ведомственных или местных интересов, а исходя из интересов народного хозяйства в целом; учет конкретной обстановки в данное время; выявление неполноты расчетов по эффективности на основе себестоимости, необходимости отражения в ней использования факторов, определяющих эффективность труда, включением косвенных затрат (прокатная оценка, рента); приведение разновременных затрат и результатов к одному моменту; учет динамики оценок; роль факторов, влияющих на значение нормальной эффективности; особенности анализа крупных, неделимых вложений и т. д.

Понимание этих принципов при анализе конкретного вопроса, даже если отсутствуют необходимые данные для прямого применения изложенной методики, может помочь в том отношении, что акцентирует внимание на тех моментах, которые должны быть учтены. Это позволит оценить их, хотя бы и приближенно, причем иногда даже и непосредственно, а не косвенным путем.

Как уже упоминалось, точные значения показателей оптимального народно-хозяйственного плана (нормальная эффективность, динамика оценок) могут быть найдены по соответствующей методике только вместе с самим планом, поэтому в ближайшее время нельзя рассчитывать на возможность их использования. Однако грубые приближения к значениям этих показателей, которыми в ряде случаев можно удовлетвориться, могут быть получены более доступными средствами.

Первый путь — это использование упрощенной модели народного хозяйства. Полученные таким путем результаты, как указывалось, могут дать лишь самое приблизительное и весьма обобщенное представление об оптимальном плане. Наибольшую ценность представят найденные при этом показатели плана (нормальная эффективность, динамика оценок), которые дадут возможность правильнее ориентироваться в вопросах, связанных с эффективностью капиталовложений, в особенности при учете взаимосвязей анализируемого объекта с народным хозяйством в целом и с другими отраслями. Другой путь получения приблизительных значений показателей оптимального плана — непосредственный анализ решений, систематически применяемых в текущем плане.

Особенно важно как можно точнее определить величину нормальной эффективности и спрогнозировать ее динамику. Она может быть, по-видимому, приближенно найдена не только в результате исследования модели, но и на основе анализа существующего плана. Здесь, с одной стороны, могут быть использованы обобщенные статистические характеристики народного хозяйства — рост производительности труда, рост национального дохода, объемы капиталовложений и их динамика; впрочем, нет никаких оснований для того, чтобы какую-то одну из них

принять непосредственно в качестве значения (даже приближенного) нормальной эффективности. С другой стороны, важен анализ типичных и массовых примеров реализуемых вложений, а также вложений, которые остаются неосуществленными вследствие ограниченности средств.

Имея приблизительное значение нормальной эффективности и данные об удельных капиталовложениях и их структуре, можно будет приближенно найти значения нормальных оценок тех видов продукции, производство которых не связано существенно с использованием благоприятных природных ресурсов. Эти оценки следует уточнить, учитывая взаимосвязанность разных видов продукции. Для приближенного нахождения нормальных оценок могут быть полезны также данные межотраслевых балансов\*. Полученные значения нормальных оценок смогут использоваться в расчетах в качестве ориентировочных значений о. о. оценок, в особенности для более поздних периодов.

Непосредственное применение методики оптимального планирования представляется более реальным для составления, скорее даже для улучшения перспективного плана развития какой-либо отрасли, скажем, металлургии или энергетики. Здесь можно исходить из намеченных народнохозяйственным планом заданий по развитию данной отрасли, планируемых средств по годам как суммарно в денежном выражении, так и в натуральном выражении — по труду, важнейшим материалам и производственным мощностям. Тогда, исходя из запроектированных объектов в различных их вариантах (по технологическим процессам, объемам, срокам начала и проведения работ), может быть выбрано наилучшее их сочетание и составлен оптимальный план, а также найдены его основные показатели. Можно ожидать, что в улучшенном плане будет обеспечено заметное увеличение выпуска продукции и повышение темпов роста при тех же затратах. Кроме того, найденные при его построении оценки продукции, используемых материалов, прокатные оценки производственных мощностей и, наконец, внутреннее значение нормальной эффективности помогут заметить и обосновать желательность тех или иных изменений в части, касающейся взаимосвязи данной отрасли с другими. Например, целесообразность выделения дополнительных фондов по одним материалам и уменьшения их по другим или изменения объема капиталовложений в данную отрасль.

Аналогичному анализу может быть подвергнут перспективный план развития некоторого экономического района. И в этом случае его взаимосвязи с народным хозяйством или межрайонные связи первоначально можно принять в соответствии с принятыми плановыми наметками, а вопрос об их корректировке ставить уже на основании оптимизации местного плана.

Наконец, весьма интересным представляется вопрос о возможности использования изложенных методов при оценке целесообразности данного конкретного капиталовложения при том условии, что характеристики оптимального народнохозяйственного плана нам не известны.

Хотя практического опыта использования такого подхода пока нет, нам все же представляется, что принципиально он возможен. Конечно, его применение в таких условиях может дать лишь самые приблизительные результаты, но даже и

---

\* По этому вопросу см. Приложение I (стр. 332).

они позволят прийти к более обоснованным выводам, чем обычно используемые методы.

Приведем некоторые соображения относительно возможности применения предлагаемого подхода. Важнейшая его особенность состоит в том, что при анализе отдельного капиталовложения оно рассматривается не изолированно, не само по себе, а в комплексе, как элемент перспективного народнохозяйственного плана. Поэтому *при рассмотрении вопроса об оправданности данного капиталовложения решающее значение должно иметь сопоставление того эффекта, который принесет его осуществление для народного хозяйства в данных условиях, и тех затрат, с которыми будет связано его осуществление* (особенно важен учет местных условий).

Объективным отражением этого является та числовая характеристика эффективности данного вложения, которая вводилась в § 2. Ее значение достаточно показательно для суждения о целесообразности данного вложения, а также для сравнительного сопоставления двух конкурирующих вложений.

Однако практический расчет этой величины затруднен отсутствием необходимых для него данных, прежде всего, значений о. о. оценок и их динамики. Мы все же полагаем, что результаты приблизительного расчета могут в ряде случаев оказаться вполне удовлетворительными, если даже этот расчет произведен на основе лишь тех данных, которые используются при обычной калькуляции себестоимости, при условии, что в них внести необходимые коррективы и дополнения. В частности, особенно значимыми представляются следующие моменты (для определенности мы имеем в виду проект предприятия, производящего некоторую продукцию).

1) Должны быть более точно, чем обычно это делается при проектировании, определены сроки ввода мощностей и начала выпуска продукции, с одной стороны, и сроки основных затрат в период строительства и монтажа предприятия — с другой. При этом желательно первые по возможности приблизить, а вторые соответственно отдалить (без изменения срока ввода в эксплуатацию).

2) Необходимо предусмотреть и учесть динамику изменения себестоимости важнейших, наиболее существенных по затратам видов сырья и материалов, используемых в производстве, а также строительных материалов и работ. Такие изменения в одних случаях могут быть ориентировочно оценены по данным прошлых лет, в других — оценка может быть произведена на основании реальных местных данных, а также проектов организации производства этих материалов или выполнения работ. Например, при большом объеме земляных работ их нужно оценивать не по нормативной стоимости, а по стоимости в конкретно реализованных проектах.

3) Особенно важным является по возможности точное определение народнохозяйственной оценки основной продукции предприятия. Здесь представляются реальными два подхода: а) по оценке эффекта от ее использования в других отраслях; б) по необходимым затратам для получения данной (или эквивалентно ее заменяющей) продукции другими методами. В первом оценка может быть произведена путем подсчета экономии, которую даст применение данной продукции. Этот путь является единственно возможным, если данная продукция может изготавливаться только на проектируемом предприятии. Во втором — затраты на производство данной продукции в другом месте или на заменяющую продукцию должны подсчитываться не по средним данным, а исходя из того, каким конкретно путем может быть заменена продукция проектируемого предприятия.

В одних случаях эти затраты окажутся выше средних — большие перевозки, необходимость использования худшего сырья или более глубоких шахт, значительные вскрышные работы для добычи угля или руды и т. п. В других — ниже средних из-за наличия неиспользуемых производственных мощностей, применения более прогрессивного способа и т. п. Например, при сопоставлении искусственного волокна с шерстью или хлопком нельзя не учитывать, что расширение производства последних потребовало бы вовлечения дополнительных (худших) земель, или переноса на такие земли производства других культур с соответствующим ростом затрат на них (т. е. учет ренты), или, скажем, капиталовложений в орошение новых площадей. Подобные соображения нужно учитывать и при построении оценок для сырья и строительных материалов.

4) При оценке сырья или материалов, их себестоимости и цены могут корректироваться коэффициентами дефицитности, в частности, характеризующими сложность и загруженность оборудования, используемого при производстве данного материала. В одних случаях могут применяться усредненные коэффициенты, т. е. вводиться поправки на основании отклонения удельных капиталовложений в производство данного вида продукции от среднего их уровня (с учетом ориентировочного значения нормальной эффективности). В других — с учетом конкретной загруженности соответствующего оборудования и тех реальных затрат, которые потребует производство продукции, нужной при осуществлении данного проекта.

Конечно, лучше всего было бы еще до общего совершенствования ценообразования централизованно разработать (Госпланом, ЦСУ или НТК<sup>13</sup>) систему предварительных оценок важнейших видов продукции, отвечающих полным общественным затратам, или поправочных коэффициентов к действующим ценам для различных групп продукции. Эта система была бы предназначена для использования в первый период только в технико-экономических и проектных расчетах (но не в хозрасчете). В процессе такого применения эта система могла бы быть испытана и скорректирована.

5) Аналогичные соображения могут быть учтены при оценке затрат, связанных с использованием строительных механизмов. Их прокатная оценка может быть определена либо исходя из стоимости их изготовления, либо, в особенности, для механизмов специального назначения, с учетом их наличия и возможного эффекта от использования в других местах. Например, может быть учтено наличие высвобождающихся строительных машин с заканчивающейся стройки.

6) Конкретно, в частности, с учетом загруженности железных дорог и других транспортных средств должны исчисляться затраты на перевозки.

7) Затраты на рабочую силу также могут учитываться с поправками на коэффициент дефицитности, если речь идет о тех ее категориях, которых особенно не хватает в данный период или в данном районе, или, наоборот, при невозможности полноценно использовать на других объектах подготовленные и организованные кадры (с коэффициентом, меньшим единицы).

Изложенный подход, конечно, имеет условный и нечеткий характер и никак не заменяет того, что может дать применение системы оптимального планирования.

---

<sup>13</sup>ГКНТ?



Его следует рассматривать только как некоторый временный паллиатив, имеющий целью известную корректировку расчетов для учета тех его сторон, которые игнорирует применяемая система. И все же мы полагаем, что предложенный подход может принести известную пользу. В частности, он наиболее оправдан при относительном сопоставлении двух вариантов предприятий, дающих одну и ту же продукцию, так как в этом случае снимаются трудности и неточности, связанные с оценкой основной продукции, а другие условности, вводимые в расчет, нивелируются, если они используются в обоих вариантах.

Во всяком случае, представляется, что внесение этих коррективов позволит правильнее выбирать вариант вложения по сравнению с обычно применяемым сопоставлением сроков окупаемости, впрочем, даже последний подход следует считать определенным прогрессом по отношению к выбору вариантов по чисто качественным соображениям.

Наконец, мы считаем, что учет тех важнейших соображений, которые были выявлены при анализе оптимального плана, может принести определенную пользу даже при обычно применяемых формах экономического обоснования решений. А именно, учет времени строительства и концентрированности вложений (при условии расчета эффективности, а не срока окупаемости), учет амортизации по моментам реальных затрат, необходимость особой формы анализа крупных, неделимых объектов (учет сопутствующих эффектов). Также существенно понимание относительности, условности результатов, полученных на основании проведенного таким образом расчета, понимание его неполноты, знание того, что в этом расчете остается неучтенным, и в связи с этим более корректное применение полученных выводов.

#### **§ 4. Сопоставление с другими предложениями по расчету эффективности капиталовложений. Заключение**

Постоянно возникающая при экономическом обосновании плановых и проектных решений необходимость анализа фактической эффективности капиталовложений настоятельно требует указания определенного подхода и обосновывающей анализ методики расчета. Для выбора решения большое значение имеют многие экономические и технические показатели: себестоимость продукции, производительность труда, удельные капиталовложения, трудоемкость, удельные затраты сырья и др.

Непосредственное сопоставление вариантов одновременно по целому ряду показателей не может дать решения вопроса, хотя такой подход еще до сих пор выдвигается некоторыми экономистами\*. Между тем практически он почти неприменим. Он пригоден лишь в тех случаях, когда один вариант решения оказывается по всем показателям лучше другого, и выбор бесспорен; так бывает при введении какого-либо технического усовершенствования производственного процесса, не связанного

---

\*Бакулев Г. Д. Задачи экономической науки в области автоматизации производства в промышленности, 1956. Доклад на пленарном заседании сессии по научным проблемам автоматизации АН СССР; его же. Основной критерий и показатели определения экономической эффективности капитальных вложений в промышленности. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. Орлов П., Романов И. К вопросу о методологии сравнения вариантов проектируемого строительства. — Вопросы экономики. — 1956. — № 1.

со значительными затратами. Но в этом случае по существу нет и надобности в экономическом анализе.

Как правило, однако, сопоставление вариантов по разным показателям приводит к противоречивым заключениям, и тогда их сравнение производят качественно, так что выбор решения оказывается в той или иной мере субъективным. Практика же настоятельно требует объективного количественного сопоставления различных показателей и, прежде всего, синтеза двух основных стоимостных показателей — себестоимости продукции и удельных капиталовложений. Это нашло свое отражение в проектной практике и в работах ряда экономистов. Были предложены различные объединяющие экономические показатели: срок окупаемости, эффективность вложения, приведенная стоимость (учитывающая проценты на вложенные средства) и т. п. Нормирование (или сопоставление) этих показателей предлагается в качестве средства для выбора правильного решения. Эти предложения вызваны потребностями жизни и направлены на улучшение использования капиталовложений.

В настоящее время эти предложения получили достаточно широкое признание\* и воззрения тех экономистов, которые объявляли недопустимыми такого рода расчеты, почти преодолены. Поэтому мы вовсе не обсуждаем их взгляды (Левина и др.), хотя в свое время они нанесли немалый ущерб делу эффективного использования средств на капиталовложения.

Как уже отмечалось, наш подход к вопросу об эффективности капиталовложений в простейшей его форме, основывающейся на использовании нормальной эффективности, в известной степени сходен с перечисленными предложениями, а поэтому представляется полезным произвести их сопоставление. При этом мы не собираемся приводить здесь обзор всей литературы или сколько-нибудь развернутое критическое ее рассмотрение, тем более что дискутируемые предложения, как правило, не опубликованы в достаточно полном виде. Мы хотим только указать на некоторые принципиальные отличия этих предложений от наших построений и выводов и отметить следующие особенности нашей позиции.

*ПЕРВАЯ ОСОБЕННОСТЬ. Существование нормальной эффективности и критерий оправданности капиталовложений, основанный на сравнении ожидаемой их эффективности с нормальной, научно обосновываются, исходя из анализа оптимального перспективного плана.* Иначе говоря, этот критерий непосредственно выводится из условий производства социалистического планового хозяйства, из того, что только при расчете, опирающемся на нормальную эффективность, достигается максимальный выпуск нужной для общества продукции и быстрейший рост производительных сил. Этот критерий органически связан с обусловливаемой оптимальным планом системой показателей, соизмеряющих затраты и результаты разного вида и в различные моменты времени (о. о. оценки и их динамика).

Необходимо также подчеркнуть, что в приведенной трактовке принцип нормальной эффективности является не самодовлеющим, а производным, играет под-

---

\*См. «Временная типовая методика определения эффективности внедрения техники». Гостехника СССР, 1956. В связи с этой инструкцией см. статью Куракова И. Г. Некоторые вопросы развития техники при социализме // Вопросы философии. — 1956. — № 1. — С. 14, а также дискуссию по поводу нее в «Промышленно-экономической газете», 1956.

чиненную роль. Не перспективный план определяется выбранными по этому критерию вложениями, а наоборот, данные для расчетов по этому критерию (нормальная эффективность, динамика о. о. оценок) определяются экономической обстановкой и задачами, которые решаются оптимальным планом; данный критерий является лишь средством, способствующим наилучшему решению этих задач.

Обоснование же критерия эффективности в других предложениях представляется менее убедительным. Приводится, правда, иногда и рассуждение, подобное нашему (стр. 238, 243). Однако у нас оно основывается на реальности о. о. оценок — их реализуемости; при использовании же действующих цен или себестоимостей это рассуждение недоказательно.

Иногда апеллируют к самой потребности объединения показателей себестоимости и капиталовложений в один, однако из этого соображения отнюдь не следует их объединение именно в форме срока окупаемости или нормы эффективности, поскольку мыслимы и другие формы.

Наконец, показатели в форме приведенной стоимости строились иногда просто по аналогии с расчетами издержек при капитализме. Неубедительна здесь и ссылка на К. Маркса и на его теорию цен производства (И. С. Малышев, Л. А. Ваар)\*. Неясно, почему закон стоимости в модифицированной форме цен производства, сформулированный для капитализма, может быть механически перенесен в социалистическое общество. Обозначение продукта для общества той же самой буквой  $m$ , что и прибавочной стоимости, никак не делает их тождественными и не дает оснований считать, что прибавочный продукт в условиях социализма должен также приниматься пропорциональным вложенному капиталу.

Необходимо подчеркнуть, что наши возражения направлены не столько против самих выводов указанных авторов, сколько против их обоснований. Однако правильное обоснование — дело немаловажное. Без него обычно не удастся ни понять до конца, ни сформулировать точно, ни правильно применять высказанное положение. Это будет видно из дальнейшего сопоставления.

**ВТОРАЯ ОСОБЕННОСТЬ.** *Нормирование эффективности применяется в особой форме — приведения затрат и результатов к одному моменту, что позволяет единым образом охватить самые различные случаи и условия.*

Изложенный подход (выводы 24, 25, замечания 1–6, стр. 246–248) позволяет при оценке эффективности учесть самые разнообразные обстоятельства: различное распределение затрат в течение срока строительства; изменение объема выпускаемой продукции и текущих затрат в период освоения; фактические сроки амортизации (реновация и капитальный ремонт); динамику нормальной эффективности. Хотя это преимущество и не носит принципиального характера, а является скорее техническим, все же оно представляется нам существенным.

Как было уже отмечено, обычно применяются два показателя — срок окупаемости  $t$  и эффективность вложения  $v$ :

$$t = (K_2 - K_1)/(C_1 - C_2), \quad v = 1/t = (C_1 - C_2)/(K_2 - K_1).$$

---

\*Малышев И. С. «Вопросы экономики». — 1957. — № 3; Ваар Л. А. Общие вопросы оценки экономической эффективности капитальных вложений. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.

Их нормирование в простейших случаях при совпадении соответствующих данных приводит к таким же заключениям, что и наши расчеты, если не говорить о таких коренных различиях, как принцип установления нормы и используемые цены (о чем ниже), но в сложных случаях их применение неприемлемо. Так, даже в том случае, когда ежегодная экономия постоянна, но срок реализации не является ни очень коротким, ни очень большим, эти формулы дают уже иные и притом явно неправильные результаты (ср. замечание 3 на стр. 323).

Способ сопоставления вариантов по так называемой приведенной стоимости продукции\*:

$$p_1 = C_1 + nK_1; \quad p_2 = C_2 + nK_2$$

(здесь  $C_1$  и  $C_2$  — себестоимости единицы продукции, а  $K_1$  и  $K_2$  — удельные капиталовложения) является несколько более гибким, позволяя одновременно сопоставлять несколько вариантов, учитывать сроки строительства. Однако и этот способ не охватывает всех практически важных случаев.

Попытка уточнения расчета эффективности для отдельных случаев предпринята в работах З. Ф. Чуханова\*\*. Именно, он по существу вводит непрерывное начисление процентов, учитывая их за бесконечно малые промежутки времени и осуществляя приведение затрат к одному моменту с помощью дифференциального уравнения. Хотя выкладки З. Ф. Чуханова и правильны, а автора настоящей книги никак нельзя заподозрить в противодействии применению высшей математики в экономике, но все же такое применение мы считаем неоправданным.

Уточнение, достигаемое таким непрерывным учетом, абсолютно несущественно, так как вводимая поправка во много раз меньше неизбежных погрешностей в исходных данных\*\*\*. В то же время использование соответствующих формул требует ряда упрощающих гипотез (постоянство нормы эффективности и размера экономии, равномерность графика затрат на строительство и т. п.), крайне ограничивающих область их применения, либо требует усреднения данных, что приводит к неизмеримо большому погрешностям.

Впрочем, сделанное замечание относится лишь к данному частному вопросу и не свидетельствует об отрицательной оценке автором работы З. Ф. Чуханова в целом. В ней весьма обстоятельно и ярко говорится о значении учета эффективности капиталовложений для правильного использования средств, смело ставится ряд важных технико-экономических вопросов. Правда, при этом автор, фетишизируя свои формулы и не учитывая неполноценности исходных данных и показателей, высказывает в категорической форме ряд необоснованных, а иногда и неверных положений (наряду, конечно, и со справедливыми).

\*Такое сопоставление предлагалось в работах В. В. Новожилова (цит. ниже), а также З. Ф. Чухановым и Л. А. Ваагом.

\*\* Чуханов З. Ф. Процесс газификации кокса и проблема подземной газификации топлива. — М.: Изд-во АН СССР, 1957. — Гл. V.

\*\*\* Например, 10 руб. при нормальной эффективности, равной 10%, приводится к следующему году при непрерывном учете не как 110 руб., а как 110 руб. 54 коп. Впрочем, если бы даже возникла надобность в таком уточнении, можно было бы и при обычной методике вести расчет по полугодиям или кварталам. В отношении обоснования самого критерия использование дифференциального уравнения также ничего не дает, так как процентиrowание введено при самом его составлении.

ТРЕТЬЯ ОСОБЕННОСТЬ. *Расчет эффективности — при подсчете стоимости вложения, а также стоимости произведенной продукции — опирается не на действующие цены и себестоимости, а на оценки продукции, объективно обусловленные обстановкой и оптимальным планом.* Критерий эффективности, основанный на сопоставлении ожидаемой эффективности с нормальной, неразрывно органически связан с обусловливаемой оптимальным планом системой показателей для соизмерения ценностей разного вида, относящихся к разным моментам времени (о. о. оценки и их динамика). Без такой системы показателей, правильно отражающих полные народнохозяйственные затраты на продукцию, соизмерение затрат и эффекта в конкретном вложении и сравнение его эффективности с нормальной неправомерно. Поэтому, хотя изложенный в этой главе критерий эффективности (стр. 325–327) для основного простейшего случая имеет ту же форму, что и показатели, фигурирующие в других предложениях (нормирование срока окупаемости или уровня эффективности), в него по существу вложено совершенно иное содержание.

Действительно, в предложениях других авторов имеется в виду, что срок окупаемости (или эффективность) рассчитывается исходя из себестоимостей или действующих цен, построенных, как правило, на основе себестоимости. Между тем, как уже не раз отмечалось, о. о. оценки могут весьма сильно отличаться от этих цен и себестоимостей. При этом если бы они были пропорциональны о. о. оценкам, это не имело бы значения, так как срок окупаемости — показатель относительный; но в том-то и дело, что они далеко не пропорциональны (по одному продукту отношение о. о. оценки к себестоимости равно двум, по другому — четырем и т. д.).

Построение этих критериев непосредственно на основе себестоимости лишено и внутренней логики, эклектично.

Действительно, если критерий эффективности используется в форме приведенных стоимостей (как указывалось, она эквивалентна нормированию эффективности или срока окупаемости), то в качестве мерил при сравнении народнохозяйственных затрат берется приведенная стоимость  $p = C + nK$ . Между тем сами текущие затраты и капиталовложения подсчитываются не по приведенным стоимостям, а по себестоимостям или по ценам. Следовательно, в таком экономическом анализе одновременно используется два совершенно разных масштаба цен. По некоторым важным ингредиентам (металлы, нефть, электроэнергия) разница между ними — коэффициент перевода — достигает 2–4 раз. Зарплата же в обоих случаях учитывается одинаково, т. е. с коэффициентом 1. Ясно, что такой подсчет можно сравнить по точности с техническим расчетом, в котором бы одна часть измерений производилась в вершках, другая — в дюймах, третья — в сантиметрах и эти данные использовались в нем без их перевода в одну единицу.

Между тем нельзя думать, что такие неточности несущественны. Напротив, в расчетах эффективности известная степень точности совершенно необходима, без этого они теряют всякий смысл. Действительно, подобная приблизительность не имела бы значения, если бы речь шла о сопоставлении таких вариантов, из которых один имеет большое, совершенно бесспорное экономическое и техническое преимущество перед другими. Но такой вариант, как правило, имеет лучшие показатели и по себестоимости и по удельным капиталовложениям, а тогда надобность в их сопоставлении и подсчете срока окупаемости вообще отпадает! Об известной тонкости

критерия эффективности свидетельствует сама структура формулы срока окупаемости, представляющего отношение разностей пар близких друг к другу чисел. А в таких случаях, как известно из физики и математики, требования к точности их измерения особенно возрастают.

Между тем из сказанного выше ясно, что речь идет о весьма неточных измерениях. Поэтому в некоторых случаях такому измерению нельзя доверять не только при сопоставлении показателей между собой, но даже при сравнении их по отдельности. Например, возможны случаи, когда некоторый вариант, хотя и дает меньшую расчетную себестоимость и меньшие удельные капиталовложения по сравнению с другими, но все же его приходится отвергнуть, так как он хуже по структуре затрат и по реальному народнохозяйственному эффекту (например, металлоемкий вариант при дефиците металла).

Поскольку о. о. оценки существенно отличаются от действующих цен и себестоимостей, расчет показателя эффективности по о. о. оценкам может привести к совершенно иным результатам и выводам, чем подсчет по себестоимости, хотя оба расчета в простейших случаях производятся по одной и той же формуле. Поясним сказанное числовым примером.

Пусть мы имеем для двух вариантов по о. о. оценкам  $C_1 = 800$  руб.;  $C_2 = 1000$  руб. и  $K_2 - K_1 = 1000$  руб. Тогда ясно, что никакого снижения текущих народнохозяйственных затрат за счет дополнительных капиталовложений в данном случае не достигается, и второй вариант должен быть отвергнут.

Предположим, однако, что расчет велся бы по себестоимости, в частности, без учета косвенных затрат. Допустим, что косвенные затраты в о. о. оценках составляли: 30% в  $C_1$  и 70% в  $C_2$  и по 20% в  $K_1$  и  $K_2$ . В соответствии с этим, в расчете эффективности вложения на основе себестоимости (или действующих цен) могут оказаться, например, такие данные:

$$C_1^{\circ} = 560 \text{ руб.}, \quad C_2^{\circ} = 300 \text{ руб.}, \quad K_2^{\circ} - K_1^{\circ} = 800 \text{ руб.},$$

в соответствии с чем эффективность получится равной  $(560 - 300) : 800 = 32\%$  (срок окупаемости три года). Таким образом, по обычной калькуляции вложение покажется весьма эффективным, хотя оно и неоправданно; может произойти и обратное.

Из приведенного примера вытекает, что нельзя провести сколько-нибудь достоверный и точный анализ эффективности, если вместо о. о. оценок применяются себестоимости или действующие цены, а также видно, насколько неточны получаемые показатели эффективности.

Можно ли отсюда сделать заключение, что вообще невозможно применять критерий окупаемости на основании данных о себестоимостях и что он, следовательно, бесполезен, пока не произведены изменения в ценообразовании?

Мы бы воздержались от такого категорического утверждения. По нашему мнению, если отчетливо понимать условность и приближенный характер критерия эффективности, если учитывать несоответствие себестоимости полным народнохозяйственным затратам и вносить по возможности необходимые коррективы в используемые данные, то он может в ряде случаев принести пользу и помочь в анализе эффективности.

Действительно, себестоимости (и действующие цены) также представляют объективные показатели, характеризующие (хотя и неполно) народнохозяйственные затраты и потому в той или иной мере могут дать средства для оценки народнохозяйственного эффекта.

Прежде всего, в тех случаях, когда все величины:  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $K_1$ ,  $K_2$  имеют сходную структуру, аналогичные элементы и их пропорции (доли трудовых затрат, затрат на металл, топливо, электроэнергию и т. д. одинаковы), они будут отличаться от о. о. оценок, но с примерно одинаковым коэффициентом пропорциональности:

$$C_1^{\circ} = \lambda C_1; \quad C_2^{\circ} = \lambda C_2; \quad K_1^{\circ} = \lambda K_1; \quad K_2^{\circ} = \lambda K_2.$$

Поэтому здесь, как легко усмотреть, срок окупаемости или значение эффективности при расчете по себестоимости даст тот же результат, что и по о. о. оценкам (или близкий к нему), и, следовательно, будет правильно характеризовать народнохозяйственный эффект дополнительных вложений. Однако такие случаи, по видимому, довольно редки. Более реальны случаи, когда  $C_1$  и  $C_2$  имеют одну и ту же (или сходную) структуру, а  $K_1$  и  $K_2$  — другую структуру. При этом мы будем иметь один множитель, скажем,  $\lambda_1$  в двух первых случаях и  $\lambda_2$  в двух других. Тогда найденное значение срока окупаемости будет отличаться от действительного некоторым множителем ( $\lambda_1/\lambda_2$ ), так что все же даст о нем известное представление. Такого рода ситуации, нам представляется, нередко возможны там, где идет речь о сопоставлении двух вариантов одной и той же машины, отличающихся конструктивными особенностями или параметрами.

Как правило, при попытках построения показателей эффективности, отправляясь от себестоимости, мы вынуждены тем или иным путем вносить в эти расчеты известные коррективы, направленные на приближение результатов расчета к оценке действительного народнохозяйственного эффекта вложения. Образно говоря, нужно, анализируя структуру затрат, выяснять, какая часть измерена в вершках, какая в дюймах, какая в сантиметрах, и учитывать это.

Одним из таких коррективов является учет дополнительных капиталовложений в смежные отрасли, ряд других рассмотрен нами выше. Весьма разумной мерой было бы централизованное построение специальных оценок для плановых расчетов или корректирующих коэффициентов.

Нужно, однако, заметить, что если речь идет о сопоставлении двух вариантов изготовления продукции, имеющих совсем различную структуру затрат (естественный и синтетический каучук, тепловая и гидроэлектростанция), коррективы слишком велики, и показателям, построенным на себестоимости, вообще нельзя доверять. Здесь необходимо пытаться тем или иным образом оценивать народнохозяйственный эффект по о. о. оценкам.

В качестве средства преодоления недостатков, связанных с использованием себестоимости и действующих цен, ряд экономистов (Л. А. Вааг, И. С. Малышев и др.) выдвигают предложение об использовании в таких расчетах цен, построенных по формуле цены производства (с прибавочным продуктом, пропорциональным основным фондам по «процентному коэффициенту»).

Это предложение вызывает определенные возражения. Его теоретическое обоснование фактически сводится лишь к переносу механизма ценообразования капи-

талистического общества на социалистическое и явно недостаточно. Не выяснен до конца также принцип построения таких цен. Неудовлетворительно аргументированы величина «процентного коэффициента» и способ, каким он должен быть установлен. Если его строить так, как рекомендует Л. А. Вааг, т. е. основные фонды оценивать по действующим ценам, то происходит известное смешение принципов. Если же имеется в виду последовательная переоценка фондов, хотя об этом и не говорится с полной отчетливостью, то фактический путь построения таких цен не разъяснен.

Однако если бы такую переоценку даже и удалось осуществить, она привела бы к ценам, близким и сходным с теми, которые были названы нами нормальными оценками, с той лишь разницей, что «процентный коэффициент» может отличаться от нормальной эффективности. Поэтому по отношению к ним, во всяком случае, сохраняют силу все те возражения, которые мы выдвигали (на стр. 282–284) относительно применения нормальных оценок вместо о. о. оценок. Именно, в них не отражается потребность в продукции, не учитывается ограниченность благоприятных природных ресурсов и производственных фондов и т. д. Кроме того, поскольку данное предложение требует построения новой системы отпускных (или плановых) цен, его осуществление не менее сложно, чем построение системы о. о. оценок, дающих возможность оптимального планирования и более полного учета всех факторов.

Тем не менее использование в экономических расчетах вместо действующих цен или себестоимостей цен, построенных по этому принципу (с прибавочным продуктом, пропорциональным основному капиталу) даже при примитивном их исчислении, может принести определенную пользу, поскольку корректирует их в нужном направлении. В частности, получают более высокую оценку те виды продукции и услуг (металл, электроэнергия, нефть и др.), производство которых связано с дорогостоящими основными фондами, что правильнее отразит действительные народнохозяйственные затраты на них (ср. стр. 286). Подобные цены могут использоваться и при корректировке расчетов по эффективности вложений, производимых на основе себестоимости, при различии в структуре затрат.

Из всего сказанного ясно, что коренное улучшение расчетов по эффективности может быть достигнуто только при применении цен, построенных не на основе себестоимости, а на основе обусловленного оптимальным планом полных народнохозяйственных затрат.

Необходимо сказать, что вопросы изменения ценообразования дискутировались в нашей печати, однако, как нам представляется, несколько не в той плоскости, которая действительно актуальна. Именно, речь шла об изменении соотношения цен в I и II подразделениях\*. Однако, как хорошо известно и не раз отмечалось и здесь, цены на предметы потребления, в особенности розничные, должны строиться на других принципах (которых мы не касались), чем цены на средства производства, поэтому предложения о сближении их уровня не были достаточно обоснованы.

Нам представляется гораздо более важным другое — установление более правильных соотношений между ценами на различные средства производства, макси-

---

\* См. «Вопросы экономики». — 1958. — № 8. — С. 106–107.



мальное их приближение к действительным соотношениям народнохозяйственных затрат (о. о. оценкам). Таким образом, речь идет не об «огульном» повышении этих цен, а о некоторых относительных их изменениях внутри данного подразделения. При этом, как мы уже говорили, первоначально можно было бы ограничиться построением системы расчетных цен только для применения в планово-экономических расчетах.

**ЧЕТВЕРТАЯ ОСОБЕННОСТЬ.** *Достигается возможность определения абсолютной эффективности вложения в целом, а не только дополнительных капиталовложений.* В практике расчетов эффективности капиталовложений встречаются два вида вопросов. Во-первых, когда речь идет об относительной оценке эффективности — сопоставлении двух вариантов вложений, двух возможных производственных способов выпуска одной и той же продукции, в частности, сопоставлении одного варианта с другим, более экономичным в эксплуатации, но требующим больших средств на осуществление. В этих случаях дело может быть сведено к вопросу об оценке эффективности дополнительных капиталовложений. Во-вторых, практика настойчиво требует анализа эффективности такого вложения, у которого отсутствуют аналогичные объекты для непосредственного сравнения с ним. Например, речь идет о строительстве предприятия, выпускающего новый вид продукции — в этом случае требуется анализировать эффективность вложения в целом. Да и в других случаях важно помимо эффекта в сопоставлении знать и народнохозяйственный эффект избранного объекта самого по себе — насколько вообще оправданно его осуществление.

Как правило, применение методики расчета эффективности или срока окупаемости предлагалось лишь в отношении первой из указанных задач — о дополнительных капиталовложениях. Это и не удивительно, так как при обычном порядке ее применения на основе себестоимости она непригодна для решения второй задачи — оценки эффективности вложения в целом.

Чтобы обосновать это утверждение, достаточно попытаться оценить эффективность действующих вложений (или вложений в новые предприятия, проектирующиеся на том же уровне техники, как это нередко и бывает). При цене, построенной на уровне прежней себестоимости, мы не имеем никакой экономии от вложения, и эффективность его равна нулю,  $0 : K = 0$ . Иными словами, при таких ценах действующие вложения имеют нулевую эффективность и бесконечный срок окупаемости! Если же для продукции предусматривается некоторая наценка или прибыль, то этот условно принятый процент ее и определит эффективность действующего вложения, что опять никак не отразит подлинной и объективной его народнохозяйственной эффективности. Если такой расчет будет проведен для более совершенного производственного способа, то для его эффективности получится некоторое положительное, но искаженное, заниженное значение. Эти примеры лишней раз подтверждают, насколько условны результаты, получаемые при расчетах эффективности на основе себестоимости, и с какой осторожностью нужно относиться к выводам из них.

Что касается изложенной в данной главе методики, то она может быть непосредственно применена к определению эффективности вложения в целом. Такие расчеты фактически были проведены в некоторых рассмотренных ранее условных

примерах. Например, для металлургического комбината эффективность оказалась равной 30%, для электростанции — 45% (стр. 276, сноска). При этом существенно, что в указанных расчетах нашли объективное количественное отражение моменты, обычно учитываемые лишь качественно — напряженность баланса по выпускаемой продукции, дефицит материалов, нужных для строительства, загрузка транспорта и т. д.

В частности, возможность расчета абсолютной эффективности капиталовложения в целом позволяет правильнее учитывать эффект, достигаемый благодаря его осуществлению в других отраслях хозяйства, сопоставлять этот эффект с требуемыми затратами. Важно подчеркнуть, что полный экономический эффект определяется именно в результате такого сопоставления, и он проявляется не только в уменьшении затрат\*.

Поэтому такой расчет, помогая правильной экономической оценке соответствующих мероприятий, должен стимулировать выпуск наиболее нужной для народного хозяйства в данный момент продукции и притом высокого качества, а также стимулировать мероприятия по модернизации, совершенствованию и повышению эксплуатационных характеристик изготавливаемой продукции\*\*.

*ПЯТАЯ ОСОБЕННОСТЬ. Дается совершенно отчетливый принцип исчисления нормальной эффективности. Последняя определяется той экономией (повышением производительности труда), которая может быть достигнута за счет единичного капиталовложения в оптимальном плане (в единицу времени). Значение нормальной эффективности, которое определяется в процессе составления оптимального перспективного плана, обуславливается всей обстановкой — наличным уровнем техники, очередными задачами экономического развития и т. д.*

Вопрос о фактическом исчислении нормальной эффективности сложен и еще нуждается в разработке, тем не менее, поскольку выявлен с полной отчетливостью принцип ее исчисления, выше были указаны некоторые возможные подходы к ее приближенному расчету.

В других работах по вопросам эффективности капиталовложений вносились различные, как правило, недостаточно обоснованные предложения относительно выбора нормы эффективности. Например, З. Ф. Чуханов в качестве уровня нормальной эффективности предлагает принимать отношение объема произведенной продукции к объему основных фондов. Можно показать, что это неверно. Л. А. Вааг в цитированной работе рекомендует принять за норму эффективности

---

\*Например, некоторое повышение издательских расходов для достижения более высокого качества книги экономически оправданно, так как эти затраты многократно окупятся расширением круга читателей, экономией времени у читателя и большей пользой от книги. Характерный пример такого же рода приведен в речи З. Н. Нуриева на XXI съезде КПСС: «По данным Государственного научно-технического комитета Совета Министров СССР, доведение октановой характеристики автобензина до 76–80 единиц даст экономии на эксплуатационных расходах и капитальных затратах по автопаркам страны в пределах 6–8 млрд рублей» (Стенографический отчет. — Т. II. — С. 40–41).

\*\*На недостатки в этом отношении применяемых ныне экономических расчетов и экономических показателей справедливо указывает в своих ярких статьях авиаконструктор О. Антонов. См. «Знамя», 1957, № 2; «Известия», 15 февраля 1959 г.

(«процентный коэффициент») отношение чистого дохода общества к сумме основных и оборотных фондов (под чистым доходом общества автор понимает суммарный прибавочный продукт). Не входя в анализ этого предложения, которое автор считает даже единственно возможным и научным, отметим, что простой здравый смысл говорит о его неправильности. Например, при уменьшении личного потребления и соответствующем увеличении чистого дохода, а тем самым накоплений, определяемая по Л. А. Ваагу величина возрастет. Между тем ясно, что, наоборот, увеличение объема накоплений позволит реализовать и менее эффективные вложения, а потому эффективность (на единицу вложений) в таком случае должна несколько снизиться.

Интересен также отличающийся своеобразным дуализмом подход С. Г. Струмилина. С одной стороны, перенося на социалистическое хозяйство теорию товарного производства К. Маркса, он принимает долю прибавочного продукта (продукта для общества в составе стоимости) постоянной. По существу это сводится к тому, что стоимости оказываются пропорциональными себестоимости, и, казалось бы, никакой расчет эффективности вложений на этой базе не может быть построен\*. Однако С. Г. Струмилин все же вводит эффективность искусственно, обходным путем, посредством обесценения основных фондов как результата повышения производительности труда. Это по существу эквивалентно введению нормы эффективности со значением, равным росту производительности труда. Иначе говоря, им вводится принцип соизмерения разновременных затрат, исходящий из того, что уравниваются продукты единицы среднего труда в разные периоды. Такой принцип соизмерения — единый для всех случаев и не учитывающий конкретных условий — не представляется убедительным и не соответствует реальному смыслу и назначению показателя нормальной эффективности. Здесь можно повторить хотя бы то же соображение, которое было высказано по поводу предложения Л. А. Ваага.

Несколько ближе к нашему подходу предлагаемое Т. С. Хачатуровым\*\* построение показателя народнохозяйственной эффективности как отношения увеличения годовой продукции, достигнутого за счет капиталовложений, к объему годовых капиталовложений. Однако что касается исчисления этого показателя, то возможные статистические подходы для этой цели не вполне ясно описаны автором и далеко не бесспорны. При этом сам Т. С. Хачатуров рассматривает этот показатель лишь как некоторую характеристику народного хозяйства в целом, а не как нормальную эффективность, считая неправомерным ее использование для оценки отдель-

---

\*Правда, у С. Г. Струмилина получается некоторая разница в сроке окупаемости при переходе от расчета по себестоимости к расчету по стоимости. Однако она имеет причиной явное упущение. При учете произведенной продукции последняя берется не по себестоимости, а по стоимости; при расчете же основных фондов и амортизации соответствующая поправка (на продукт для общества) не вводится. Струмилин С. Г. Фактор времени в проектировках капитальных вложений. — Изв. АН СССР. — 1946. — № 3; его же: Задачи экономических наук в области автоматизации производственных процессов. Доклад на пленарном заседании АН, 1956; Об экономической эффективности новой техники. — М.: Изд-во АН СССР, 1958; Об эффективности новой техники // В помощь политическому самообразованию. — 1958. — № 2. — С. 108–120.

\*\*Хачатуров Т. С. Проблемы экономической эффективности капиталовложений в социалистическом хозяйстве // Вопросы экономики. — 1957. — № 2. С. 106; его же: Экономическая эффективность капиталовложений в народное хозяйство СССР. — М.: Изд-во АН СССР, 1958.

ных вложений, и рекомендует для этой цели специально установленные отраслевые нормативы.

Кроме самой формулы, определяющей уровень нормальной эффективности, все перечисленные предложения, включая и предложение Т. С. Хачатурова, отличаются от развиваемого в настоящей работе подхода тем, что расчеты эффективности строятся на основе себестоимости и действующих цен, а не о. о. оценок, и исходя из действующего, а не оптимального плана.

А. И. Ноткин\* и некоторые другие пытаются определять срок окупаемости на основе среднего срока службы или срока морального износа машины. Но это означает подмену экономического показателя техническим, притом совершенно иной природы, что недопустимо. Также недопустимо смешение срока окупаемости со сроком возврата затрат. Объект с малым сроком службы может обеспечить короткий срок возврата вложения, даже при весьма небольшой его эффективности, и наоборот, гораздо более эффективное вложение с большим сроком службы будет иметь более длительный срок возврата. Поэтому краткосрочные банковские ссуды предприятиям стимулируют не столько наиболее эффективные вложения, сколько вложения с коротким сроком службы. В частности, поэтому совершенно не основательно заключение З. В. Атласа\*\* о том, что трехлетний срок ссуд Госбанка и шестилетний срок ссуд Промбанка фактически означают принятие срока окупаемости, равного соответственно 3 и 6 годам (или нормы эффективности 35% и 18%). Следует сказать, что смешение сроков окупаемости со сроками службы и сроками возврата нередко встречается и на практике.

Во многих предложениях проблема определения нормальной эффективности или срока окупаемости оставалась открытой, и не приводились не только их возможные значения или возможная методика их расчета, но не указывались и сами принципы их определения. Даже в тех случаях, когда авторы называют конкретные сроки окупаемости, обычно они их не мотивируют.

Между тем выбор величины нормальной эффективности очень важен. Сама возможность применения принципа нормирования эффективности и его ценность существенно зависят от правильности принятого числового значения нормальной эффективности или допустимого срока окупаемости при нормировании его. Поэтому выбор этих значений без обоснований недопустим.

Среди авторов, выдвигавших тезис о существовании единой нормы эффективности, следует особо назвать В. В. Новожилова, систематически развивавшего, начиная с 1938–1939 годов, это положение. В частности, важной его заслугой является предложение об определении значения нормальной эффективности путем отбора наиболее эффективных вложений, которые удастся реализовать при наличных средствах для капиталовложений, а также обоснование такого подхода соображениями, основанными на рассмотрении народнохозяйственного эффекта\*\*\*.

---

\* Ноткин А. И. Вопросы определения экономической эффективности капитальных вложений в промышленность СССР. — М.: Изд-во АН СССР, 1953.

\*\* Атлас З. В. О рентабельности социалистических предприятий // Вопросы экономики. — 1958. — № 3. — С. 115–126.

\*\*\* Новожилов В. В. Методы соизмерения народнохозяйственной эффективности плановых и проектных вариантов // Труды Ленингр. Индустриального ин-та. — 1939. — № 4. В менее

Таким образом, предложения В. В. Новожилова по своим исходным установкам наиболее близки к нашим. В то же время принцип сравнения эффективности данного вложения с нормальной даже в форме, данной В. В. Новожиловым, не является, по нашему мнению, достаточно оправданным, поскольку он предлагает пользоваться в расчетах достигаемой экономии и затрат на вложение исчисленной обычным образом себестоимостью. Даже внесение некоторых поправок на дефицитность в размерах экономии и затрат, введившихся позднее В. В. Новожиловым, не спасает положения. Не отдельные поправки, а только систематическое построение оценок, определенных в соответствии с конкретной обстановкой и оптимальным планом, т. е. объективно обусловленных оценок, может привести к цели. Ограниченную применимость принципа сравнения с нормальной эффективностью в первоначально предложенной В. В. Новожиловым форме признавал и он сам, рекомендуя его использование только при сопоставлении вариантов и с другими оговорками\*.

Остановимся еще на одном вопросе, который дискутировался в литературе, в частности, в работах В. В. Новожилова и Т. С. Хачатурова — относительно того, как должна применяться норма эффективности, как крайняя, т. е. с отказом, как правило, от вложений с меньшей эффективностью, или как средняя?

При излагаемом комплексном подходе, когда оптимальный план, соизмерение продукции и эффективность взаимно согласованы, данная проблема вообще не возникает — в основной массе все осуществляемые вложения имеют примерно одну и ту же эффективность, совпадающую с объективно обусловленной нормальной эффективностью. Лишь в процессе улучшения плана могут появляться возможности вложений с большей эффективностью.

**ШЕСТАЯ ОСОБЕННОСТЬ.** *Обосновывается применение единого уровня нормальной эффективности для всех отраслей народного хозяйства.* Во всяком случае, представляются неоправданными значительные отклонения от него.

Справедливость этого положения, вытекающая из единства социалистического народного хозяйства, его плана и экономических показателей, достаточно подробно обоснована в тексте данной главы. Этот вывод нуждается, однако, в пояснении, так как на первый взгляд идет вразрез с мнением ряда экономистов о необходимости установления дифференцированных по отраслям норм эффективности и сроков окупаемости.

---

развитой форме сходный подход давался еще ранее, см. Юшков Л. П. Основной вопрос плановой методологии // Вестник финансов. — 1928. — № 10.

\*Последующие работы В. В. Новожилова уже в той или иной мере учитывают разработки автора данной книги и идут параллельно по времени с нашими исследованиями в данном вопросе, но, как правило, рассматривают его в ином аспекте. См.: Новожилов В. В. Практические методы соизмерения себестоимости и вложений // Труды Ленингр. Политехнического ин-та. — 1941; его же: Методы нахождения минимума затрат в социалистическом хозяйстве. — Там же. — 1946; Способы нахождения максимума эффективности в социалистическом хозяйстве // Труды Ленингр. финансово-экономического ин-та. — 1947; Законы и методы измерения затрат и результатов эффективности новой техники. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. Близкими по подходу являются также работы А. Л. Лурье. См., например, Лурье А. Л. Методы сопоставления эксплуатационных расходов и капиталовложений при оценке технических мероприятий // Вопросы экономики железнодорожного транспорта. — 1948.

Причина такого расхождения в различном понимании эффективности. Ее величина, найденная по о. о. оценкам (по полным затратам), оказывается совсем иной, чем исчисленная на основе себестоимости (только по непосредственным, видимым затратам). По этой причине отпадают обычно выдвигаемые возражения против применения принципа единой нормы эффективности.

Не будем останавливаться на возражениях, основанных просто на недоразумении, когда, например, иные склонны считать, что одинаковое нормирование эффективности означает равное внимание к различным отраслям и равные капиталовложения в них. Мы уже не раз говорили, что вес отраслей, размер капиталовложений в них определяется в основном плановыми заданиями по составу конечной продукции, а не эффективностью; план и его показатели определяются уже с учетом этих заданий. Аналогичным образом равная норма эффективности никак не означает одинаковой технической оснащенности разных отраслей, так как по своему характеру отрасли тяжелой промышленности имеют иную структуру капитала, и при правильных оценках продукции большие капиталовложения в эти отрасли весьма эффективны. Только привычка, от которой трудно отрешиться, имеющая происхождением, в частности, заниженные цены на продукцию тяжелой промышленности, приучила к мысли, что вложения в эти отрасли менее рентабельны, чем в легкую промышленность.

В то же время игнорирование принципа единой нормы эффективности, установление резкой разницы в уровнях эффективности отдельных отраслей может навредить и тем и другим отраслям. Например, вложения в механизацию или автоматизацию некоторой отрасли легкой промышленности (или сельского хозяйства), если они при сравнительно небольшом объеме позволяют высвободить рабочую силу, нужную в тяжелой промышленности, могут оказаться гораздо полезнее для нее, чем малоэффективное вложение тех же средств в саму промышленность. Впрочем, понятно, что подобное может относиться лишь к небольшой части капиталовложений, поскольку вес тяжелой промышленности в общем объеме производства, а также органическая структура капитала в ней предопределяют направление подавляющей доли капиталовложений в отрасли первого подразделения. Это соответствует и наибольшей эффективности капиталовложений (по правильному расчету).

Даже в тех случаях, когда некоторые производственные мощности нужны в большем объеме, чем это требуется для выпуска заданного количества конечной продукции, необходимые для этого капиталовложения окажутся оправданными, ибо тогда, как мы говорили, сами производственные мощности будут конечным продуктом и в качестве такового должны входить в плановое задание. Определенные различия в уровнях эффективности одних отраслей по сравнению с другими могут вызвать некоторые внеэкономические соображения\*. Однако, во всяком случае, резкие различия неоправданны.

Ряд других возражений против единой нормы эффективности связан со способом подсчета эффективности и должен отпасть при ее подсчете по о. о. оценкам. В частности, это относится к некоторым возражениям, которые выдвигались Т. С. Хачатуровым, детально анализировавшим данный вопрос. Например, он

---

\*См. цитированную работу Т. С. Хачатурова («Вопросы экономики», 1957, № 2).

указывает, что менее эффективные вложения в отрасли тяжелой промышленности могут делаться с целью снижения расхода дефицитных материалов или слишком больших затрат рабочей силы. Однако если бы в расчете были использованы о. о. оценки, в них нашли бы отражение и дефицитность материала и правильная оценка высвобождаемой рабочей силы, и тогда данное вложение, если оно, в самом деле, целесообразно, оказалось бы эффективным и по расчету.

Все сказанное до сих пор относилось к эффективности, исчисляемой на основе о. о. оценок. Что же можно сказать относительно эффективности, рассчитываемой по обычной калькуляции?

Применение в таком случае единой нормы эффективности представляется неоправданным в силу дефектов в исчислении эффективности, из-за которых ее величина резко отличается от действительного народнохозяйственного эффекта (определяемого по о. о. оценкам). Более того, в этом случае, по нашему мнению, неоправданно применение единой нормы эффективности и в пределах отрасли.

Весьма убедительный аргумент против дифференциации сроков окупаемости по отраслям приводился М. А. Стыриковичем. Поскольку сторонники отраслевых норм эффективности допускают учет вложений в смежные отрасли, они тем самым уравнивают возможности вложений в разные отрасли и по существу уравнивают нормы эффективности для разных отраслей при учете удельных капиталовложений. У сторонников дифференцированной нормы эффективности (Т. С. Хачатуров, З. Ф. Чуханов и др.) мы не находим убедительных обоснований для применения единой внутриотраслевой нормы эффективности, а их же возражения против единой общей нормы в большой мере сохраняют силу и в отношении единой нормы в пределах отрасли.

Мы, правда, упоминали выше, что если структура себестоимости во всех вариантах примерно одинакова, так же как и структура капиталовложений, то найденные по обычной калькуляции величины их эффективности будут отличаться от истинных только постоянным искажающим множителем. Это соображение оправдывало бы применение дифференцированных по отраслям норм, если бы в пределах отрасли была одинаковой структура затрат. Однако каждому понятно, что такое предположение не слишком правдоподобно, если говорить о сопоставлении сколько-нибудь существенно отличающихся вариантов, так что приведенное соображение является шатким аргументом в пользу дифференциации норм.

Несомненно, что сколько-нибудь точная оценка эффективности возможна либо при правильной народнохозяйственной оценке затрат и результатов, либо, в случае применения обычной калькуляции, при внесении в расчет тех или иных коррективов, приближающих их величины к истинным. В этих случаях возражения против единой нормы отпадают. Дифференциация же нормы эффективности по отраслям вместо внесения коррективов в расчеты не может, как нам представляется, принести пользы.

Выше мы говорили о том, что социалистическое народное хозяйство обеспечивает весьма высокий уровень эффективности вложений. Высказанное утверждение относится к правильно исчисленной эффективности. Напротив, установление высокого уровня эффективности (даже дифференцированного по отраслям) и механическое его применение в расчетах по эффективности на основе себестоимости

может нанести значительный ущерб. Вследствие искажений, даваемых таким расчетом, могут оказаться нерациональными некоторые действительно весьма важные и эффективные для народного хозяйства вложения (и наоборот, покажутся оправданными малоэффективные проекты).

*СЕДЬМАЯ ОСОБЕННОСТЬ. Учет конкретной обстановки, в частности, временных отклонений при исчислении эффективности данного вложения.* Существенной особенностью расчета эффективности, построенного на основе оптимального перспективного плана и динамической системы о. о. оценок, является его конкретный характер. Благодаря использованию о. о. оценок, соответствующих реальной обстановке, в расчете учитываются те особенности состояния экономики, которые связаны с фактическим ее развитием, отражают отдельные исторические оправданные диспропорции, а также наслоения, вызываемые изменением потребностей, появлением новых технических средств и т. д.

Эти диспропорции вызывают повышение о. о. оценок особо дефицитных в данный момент видов продукции, понижение оценок продукции, для изготовления которой имеются свободные производственные мощности и т. д. Конкретный учет обстановки важен как при оценке продукции и текущих затрат, в особенности в первые годы действия вложения, так и при оценке затрат — при выборе варианта его осуществления, в частности, используемых материалов.

Например, производственные мощности авиационной промышленности, оказавшиеся в послевоенный период значительно превышающими потребности страны, делали экономически оправданным более широкое использование авиации в народном хозяйстве. Это должно было получить отражение в пониженной по сравнению с ее нормальным значением прокатной оценке этих мощностей и соответственно в пониженных о. о. оценках самолетов и воздушного транспорта. Такие отклонения, а иногда и частичные диспропорции объективно неизбежны, в особенности в современных условиях. Учет этого в анализе через о. о. оценки и их динамику, определенную хотя бы в самой приближенной форме, представляет существенное преимущество развиваемого здесь подхода к расчету эффективности вложений. Этой конкретностью он отличается не только от расчета по обычно исчисляемой себестоимости или действующим ценам, но также и от расчетов по ценам, построенным по типу цен производства.

Нам представляется, что полную ясность в вопрос вносит сопоставление таких цен с нормальными оценками. Впрочем, нормальные оценки имеют то преимущество по сравнению с ценами производства, что построены на основе нормальной эффективности, а не взятого произвольно или недостаточно обоснованного процента на произведенное вложение. Однако, как уже упоминалось (стр. 282–284), о. о. оценки существенно отклоняются от своих нормальных значений, а потому последние могут использоваться в анализе эффективности вложений лишь как приближенные и вспомогательные величины.

*ВОСЬМАЯ ОСОБЕННОСТЬ. Отчетливое выяснение относительности критерия нормальной эффективности, путей уточнения расчетов по эффективности и их необходимости.* Из проведенного в свое время анализа ясно, что критерий нормальной эффективности в его простейшей форме рассматривался нами лишь



как самый первоначальный подход к вопросу об эффективности вложений. Он является приближенным, ориентировочным, справедливым только при ряде упрощающих предположений: отсутствие относительных изменений в оценках, постоянство значения нормальной эффективности и т. д. Одновременно в процессе этого анализа было показано, какие изменения должны быть внесены в расчет для достижения большей его точности: учет динамики оценок, сопоставление затрат и продукции за все время действия вложения и др. Иной, видоизмененный расчет должен, как отмечалось, применяться по отношению к особенно крупным (неделимым) вложениям; кроме того, должны вноситься коррективы, связанные с учетом внеэкономических соображений. Напротив, авторы других предложений по расчету эффективности, как правило, ограничиваются формулировкой положения об использовании нормы эффективности, но не вскрывают его относительности, ограниченности характера и необходимости уточнений, что может приводить к неправильным применениям этого критерия.

В заключение обзора необходимо подчеркнуть, что предложения производить расчеты по срокам окупаемости и по эффективности на основе цен, построенных по типу цен производства, несмотря на перечисленные их недостатки и неполноценность, все же являются прогрессивными. Они намного разумнее тех подходов, при которых в экономическом анализе капиталовложений вовсе игнорируется связывание (задолженность) средств и фактор времени или они учитываются только качественно.

Действительно, указанные предложения все же в той или иной степени согласуются с выводами относительно эффективности капиталовложений, вытекающими из систематического изучения оптимального плана. Поэтому при правильном, недогматическом, конкретном применении таких расчетов, при внесении в эти расчеты коррективов, направленных на наиболее полную оценку народнохозяйственного эффекта и затрат, связанных с осуществлением вложения, они могут принести известную пользу. Но вполне удовлетворительное решение вопросов эффективности возможно, по-видимому, только при условии рассмотрения их в комплексе с проблемами перспективного планирования и ценообразования с позиции оптимального народнохозяйственного плана.

**Заключение.** Отметим некоторые как общие, так и конкретные практические выводы, к которым приводит анализ вопроса об эффективности капиталовложений.

1. Проблема оценки эффективности капиталовложений является чрезвычайно актуальной для строительства коммунистического общества.

2. Наличие в социалистическом бескризисном плановом хозяйстве реальной возможности постоянно использовать средства на капиталовложения с весьма высокой эффективностью предъясвляет особенно строгие требования к правильности выбора направлений их использования, которое должно контролироваться путем расчета эффективности вложений. В частности, систематическое ведение такого расчета, хотя бы в самой приближенной форме, позволит оценить ущерб от малоэффективных вложений, от распыления средств и растягивания сроков строительства и ввода объектов в эксплуатацию и поможет устранить такие потери. В то же время такой расчет способствовал бы выявлению и скорейшей реализации наибо-

лее эффективных мероприятий, в том числе некоторых краткосрочных вложений, ускорению внедрения наиболее эффективной новой техники.

3. Систематический и правильный расчет эффективности капиталовложений является базой для решения всех вопросов перспективного планирования, таких как оценка эффективности новой техники, техническая политика, распределение средств по вариантам вложений, определение типа, размера и размещения предприятий.

4. Расчет эффективности весьма существен для правильного решения ряда вопросов, связанных с кратковременными вложениями, а также с быстрореализуемыми мероприятиями в области организации производства, в частности, следующих: выбор оптимального размера партии деталей, объема и состава задела; оценка целесообразности применения специальных приспособлений и инструмента; сопоставление технологических процессов с различной длительностью производственного цикла; распределение средств между текущим производством продукции и подготовительными работами.

5. В следующих важных вопросах анализ эффективности способствовал бы наилучшему их решению: определение целесообразного уровня механизации отдельных отраслей и процессов (показал бы нецелесообразность резких различий в уровнях механизации, преимущества комплексной механизации); оценка экономического эффекта автоматизации и правильный выбор очередности ее осуществления; определение оптимальных сроков строительства (выявил бы экономические преимущества скоростного строительства); целесообразное распределение грузопотока по видам транспорта (установил бы, например, экономические преимущества в ряде случаев водного транспорта и желательность его использования); выбор направлений наиболее эффективного развития и расширения дорожной сети (экономический эффект, очередность, типы дорог).

6. Правильно произведенный расчет эффективности, в особенности расчет абсолютной эффективности, существен для определения полного народнохозяйственного эффекта от использования продукции в других отраслях народного хозяйства, для сопоставления эффекта у потребителей продукции, в частности, экономического эффекта от повышения ее качества, с затратами по ее изготовлению. Это экономически стимулировало бы первоочередной выпуск наиболее нужной продукции, выпуск продукции высокого качества, проведение мероприятий, направленных на совершенствование и модернизацию продукции.

7. Анализ эффективности капиталовложений должен строиться в соответствии с общим перспективным планом, что обеспечит органическое сочетание балансового и стоимостного подходов.

8. Совершенствование расчетных методов в анализе эффективности и выборе вариантов капиталовложений, направленных на получение оптимальной системы решений, требуют всестороннего использования современных математических методов решения экстремальных проблем (линейное и динамическое программирование и др.) и электронных счетных машин.

9. Построение оптимального перспективного плана с использованием современных математических средств даст возможность одновременно получить оценки продукции и производственных факторов для каждого момента времени. Эти

оценки позволяют соизмерять разного рода затраты и результаты, относящиеся к различным моментам времени.

10. В вопросах планирования капиталовложений существенное значение имеет знание величины нормальной эффективности (для народного хозяйства в целом в каждый момент времени), которая непосредственно связана с динамикой о. о. оценок. Размер нормы эффективности, применяемый для решения вопросов о капиталовложениях по отдельным отраслям, должен быть, как правило, близок к этой единой нормальной эффективности.

11. Применение расчетов по эффективности вложений и оптимальному перспективному планированию требует совершенствования и существенного обогащения системы основных экономико-статистических показателей.

Для характеристики объема производства должен использоваться показатель чистой продукции, построенный на основе о. о. оценок. Систематически должны строиться показатели, характеризующие производственные резервы и возможности, степень использования оборудования и т. д. Эти показатели, помимо расчетов, связанных с построением оптимального плана, должны получить отражение в хозяйственном расчете.

12. Конечной характеристикой данного конкретного вложения является сопоставление достигаемого с его помощью эффекта, его вклада в продукцию народного хозяйства в течение ряда лет, с затратами, связанными с его осуществлением.

13. Простейшим показателем эффективности конкретного вложения является отношение достигаемой благодаря нему годовой экономии к затратам на его осуществление. Эта величина сопоставляется с нормальной эффективностью для данных условий и данного момента. Более точные расчеты по эффективности должны учитывать возможные результаты реализации вложения в течение всего срока его действия, перспективы развития производительных сил в целом, отраженные в динамике о. о. оценок, и т. д.

14. Сравнение вариантов и оценка целесообразности дополнительных вложений на основе срока окупаемости, подсчета эффективности дополнительных вложений и сопоставления приведенных себестоимостей (с добавлением доли удельных капиталовложений) для простейших случаев эквивалентны по результатам, но последним двум способам нужно отдать предпочтение. Наиболее точен, удобен и универсален способ, основанный на приведении затрат и эффекта вложения за все время его действия к одному моменту. Для простейших случаев он эквивалентен названным, но в то же время позволяет учитывать: изменение нормальной эффективности по годам, фактические сроки строительства и распределение затрат в течение этого срока, изменение объема выпуска продукции и удельных затрат, народнохозяйственный эффект производимой продукции и его динамику, затраты на капитальный ремонт и реновацию по их фактическим размерам и срокам, моральный износ. Он дает возможность рассчитать эффективность не только относительную — дополнительных вложений, но и абсолютную — народнохозяйственную эффективность вложения в целом.

15. При расчете эффективности вложения существенно, чтобы при оценке его экономического эффекта — оценке продукции, эксплуатационных затрат, а также затрат, связанных с его осуществлением, все они были подсчитаны правильно. Для

этого необходимо, помимо наличия обоснованных технических данных, знание оценок продукции, отвечающих полным общественным затратам на нее (о. о. оценок), в частности, существен учет, наряду с видимыми затратами, косвенных (земельная рента, прокатная оценка оборудования). Поэтому очень важной является задача разработки системы таких оценок, прежде всего, для планово-экономических расчетов.

16. Без использования о. о. оценок само положение о единой норме эффективности может применяться лишь с крайней осторожностью.

Замена оценки продукции себестоимостью (или действующей ценой) несколько более оправдана в расчете эффективности дополнительных вложений при одинаковой структуре всех затрат. В остальных случаях необходимо вносить в производимые расчеты те или иные коррективы, направленные на приближение результатов расчета (прежде всего, за счет анализа структуры затрат) к истинной оценке народнохозяйственной эффективности данного вложения.

17. Использование оценок продукции и нормальной эффективности, полученных на основе оптимального перспективного плана, дает возможность известного отделения задачи общего планирования от задачи выбора конкретного экономического решения, но в то же время при этом обеспечивается их согласованное решение. Именно, полученные в результате анализа общего народнохозяйственного плана показатели позволяют дать отдельным предприятиям и проектным организациям в удобной форме те сведения об общей обстановке, которыми надлежит руководствоваться наряду с программным заданием. Это делает возможной известную децентрализацию экономических решений, притом такую, что обеспечивается соблюдением общегосударственных интересов.

Применение этих показателей позволит также с большей гибкостью и оперативностью вносить изменения в план в соответствии с изменениями обстановки и условий, все время оставляя его практически наилучшим (по отношению к новым требованиям).

18. Анализ эффективности капиталовложений и, в частности, положение о существовании нормальной эффективности при данных условиях позволяют сделать важные выводы по вопросам ценообразования. Именно, этот анализ показывает, что отклонение о. о. оценок от себестоимости, связанное с учетом косвенных затрат для тех видов продукции и услуг, в производстве которых используется сложное и дорогостоящее оборудование или благоприятные природные ресурсы, — уголь, нефть, газ, черные и цветные металлы, цемент, электроэнергия, транспорт — представляет не случайное явление, вызванное их временной дефицитностью, а носит систематический характер. Поэтому постоянный учет использования оборудования в ценах на продукцию необходим для правильного отражения народнохозяйственных затрат на ее изготовление, а следовательно, и для правильного решения вопросов, относящихся к их производству и распределению, мероприятиям по повышению их выпуска или их экономии и замене.

19. Устранение систематических неправильностей в оценках продукции, вызванных исчислением затрат вне зависимости от условий приложения труда (косвенных затрат), а также учет в оценках конкретной обстановки обеспечит большую реальность соотношений ценности различных видов продукции и услуг. Это долж-

Таблица 47

Результаты оснащения отрасли машинами за 10 лет по 2-м вариантам

Год	Вариант I – сначала А, а затем Б				валовая продукция	Вариант II – сразу Б			
	число машин		накопления			число машин Б	накопления		валовая продукция
	А	Б	за год	сумма остатка			за год	сумма остатка	
1-й	100	–	74,0	0,4	100,0	10	47,4	– 0,6	68,0
2-й	162	3	115,7	4,1	145,6	16	63,8	– 0,8	84,8
3-й	162	17	154,1	6,2	184,8	24	85,8	5,0	107,2
4-й	128	36	187,8	2,0	217,6	34	113,2	– 1,8	135,2
5-й	80	60	227,6	5,0	256,0	49	154,2	0,4	177,2
6-й	24	88	274,1	183,7	300,8	68	206,3	– 1,3	230,4
7-й		100	294,0	477,7	320,0	94	277,6	228,3	303,2
8-й		100	294,0	771,7	320,0	100	294,0	522,3	320,0
9-й		100	294,0	1065,7	320,0	100	294,0	816,3	320,0
10-й		100	294,0	1359,7	320,0	100	294,0	1110,3	320,0
Всего за 10 лет			2206,3	1359,7	2484,8		1830,3	1110,3	2066,0

но привести к более полному соответствию между материальными и денежными балансами, поднять значимость рубля в планировании, экономическом анализе и хозрасчете.

20. Совершенствование методов перспективного планирования и расчета экономической эффективности капиталовложений должно способствовать быстрейшему развитию производительных сил, наиболее полному раскрытию и использованию возможностей и преимуществ, заложенных в социалистической системе хозяйства.

<sup>i</sup> ПРИМЕР 4. Котел работает на нефти, затрачивая ежедневно 20 тонн. Предлагается заменить его котлом, работающим на торфе, с ежедневным расходом 100 тонн торфа. Затраты на новый котел и его установку 500 тыс. руб. (по н. ц. оценкам), срок монтажа — четыре месяца. Н. ц. оценка нефти — 1000 руб. тонна, торфа — 40 руб. тонна, нормальная эффективность 10% в месяц. Определить целесообразность мероприятия.

Ежемесячная экономия по н. ц. оценке  $30 \times (20 \times 1000 - 100 \times 40) = 480$  тыс. руб. Ввиду большого срока службы котла полная экономия будет практически совпадать с чистой экономией. Оценка затрат на котел к моменту пуска его в эксплуатацию  $500\,000 \times (1 + 4 \times 0,10) = 700$  тыс. руб. Эффективность вложения  $480 : 700 = 68\%$ . Мероприятие явно целесообразно.

<sup>ii</sup> См. табл. 47, взятую из статьи М. Вирченко и Г. Пузановой «О возможностях применения объективно обусловленных оценок в экономических исследованиях», «Вопросы экономики», 1967, № 3, стр. 111–121.

<sup>iii</sup> «Достаточно подвергнуть элементарному экономическому анализу результаты подсчета экономической эффективности по сложным процентам, чтобы убедить-

ся в нелепости получаемых при этом результатов», А. Е. Пробст. *Экономическая эффективность новой техники (Методология определения)*. Госполитиздат, 1960 г. (с. 65) (*Прим. ред.*)

<sup>iv</sup> Мы говорили, что даже при одинаковой степени экономического развития технические решения, оправданные в капиталистическом хозяйстве, не должны у нас механически перениматься, хотя их не следует и игнорировать. Это в равной степени относится ко всем вопросам технической политики — выбору типов предприятий и отдельных машин, определению степени концентрации и специализации производства, размещению предприятий и межотраслевым пропорциям. Все эти вопросы необходимо решать исключительно на основе экономического анализа и расчета, исходя из текущего состояния экономики и перспектив ее развития. А для этого необходимо знать величину нормальной эффективности.

Сколько-нибудь точно оценить величину нормальной эффективности, которая отвечала состоянию народного хозяйства СССР в разные годы, можно было бы только на основе тщательного анализа многочисленных данных. Мы не ставим перед собой такой задачи, а хотим лишь высказать некоторые соображения по поводу порядка этой величины.

Известно, что в довоенные годы в развитых капиталистических странах действовала норма прибыли порядка 4–6% в год. В силу приведенных выше соображений мы полагаем, что социалистическая экономика, столь же технически развитая, может расти, по крайней мере, вдвое быстрее, а потому нормальная эффективность для нее должна быть порядка 10%. Иными словами, в ней длительное время имелись бы возможности для вложений именно с такой эффективностью.

Однако есть ряд существенных факторов, которые должны были привести к значительному повышению нормальной эффективности, а именно:

1. Техническая отсталость России, существовавшая всегда и еще усилившаяся в годы Первой мировой и Гражданской войн. Это открывает для применения новой техники ранее неиспользованные возможности с исключительно высоким эффектом.

2. Большая нужда в капиталовложениях, первоначально для восстановления основных фондов, которые изнашивались и не возобновлялись в течение почти десяти лет, а затем для оснащения новой техникой как промышленности, так и сельского хозяйства.

3. Средства для вложений ограничивались почти исключительно собственными накоплениями хозяйства; внешние займы играли незначительную роль.

Сопоставление громадной нужды в капиталах для покрытия амортизации и для реализации чрезвычайно эффективных новых вложений с ограниченностью средств на эти цели позволяет считать величину нормальной эффективности, по крайней мере, в два-три раза большей, даже если бы степень хозяйственного развития была бы такой же, как в передовых капиталистических странах. Но хозяйственное развитие никак нельзя считать таким же, так как даже в 1939–1940 гг. мы не догнали передовые страны в экономическом отношении.

Все сказанное позволяет считать, что в течение всего периода восстановления промышленности, реконструкции и грандиозного строительства Сталинских

пятилеток, значение нормальной эффективности не опускалось ниже 20–30%, а в некоторые годы было, несомненно, еще выше. Этот тезис следует понимать в том смысле, что во все указанные годы имелись возможности вложений, покрывающих средства, предназначенные на эти цели, с эффективностью не меньшей 20%. Фактически же не реализовывались некоторые возможности вложений с еще большей эффективностью.

<sup>v</sup> Теоретическое рассмотрение показывает, что размер нормальной эффективности для долговременных и для краткосрочных вложений должен быть одним и тем же и, возможно, лишь незначительно большим для краткосрочных. Таким образом, «жесткое гонение» на оборотные средства является неоправданным. Это положение сохраняет свою актуальность и сейчас, в военное время.

Следует, наконец, остановиться на вопросе об оценке величины нормальной эффективности в настоящий момент. Ее величина, по нашему убеждению, должна возрасти в несколько раз по сравнению с довоенным временем. С одной стороны, это обусловлено необходимостью перевода большей части промышленности на новые виды продукции, требующее значительных вложений, эффективность которых очень высока. С другой — крайней ограниченностью средств на вложения, вызванной необходимостью выпускать в основном продукцию, нужную для немедленного обеспечения фронта. Поэтому мы считаем, что сейчас величина нормальной эффективности должна быть не менее 50–100% в год. В силу отмеченных обстоятельств наилучшее использование имеющихся небольших средств для вложений имеет в настоящий момент чрезвычайное значение, а потому экономический расчет здесь важен, как никогда.

Подход к этому вопросу с мерками и традициями довоенного времени или принятие решений на глаз, без всяких мерок может нанести огромный ущерб. Напротив, даже самая грубая оценка нормальной эффективности и примерный учет ее сразу же даст большой эффект. Так, если значение нормальной эффективности действительно будет оценено в пределах от 50 до 100%, то следует отказываться от любых вложений с эффективностью меньше 50% в год и, безусловно, предоставлять денежные и материальные средства для вложений с эффективностью 200% в год (во всех случаях эффективность следует определять, пользуясь н. ц. оценками).

<sup>vi</sup> Существует в корне неправильное мнение, что в условиях военного времени при решении вопросов о распределении вложений невозможно считаться с экономическими соображениями. Имеется столько мест, где вложения представляются абсолютно необходимыми, а средства для капиталовложений так ограничены, что невозможно выбирать. В действительности потребности мест, где вложения кажутся абсолютно необходимыми, все равно превосходят имеющиеся средства, так что выбирать все же приходится. Расчет эффективности, учитывающий с помощью н. ц. оценок конкретную обстановку момента, позволяет заменить качественную оценку объективным количественным анализом, оценить, в какой мере данное вложение «абсолютно необходимо», какому из требований отдать предпочтение. И конечно, такой анализ будет точнее, чем просто оценка на глаз.

<sup>vii</sup> **Вывод 26.** Следствием предыдущего вывода и ряда других факторов явился весьма высокий уровень нормальной эффективности в СССР во все годы социалистического строительства. Он еще значительно вырос в военное время. Поэтому

решение вопросов, связанных с капиталовложениями, особенно в военное время, без учета нормальной эффективности не обеспечивает наиболее быстрого развертывания производительных сил, максимального роста необходимой фронту продукции.

Следует сказать, что предложения по количественному учету задолженности средств как важного фактора при решении вопроса о целесообразности вложений вносились в разное время отдельными экономистами и специалистами в области техники как в форме прямого учета процента от стоимости вложения, так и в завуалированном виде — через допустимый срок окупаемости объекта. Принципиальные отличия нашего предложения заключаются в следующем:

*Во-первых*, само предложение исходит не из механического переноса категорий капиталистического хозяйства на социалистическую экономику, а из прямого ее анализа, который показывает, что учет нормальной эффективности обеспечивает наилучшее использование возможностей роста ее производительных сил.

*Во-вторых*, значение нормальной эффективности выбирается не произвольно, как это делает большинство авторов, а определяется на основе методики, позволяющей найти это значение в конкретных условиях экономического развития страны в данный момент, благодаря чему эта величина вполне реальна.

*В-третьих*, предлагаемый наряду с этим метод н. ц. оценок позволяет правильно, без искажений подсчитать как объем вложения, так и его эффект. Без такого подсчета само положение о возможности применения единого значения нормальной эффективности становится ошибочным.

В заключение, не рассматривая здесь этот вопрос с необходимой обстоятельностью, остановимся на влиянии величины нормальной эффективности на оценки продукции. В свое время мы указывали на важность учета через прокатную оценку фактора занятости оборудования в оценке продукции. Мы упомянули также, что это такой фактор, с которым нужно считаться постоянно, а не только временно в связи с дефицитом того или иного оборудования. Теперь мы можем уточнить эти замечания.

Мы включали в оценку продукции долю прокатной оценки машины. Если эта прокатная оценка настолько высока, что вложение в эту машину целесообразно при данном уровне нормальной эффективности, мы его сделаем и произведем дополнительное количество этих машин. В результате будет возрастать производство данной продукции, а ее н. ц. оценка и прокатная оценка машины будут падать до тех пор, пока эффективность вложений в эту машину окажется не выше нормальной. Значение прокатной оценки машины для этого момента следует считать нормальным, так как дальше снижаться оно не будет. Поэтому и н. ц. оценку продукции, включающую соответствующую часть этой нормальной прокатной оценки, тоже можно считать ее нормальной оценкой. *При наилучшем распределении вложений и при постоянном составе конечной продукции н. ц. оценки должны приближаться к этим нормальным значениям.* В этих условиях нормальная оценка может измениться только в случае изменения значения нормальной эффективности или открытия нового способа производства данной продукции.

Таким образом, нормальная н. ц. оценка имеет известное сходство с ценой производства. Но использовать эту нормальную оценку вместо н. ц. оценки нельзя, так как хотя она в среднем и правильно отражает фактор использования оборуду-



дования, но не учитывает конкретных условий данного момента: потребности в продукции, недостатка оборудования, дефицита сырья и т. п. А в вопросах планирования и экономического расчета игнорировать эти условия недопустимо. Однако в расчетах, связанных с долговременными вложениями, в которых трудно предвидеть конкретные изменения н. ц. оценок, вполне допустимо и даже целесообразно использовать вместо них нормальные значения.

## Математическая постановка задач оптимального планирования

В этом приложении дается общая математическая формулировка и анализ тех задач о нахождении оптимального (наилучшего) плана, которые в основном тексте книги были изложены описательно и лишь проиллюстрированы конкретными числовыми примерами.

Такое обобщенное и более формальное изложение, требующее известной математической подготовки, позволяет глубже понять имеющиеся количественные связи и дает более ясное представление об области применения сделанных выводов. Математическая формулировка необходима и для овладения техникой решения рассматриваемых задач в сложных случаях, когда имеется большое число различных факторов (описанию методов решения посвящено Приложение II).

Однако мы и здесь по возможности ограничивались сравнительно элементарным математическим аппаратом, стараясь быть доступными для лиц, не являющихся специалистами-математиками. Это обстоятельство, а также небольшой объем приложения заставили отказаться от изложения результатов в их полной математической общности и от анализа некоторых особых случаев.

**Задача о распределении программы**<sup>1)</sup>. Общая формулировка этой задачи, описанной в § 1 главы I, такова:

Имеется  $m$  производственных участков (предприятий, станков, машин), на которых необходимо производить  $n$  различных продуктов (видов работ) в заданном ассортименте. Ассортиментный набор состоит из  $k_1, k_2, \dots, k_n$  единиц продуктов вида (1), (2),  $\dots$ , ( $n$ ) соответственно. Известна производительность каждого участка по каждому продукту: если на  $i$ -м участке ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) производится  $j$ -й продукт ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), то в единицу времени получается  $a_{ij}$  единиц этого продукта. Требуется распределить работы между участками так, чтобы в единицу времени выпускалось максимальное число полных ассортиментных наборов продукции.

Если обозначить через  $h_{ij}$  ( $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, n$ ) ту долю рабочего времени  $i$ -го участка, которая отводится на производство  $j$ -го продукта, то нахождение оптимального плана сводится к следующей чисто математической задаче.

**Задача А.** *Заданы неотрицательные числа*

$$\{a_{ij}\} \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n), \quad k_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

---

<sup>1)</sup>Эта задача была изучена автором в работе [1] (см. литературу к Приложениям I и II).

причем  $\max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} > 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ) (каждый продукт может быть произведен хотя бы на одном из участков). Требуется определить набор чисел (план)

$$\pi = \{h_{ij}\} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

из условий:

1)  $h_{ij} \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) (доля рабочего времени, отводимая на участке для производства данного продукта, представляет неотрицательное число);

2)  $\sum_{j=1}^n h_{ij} \leq 1$  ( $i = 1, \dots, m$ ) (общее время работы каждого участка ограничено планируемыми календарным временем);

3) величина

$$\mu(\pi) = \min_{1 \leq j \leq n} \frac{x_j^\pi}{k_j}, \quad (1)$$

где

$$x_j^\pi = \sum_{i=1}^m a_{ij} h_{ij} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2)$$

принимает максимально возможное значение (числа  $x_j^\pi$  выражают суммарную производительность по различным продуктам при работе по плану  $\pi$ , а величина  $\mu(\pi)$  показывает комплексную производительность при этом плане, т. е. число полных ассортиментных наборов, производимых в единицу времени).

План  $\pi$ , удовлетворяющий условиям 1)–3), называется *оптимальным*, а удовлетворяющий условиям 1) и 2) — *допустимым*.

Прежде всего заметим, что оптимальный план в задаче А всегда существует (ср. вывод 1, стр. 122).

Действительно, пусть  $\pi^v = \{h_{ij}^v\}$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) — такая последовательность допустимых планов, что  $\mu(\pi^v) \rightarrow \mu = \sup \mu(\pi)$ , где точная верхняя граница ( $\sup$ ) берется по всем допустимым планам  $\pi^v$ . Без ограничения общности можно, очевидно, считать, что имеет место сходимость

$$\lim_{v \rightarrow \infty} h_{ij}^v = h_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

(такая сходимость всегда имеет место для некоторой подпоследовательности). А тогда план  $\pi = \{h_{ij}\}$  и является оптимальным.

Теперь мы можем сформулировать в общем виде положение о характерном свойстве оптимального плана — о наличии соответствующих ему объективно обусловленных оценок для всех видов продукции (ср. вывод 2, стр. 123).

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого плана необходимо и достаточно, чтобы существовали такие множители  $c_1, c_2, \dots, c_n$  (оценки всех видов продукции), что:

а)  $c_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $\max_{1 \leq j \leq n} c_j > 0$  (эти оценки неотрицательны, причем, по крайней мере, один из продуктов имеет положительную оценку);

б)  $c_j a_{ij} = \max_{1 \leq t \leq n} c_t a_{it} = d_i$ , если только  $h_{ij} > 0$  (на каждом участке изготавливается только тот вид продукции, при котором оценка его производительности

максимальна; числа  $d_i$  можно трактовать как оценки производственной мощности участков);

в)  $c_j = 0$ , если  $x_j^v > k_j \mu(\pi)$  (оценки тех продуктов, которые производятся с избытком, равны нулю);

г)  $\sum_{j=1}^n h_{ij} = 1$ , если  $d_i \neq 0$  (участки, для которых оценки производственной мощности положительны, загружены полностью).

Действительно, если для данного допустимого плана  $\pi = \{h_{ij}\}$  такие множители существуют, то для любого другого допустимого плана  $\pi' = \{h'_{ij}\}$  на основании (1), (2) и условий 1), 2), а)–г) имеем:

$$\begin{aligned} \left( \sum_j c_j k_j \right) \mu(\pi') &\leq \sum_j c_j x_j^{\pi'} = \sum_j c_j \sum_i a_{ij} h'_{ij} = \sum_i \sum_j (c_j a_{ij}) h'_{ij} \leq \\ &\leq \sum_j d_i \sum_i h'_{ij} \leq \sum_i d_i = \sum_i d_i \sum_j h_{ij} = \sum_i \sum_j (c_j a_{ij}) h_{ij} = \\ &= \sum_j c_j \sum_i a_{ij} h_{ij} = \sum_j c_j x_j^{\pi} = \sum_j c_j (k_j \mu(\pi)) = \left( \sum_j c_j k_j \right) \mu(\pi), \end{aligned}$$

откуда вытекает неравенство  $\mu(\pi') \leq \mu(\pi)$ . Ввиду произвольности допустимого плана  $\pi'$  последнее неравенство показывает, что данный план  $\pi$  — оптимальный, и первая часть теоремы доказана. Второе утверждение, что для каждого оптимального плана имеется система множителей, удовлетворяющая условиям а)–г), будет доказано ниже при рассмотрении более общей задачи.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Если все числа  $a_{ij} > 0$  (на каждом участке можно производить все виды продукции), то для каждого оптимального плана  $\pi = \{h_{ij}\}$  и отвечающих ему по теореме 1 множителей выполняются условия:

$$2') \sum_{j=1}^n h_{ij} = 1 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (\text{все участки полностью загружены});$$

3')  $x_1^{\pi}/k_1 = x_2^{\pi}/k_2 = \dots = x_n^{\pi}/k_n = \mu(\pi)$  (выдерживается заданный ассортимент продукции);

$$а') c_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (\text{все продукты имеют положительные оценки}).$$

Действительно, в этом случае все числа  $d_i > 0$ ; а тогда на основании г) имеем 2'). Далее, для каждого  $j$  при некотором  $i$  будет  $h_{ij} \neq 0$  (каждый продукт производится на некотором участке); поэтому из б) вытекает а'). Из а') и в) получаем 3').

Следовательно, в рассматриваемом случае (когда все  $a_{ij} > 0$ ) для оптимальности допустимого плана  $\pi$  необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял условиям 2'), 3') и чтобы для него имелась система положительных множителей, удовлетворяющая условию б) (см. выводы 4, 5, стр. 127, 128).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** В общем случае (когда некоторые  $a_{ij} > 0$ ) также можно ограничиться рассмотрением только так называемых ассортиментных планов, удовлетворяющих условиям 1), 2') и 3'), так как каждому допустимому плану  $\pi'$  отвечает ассортиментный план  $\pi'$  с той же комплексной производительностью:  $\mu(\pi') = \mu(\pi)$

(для получения такого плана достаточно некоторые  $h_{ij}$ , отвечающие тем продуктам, которые производятся в избытке ( $x_j^\pi > k_j\mu(\pi)$ ), уменьшить, а другие  $h_{ij}$ , отвечающие  $a_{ij} = 0$ , увеличить).

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** Пусть все производственные затраты слагаются из затрат, пропорциональных объемам выпуска каждой продукции, и затрат на работу участков, не зависящих от вида производимой на них продукции; тогда при оптимальном ассортиментном плане затраты на один ассортиментный набор продукции минимальны (ср. вывод 1, стр. 122). Действительно, для любого допустимого плана  $\pi'$  эти затраты составляют:

$$\frac{1}{\mu(\pi')} \left( \sum_j p_j x_j^\pi + \sum_i r_i \right) \geq \sum_j p_j k_j + \frac{1}{\mu(\pi')} \sum_i r_i \geq \sum_j p_j k_j + \frac{1}{\mu(\pi)} \sum_i r_i, \quad (3)$$

где  $p_j$  — затраты по производству единицы продукта вида ( $j$ ) ( $j = 1, \dots, n$ );  $r_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — затраты на работу участков;  $\mu(\pi)$  — комплексная производительность в оптимальном плане, причем в неравенствах (3) имеет место знак равенства тогда и только тогда, когда  $\pi'$  — оптимальный ассортиментный план.

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Задача А всегда может быть сведена к случаю, где  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$  (все виды продукции требуются в равных количествах). Действительно, принимая для каждого продукта ( $j$ ) новую единицу измерения, равную  $k_j$  старых единиц, мы приходим к задаче, в которой

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{k_j} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n), \quad k'_j = 1 \quad (j = 1, \dots, n).$$

**Случай комплексного выпуска продукции.** Допустим теперь, что для каждого производственного участка ( $i$ ) ( $i = 1, \dots, m$ ) имеется  $r_i$  способов работы; при работе по способу  $s$  на нем производится комплексно  $a_{i1}^s, a_{i2}^s, \dots, a_{in}^s$  единиц соответствующих продуктов. В этом случае возникает следующая более общая задача, которая также рассматривалась в [1].

**Задача Б.** Заданы неотрицательные числа

$$\{a_{ij}^s\} \quad (i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, r_i; j = 1, \dots, n), \quad k_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

причем  $\max_{i,s} a_{ij}^s > 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Требуется определить набор чисел (план)

$\pi = \{h_{is}\}$  ( $i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, r_i$ ) из условий:

1)  $h_{is} \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m; s = 1, \dots, r_i$ );

2)  $\sum_{j=1}^n h_{ij} \leq 1$  ( $i = 1, \dots, m$ );

3) величина

$$\mu(\pi) = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{x_j^\pi}{k_j},$$

где

$$x_j^\pi = \sum_{i=1}^m \sum_{s=1}^{r_i} a_{ij}^s h_{is} \quad (j = 1, \dots, n),$$

принимает максимально возможное значение.

Как и выше, план  $\pi$ , удовлетворяющий условиям 1)–3), называется *оптимальным*, а удовлетворяющий условиям 1) и 2) — *допустимым*.

Нетрудно видеть, что и в этой задаче оптимальный план всегда существует. Характеристику оптимального плана дает следующая теорема.

**Теорема 2.** Для оптимальности допустимого плана  $\pi$  необходимо и достаточно, чтобы существовали такие множители  $c_1, c_2, \dots, c_n$  (оценки всех видов продукции), что:

- а)  $c_j \geq 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $\max_{1 \leq j \leq n} c_j > 0$ ;
- б)  $\sum_{j=1}^n c_j a_{ij}^s = \max_{1 \leq t \leq r_i} \sum_{j=1}^n c_t a_{it}^s = d_i$ , если  $h_{ij} \neq 0$ ;
- в)  $c_j = 0$ , если  $x_j^\pi > k_j \mu(\pi)$ ;
- г)  $\sum_{s=1}^{r_i} h_{is} = 1$ , если  $d_i \neq 0$ .

На доказательстве этой теоремы мы здесь не останавливаемся, так как она будет получена ниже в виде следствия из более общей теоремы 3.

Заметим, что задаче Б помимо рассмотренной можно дать еще и другую интерпретацию.

Имеется  $m$  видов комплексного сырья, которые поступают в заданной пропорции  $p_1 : p_2 : \dots : p_m$ . Для сырья вида ( $i$ ) ( $i = 1, \dots, m$ ) существует  $r_i$  технологических способов его обработки; при работе по способу ( $s$ ) ( $s = 1, \dots, r_i$ ) из  $p_i$  единиц такого сырья получается комплексно  $a_{i1}^s, a_{i2}^s, \dots, a_{in}^s$  единиц соответствующих продуктов. Необходимый ассортиментный набор продукции состоит из  $k_1, k_2, \dots, k_n$  единиц продуктов вида (1), (2),  $\dots$ , ( $n$ ). Ищется план  $\pi = \{h_{is}\}$  (числа  $h_{is}$  в данном случае показывают, какая часть сырья вида ( $i$ ) обрабатывается по способу ( $s$ )), при котором из одного комплектного набора сырья, состоящего из  $p_1, p_2, \dots, p_m$  единиц сырья вида (1), (2),  $\dots$ , ( $m$ ), получается максимальное число ассортиментных наборов продукции или, что то же самое, на один ассортиментный набор продукции расходуется минимальное количество комплектных наборов сырья.

Такого рода задачи систематически встречаются в различных отраслях промышленности (металлообрабатывающей, деревообрабатывающей, химической, нефтеперерабатывающей, цветной металлургии и др.). Характерным примером такой задачи может служить задача рационального раскроя промышленных материалов (листового металла, профильного проката, труб, древесины и пр.; см. [1, 5, 6]).

В частном случае, когда

$$r_i = n \quad (i = 1, \dots, m), \quad a_{ij}^s = \begin{cases} a_{ij} & \text{при } s = j, \\ 0 & \text{при } s \neq j \end{cases}$$

(при каждом технологическом способе из сырья получается лишь один продукт), задача Б, очевидно, совпадает с задачей А.

В другом частном случае, когда  $m = 1$  (имеется лишь один вид сырья), мы приходим к следующей задаче.

**Задача В.** Заданы неотрицательные числа

$$\{a_j^s\} \quad (s = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n), \quad k_j > 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

причем  $\max_{1 \leq s \leq r} a_j^s > 0 \quad (j = 1, \dots, n)$ . Требуется определить вектор (план)  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  из условий:

- 1)  $h_s \geq 0 \quad (s = 1, \dots, r)$ ;
- 2)  $\sum_{s=1}^r h_{is} = 1$ ;
- 3) величина

$$\mu(\pi) = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{x_j^\pi}{k_j},$$

где

$$x_j^\pi = \sum_{s=1}^r a_j^s h_s \quad (j = 1, \dots, n),$$

принимает максимально возможное значение.

На анализе этой задачи остановимся несколько подробнее. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу В', в которой кроме интенсивностей применения каждого способа  $h_s$  искомыми являются также  $h_{r+j}$  — избыток производства каждого продукта по сравнению с требуемым ассортиментом; может оказаться необходимым предусмотреть наличие такого избытка.

**Задача В'.** При данных задачи В найти вектор  $\pi = (h_1, \dots, h_r, h_{r+1}, \dots, h_{r+n})$  из условий:

- 1)  $h_s \geq 0 \quad (s = 1, \dots, r + n)$ ;
- 2)  $\sum_{s=1}^r h_{is} = 1$ ;
- 3) имеют место равенства:

$$\frac{x_1^\pi}{k_1} = \frac{x_2^\pi}{k_2} = \dots = \frac{x_n^\pi}{k_n}, \quad (4)$$

где

$$x_j^\pi = \sum_{s=1}^r a_j^s h_s - h_{r+j} \quad (j = 1, \dots, n);$$

- 4) величина  $\mu(\pi)$ , равная общему значению отношений (4), максимальна.

Искомый вектор называется *оптимальным*; вектор  $\tilde{\pi}$ , удовлетворяющий условиям 1) и 2), — *допустимым*, а удовлетворяющий условиям 1)-3) — *ассортиментным*.

Нетрудно видеть, что задачи В и В' эквивалентны. Действительно, план  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , очевидно, тогда и только тогда является оптимальным в задаче В, когда вектор  $\tilde{\pi} = (h_1, \dots, h_r, h_{r+1}, \dots, h_{r+n})$ , первые  $r$  компонент которого совпадают с соответствующими компонентами вектора  $\pi$ , а остальные определены согласно равенствам:

$$h_{r+j} = x_j^\pi - k_j \mu(\pi) \quad (j = 1, \dots, n),$$

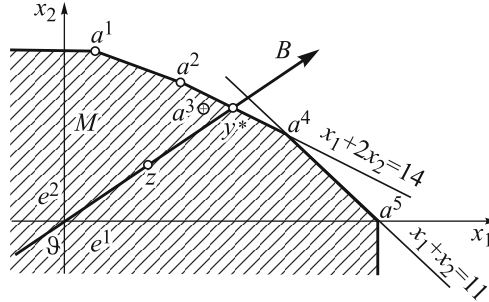


Рис. 9

является оптимальным в задаче  $B'$ , при этом  $\mu(\tilde{\pi}) = \mu(\pi)$ .

Для выяснения геометрического смысла задачи  $B'$  рассмотрим  $n$ -мерное пространство  $\mathbb{R}_n$ , элементы которого  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  будем называть точками или векторами, не различая этих понятий. Каждому допустимому вектору отнесем точку

$$x(\tilde{\pi}) = (x_1^{\tilde{\pi}}, x_2^{\tilde{\pi}}, \dots, x_n^{\tilde{\pi}}) = \sum_{s=1}^r h_s a^s + \sum_{j=1}^n h_{r+j} e^j \in \mathbb{R}_n, \quad (5)$$

где  $a^s = (a_1^s, a_2^s, \dots, a_n^s)$  — точки, характеризующие имеющиеся технологические способы, а  $e^j = (\underbrace{0, \dots, 0}_{j-1}, -1, 0, \dots, 0)$  — орты соответствующих координатных осей.

Точки (5), отвечающие всевозможным допустимым векторам  $\tilde{\pi}$ , как нетрудно видеть, заполняют выпуклый замкнутый многогранник  $M$ , натянутый на точки  $a^s$  ( $s = 1, \dots, r$ ) и отрицательный гипероктант. Ассортиментным векторам  $\tilde{\pi}$  (и только им) согласно (4) отвечают точки  $x(\tilde{\pi})$ , расположенные на оси<sup>2)</sup>

$$Y = \{y : y = \lambda z, \quad -\infty < \lambda < +\infty\},$$

где  $z = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  — вектор, характеризующий необходимый ассортимент продукции. При этом величина  $\mu(\tilde{\pi})$  (комплексная производительность) совпадает с соответствующим значением  $\lambda$ . Отсюда ясно, что оптимальными являются те и только те допустимые векторы, которым отвечает крайняя точка пересечения оси  $Y$  с многогранником  $M$ , т. е. точка  $y^* = \lambda^* z$ , где  $\lambda^* = \max_{\lambda z \in M} \lambda$ .

На рис. 9 показаны многогранник  $M$ , ось  $Y$  и точка  $y^*$ , отвечающие следующим числовым данным:

$$n = 2, r = 5, a^1 = (1; 6), a^2 = (4; 5), a^3 = (5; 4), a^4 = (8; 3), a^5 = (11; 0), z = (3; 2).$$

Точка  $y^*$  является, очевидно, граничной для многогранника  $M$ . Поэтому (по известной теореме из  $n$ -мерной геометрии) существует опорная к многограннику  $M$

<sup>2)</sup>Эта запись означает, что  $Y$  состоит из точек  $y$ , представимых в виде  $\lambda z$ , где  $\lambda$  — произвольное вещественное число.



гиперплоскость  $H$ , проходящая через точку  $y^*$  (см., например, А. Д. Александров. Выпуклые многогранники, 1950). Пусть эта гиперплоскость имеет уравнение:

$$(c, x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = d, \quad (6)$$

причем<sup>3)</sup>

$$\max_{x \in M} (c, x) = (c, y^*) = d.$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты при текущих координатах в уравнении (6) удовлетворяют условию а) (теоремы 2).

Пусть  $\tilde{\pi} = (h_1, \dots, h_r, h_{r+1}, \dots, h_{r+n})$  — оптимальный вектор; тогда

$$\begin{aligned} d = (c, y^*) &= \left( c, \sum_{s=1}^r h_s a^s + \sum_{j=1}^n h_{r+j} e^j \right) = \sum_{s=1}^r h_s (c, a^s) + \sum_{j=1}^n h_{r+j} (c, e^j) \leq \\ &\leq \max_{1 \leq s \leq r} (c, a^s) \sum_{s=1}^r h_s + \sum_{j=1}^n h_{r+j} (c, e^j) \leq d, \end{aligned}$$

откуда имеем:

$$б') \sum c_j a_j^s = (c, a^s) = \max_{1 \leq t \leq r} (c, a^t) = \max_{1 \leq t \leq r} \sum c_j a_j^t = d, \text{ если } h_s > 0,$$

$$в') c_j = 0, \text{ если } h_{r+j} > 0.$$

Наоборот, если для данного ассортиментного вектора  $\tilde{\pi}$  при некоторых числах  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , удовлетворяющих а), выполняются условия б') и в'), то уравнение (6) определяет опорную к многограннику  $M$  гиперплоскость, проходящую через точку  $x(\tilde{\pi})$ . Поэтому в таком случае  $x(\tilde{\pi}) = y^*$  и, следовательно, вектор  $\tilde{\pi}$  оптимальный.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 2'.** Для оптимальности ассортиментного вектора  $\tilde{\pi} = (h_1, \dots, h_r, h_{r+1}, \dots, h_{r+n})$  необходимо и достаточно, чтобы существовали множители  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , удовлетворяющие условиям а), б') и в').

Учитывая связь между задачами В и В', легко получить теорему 2 для частного случая, когда  $m = 1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Из данной геометрической интерпретации ясно, что оптимальный вектор (план) и отвечающие ему множители (о. о. оценки) в задаче В всегда существуют, но, вообще говоря, определяются неоднозначно. Действительно, если точка  $y^*$  допускает различные представления в форме (5), то оптимальный план не единственен; если же точка  $y^*$  лежит на грани многогранника  $M$ , размерности меньшей, чем  $n - 1$ , то и множители определяются неоднозначно (через точку  $Y^*$  можно провести различные гиперплоскости, опорные к  $M$ ). Однако множители, отвечающие одному из оптимальных планов, отвечают и всем другим.

**Основная задача производственного планирования** (см. [8]). Перейдем теперь к более общей задаче, изучавшейся в главе II. Рассматривается производство, в котором участвует  $N$  ингредиентов (различные виды производственных

<sup>3)</sup>Если это не так, то добиться этого можно путем изменения знака у всех коэффициентов в уравнении (6).

факторов, сырья, промежуточных и конечных продуктов). Имеется  $r$  допустимых технологических способов (способов организации производства). Каждый из этих способов характеризуется вектором

$$a^s = (a_1^s, a_2^s, \dots, a_N^s) \quad (s = 1, \dots, r),$$

компоненты которого указывают объем производства соответствующих ингредиентов при однократном применении данного способа, отрицательные компоненты означают затраты. План организации производства определяется выбором вектора  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  с неотрицательными компонентами, указывающими интенсивность применения соответствующих способов. При плане  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  различные ингредиенты производятся в количествах

$$x_i^\pi = \sum_{s=1}^r a_i^s h_s \quad (i = 1, \dots, N) \quad (7)$$

(ингредиенты, для которых  $x_i^\pi < 0$ , расходуются в количестве  $|x_i^\pi|$ ).

Помимо освоенных технологических способов при составлении производственного плана должны учитываться еще имеющиеся ресурсы и требуемый ассортимент продукции. Эти дополнительные условия могут задаваться по-разному. Здесь рассматривается один из возможных способов их задания; однако основной результат о наличии системы о. о. оценок для всех ингредиентов, связанной с оптимальным планом, остается справедливым при любом естественном задании указанных условий (см. замечание 7, стр. 329).

Допустим, что по одним ингредиентам (некоторым конечным продуктам) нужно достичь максимального выпуска с учетом требуемого ассортимента, а по другим — имеются ограничения вида:  $x_i^\pi \geq b_i$ , где  $b_i$  — заданные вещественные числа. (Положительные  $b_i$  отвечают конечным продуктам, требующимся в определенных количествах; для промежуточных продуктов, которые в плане в целом не должны расходоваться, соответствующие  $b_i = 0$ ; отрицательные  $b_i$  отвечают производственным факторам и различным видам сырья, расход которых не должен превосходить имеющихся их ресурсов  $|b_i|$ .) В этом случае мы приходим к следующей экстремальной задаче.

**Задача Г.** Заданы вещественные числа:

$$a_i^s \quad (i = 1, \dots, N; s = 1, \dots, r), \quad b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad k_j \quad (j = 1, \dots, n); \quad n = N - m.$$

Требуется определить вектор (план)  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  из условий:

- 1)  $h_s \geq 0$  ( $s = 1, \dots, r$ );
- 2)  $x_i^\pi \geq b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ );
- 3) величина

$$\mu(\pi) = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{x_j^\pi}{k_j}$$

достигает максимума (здесь и в предыдущем условии величины  $x_j^\pi$  определяются согласно (7)).

План  $\pi$ , удовлетворяющий условиям 1) и 2), называется *допустимым*, а удовлетворяющий условиям 1)–3) — *оптимальным*.

Поставленная задача может рассматриваться как некоторая математическая модель текущего планирования. Предыдущие задачи являются, очевидно, ее частными случаями. Например, в задаче Б имеется  $m$  производственных факторов,  $n$  конечных продуктов и  $r = \sum_{i=1}^m r_i$  технологических способов, в каждом из которых расходуется единица соответствующего фактора (использование участка, предприятия или станка) и производится некоторый набор продукции; ресурсы каждого фактора здесь равны 1 и потому  $b_i = -1$  ( $i = 1, \dots, m$ ). Рассматриваемые ниже задачи также сводятся к задаче Г. Поэтому последняя называется *основной задачей производственного планирования*.

Характеристику оптимального плана и условия его существования в задаче Г дают следующие теоремы.

**Теорема 3** (ср. вывод 12, стр. 155). *Для оптимальности допустимого плана  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  необходимо и достаточно, чтобы существовали такие множители  $c_1, c_2, \dots, c_n$  (о. о. оценки для всех ингредиентов), что*

$$\text{а) } c_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \quad \max_{1 \leq j \leq n} c_j > 0 \quad (\text{эти оценки неотрицательны, причем,}$$

по крайней мере, один из продуктов, входящих в ассортиментный набор, имеет положительную оценку);

б)  $\sum_{i=1}^N c_i a_i^s \leq 0$  ( $s = 1, \dots, r$ ) (при каждом технологическом способе оценка производимой продукции не превосходит суммарной оценки расходуемых ингредиентов);

в)  $\sum_{i=1}^N c_i a_i^s = 0$ , если  $h_s > 0$  ( $s = 1, \dots, r$ ) (для используемых способов оценка производимой продукции совпадает с оценкой расходуемых ингредиентов, т. е. соблюдается принцип рентабельности);

г)  $c_i = 0$ , если  $x_j^\pi > b_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) или  $x_j^\pi > k_{i-m}\mu(\pi)$  ( $m+1 \leq i \leq N$ ) (для производственных факторов, не лимитирующих производство, и видов продукции, производимых в избытке, соответствующие оценки равны нулю).

**Теорема 4.** *Для существования оптимального плана необходимо и достаточно выполнение условий:*

$\alpha$ ) существует допустимый план  $\pi$ ;

$\beta$ ) не существует плана  $\pi$  (удовлетворяющего условию 1), при котором

$$x_i^\pi \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m); \quad x_{m+j}^\pi > 0 \quad (j = 1, \dots, m).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Условие  $\beta$ ), означающее отсутствие плана, при котором без каких-либо затрат некоторые ингредиенты производятся (в положительных количествах), в практических задачах, очевидно, всегда выполнено. Условие  $\alpha$ ), вообще говоря, может и не выполняться. Нарушение этого условия означает, что при имеющихся ресурсах и данной производственной базе даже первые  $m$  ингредиентов не могут быть произведены в необходимых количествах. Но если все числа  $b_i \leq 0$ , то условие  $\alpha$ ) обязательно выполняется.

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.** Теорема 3 относится к задаче Г, где имеющиеся ресурсы и необходимый ассортимент продукции учитывались определенным образом. Однако при

любом разумном определении оптимальности, план  $\pi$ , очевидно, не является оптимальным, если существует план  $\pi'$ , при котором все ингредиенты производятся в большем объеме (в т. ч. затрачиваемые ингредиенты расходуются в меньших количествах), т. е.  $x_i^\pi < x_i^{\pi'}$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Уже это свойство оказывается достаточным для того, чтобы оптимальный план был связан с некоторой системой неотрицательных оценок, удовлетворяющей условиям б) и в).

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.** В общем случае для характеристики оптимального плана в задаче  $\Gamma$  необходимы оценки всех ингредиентов. Однако если в каждом технологическом способе участвует лишь один из первых  $m$  ингредиентов (либо лишь один из последних  $n$ ), то в характеристике оптимального плана можно обойтись лишь оценками последних  $n$  (первых  $m$ ) ингредиентов. С таким положением мы встречались в задачах А, Б и В.

**ЗАМЕЧАНИЕ 9.** Представляет практический интерес случай, когда применение некоторых технологических способов в задаче  $\Gamma$  ограничено, т. е. допустимыми являются только такие планы  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , в которых

$$h_s \leq q_s \quad (s = 1, \dots, r; r_1 \leq r),$$

где  $q_s$  — заданные положительные числа. Этот случай формально может быть легко сведен к основному (достаточно использование лимитируемых технологических способов ввести в качестве дополнительных ингредиентов). Однако можно обойтись и без такого сведения. Правда, при этом в теореме 3, дающей характеристику оптимального плана, для тех из лимитируемых способов, которые используются полностью ( $h_s = q_s$ ), следует допускать неравенство:

$$\sum_{i=1}^N c_i a_i^s \geq 0.$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 10.** В зарубежной литературе в качестве основной задачи линейного программирования обычно рассматривается частный случай задачи  $\Gamma$ , где  $n = 1$  (см. [9, 10]). Иллюстрацией этого случая может служить следующая задача.

**Задача Д.** Имеется  $m$  видов сырья в количествах  $b_1, b_2, \dots, b_m$  единиц. Из этого сырья можно производить  $r$  различных продуктов. Цена единицы продукта вида ( $s$ ) ( $s = 1, \dots, r$ ) составляет  $a_s$ , и на нее расходуется  $a_1^s, a_2^s, \dots, a_m^s$  единиц соответствующих видов сырья. Требуется подобрать количества продуктов различного вида так, чтобы они в совокупности могли быть изготовлены из имеющегося сырья, а суммарная их стоимость была максимальной. Другими словами, ищется вектор (план)  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  из условий:

- 1)  $h_s \geq 0$  ( $s = 1, \dots, r$ );
- 2)  $\sum_{s=1}^r a_i^s h_s \leq b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ );
- 3) величина  $\mu(\pi) = \sum_{s=1}^r a_s h_s$  максимальна.

Для выяснения геометрического смысла задачи  $\Gamma$  и доказательства приведенных теорем рассмотрим в  $N$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}_N$  точки:

$$a^s = (a_1^s, a_2^s, \dots, a_N^s) \quad (s = 1, \dots, r);$$

$$e^i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, -1, 0, \dots, 0) \quad (i = 1, \dots, N);$$

$$y^0 = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0); \quad z = (0, \dots, 0, k_1, \dots, k_n).$$

Пусть

$$K = \left\{ x \mid x = \sum_{s=1}^r h_s a^s + \sum_{i=1}^N h_{r+i} e^i; h_s \geq 0, s = 1, \dots, r + N \right\}^4$$

— выпуклый многогранный конус с вершиной в начале координат, натянутый на точки  $a^s$  ( $s = 1, \dots, r$ ) и  $e^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), а

$$Y = \{ y \mid y = y^0 + \lambda z; -\infty < \lambda < +\infty \}$$

— ось, проходящая через точки  $y^0$ ,  $y^0 + z$  и направленная в сторону возрастания  $\lambda$ .  
Для каждого допустимого плана  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  точка

$$y^0 + \mu(\pi)z = \sum_{s=1}^r h_s a^s + \sum_{i=1}^N h_{r+i} e^i, \quad (8)$$

где

$$h_{r+i} = x_i^\pi - b_i \quad (i = 1, \dots, N); \quad h_{r+m+j} = x_{m+j}^\pi - k_j \mu(\pi) \quad (j = 1, \dots, n), \quad (9)$$

принадлежит, очевидно, конусу  $K$ . Наоборот, если точка  $y^0 + \mu(\pi)z \in K$ , то существует допустимый план  $\pi$ , для которого величина  $\mu(\pi) \leq \lambda$ .

Отсюда ясно, что задача  $\Gamma$  по существу эквивалентна задаче о пересечении оси  $Y$  с конусом  $K$ . Если это пересечение пусто или содержит точки  $y^0 + \lambda z$  со сколь угодно большими  $\lambda$ , то в рассматриваемой задаче оптимального плана не существует.

Если же  $Y \cap K \neq \Lambda$  ( $\Lambda$  — знак пустого множества) и  $\lambda^* = \sup \lambda < +\infty$ , то оптимальные планы существуют; таковыми являются те и только те допустимые планы  $\pi$ , для которых точка (8) совпадает с крайней точкой пересечения оси  $Y$  и конуса  $K$ , т. е. с точкой  $y^* = y^0 + \lambda^* z$ .

Через точку  $y^*$  можно провести гиперплоскость  $H$ , опорную к конусу  $K$  и не содержащую точек оси  $Y$ , отличных от  $y^*$ . Пусть эта гиперплоскость имеет уравнение

$$(c, x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_N x_N = 0, \quad (10)$$

причем

$$\max_{x \in K} (c, x) = (c, y^*) = 0.$$

<sup>4)</sup> Эта запись означает, что  $K$  есть множество точек  $x$  пространства  $\mathbb{R}_N$ , представимых в указанном виде, где  $h_s \geq 0$  — произвольные неотрицательные числа.

Тогда числа  $c_1, c_2, \dots, c_N$  — коэффициенты при текущих координатах в уравнении (10), как легко показать, удовлетворяют условиям а) и б) теоремы 3, причем для каждого оптимального плана  $\pi$  (т. е. такого, что  $y^0 + \mu(\pi)z = y^*$ ) выполняются также условия в) и г).

Наоборот, если для данного допустимого плана  $\pi$  имеются множители  $c_1, c_2, \dots, c_N$ , удовлетворяющие условиям а)–г), то гиперплоскость  $H$ , определяемая уравнением (10), является опорной к конусу  $K$  и пересекает ось  $Y$  в точке  $y^0 + \mu(\pi)z$ . Отсюда следует, что  $y^0 + \mu(\pi)z = y^*$  и, следовательно, план  $\pi$  — оптимальный.

Таким образом, доказана теорема 3, из которой, в частности, вытекают приведенные выше без полного доказательства теоремы 1 и 2.

Для существования оптимального плана, как мы видели, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$Y \cap K \neq \emptyset, \quad \lambda^* = \sup_{y^0 + \lambda z \in K} \lambda < +\infty.$$

Последние, как нетрудно проверить, равносильны условиям теоремы 4.

С помощью приведенной геометрической интерпретации легко доказать также замечание 7, носящее принципиальный характер.

**Связь с матрицами затрат и выпуска Леонтьева.** Прежде всего, остановимся на следующем частном случае основной задачи производственного планирования.

Имеется  $n$  продуктов и один производственный фактор (труд). Технологические способы таковы, что в каждом из них производится лишь один продукт, а другие продукты и производственный фактор затрачиваются. Ресурсы производственного фактора ограничены. При этом предполагается, что существует план, при котором все продукты производятся в положительных количествах (расходуется только производственный фактор). В этом случае:

1°. Задача об оптимальном плане (задача Г) разрешима при любом составе продукции (т. е. при любых числах  $k_j > 0, j = 1, \dots, n$ ).

2°. Набор технологических способов, используемых в оптимальном плане, и значения множителей (о. о. оценок) не зависят от имеющихся ресурсов производственного фактора и требуемого состава продукции.

В рассматриваемом случае технологические способы характеризуются векторами:

$$a^s = (a_0^{js}, a_1^{js}, \dots, a_n^{js}) \quad (j = 1, \dots, n; s = 1, \dots, r),$$

где

$$a_0^{js} < 0, a_j^{js} > 0, a_l^{js} \leq 0, \quad \text{если } l \neq j.$$

План определяется заданием матрицы

$$\pi = \|h_{js}\| \quad (j = 1, \dots, n; s = 1, \dots, r),$$

элементы которой указывают степень применения различных способов. Оптимальный план ищется из условий:

$$1) h_{js} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n; s = 1, \dots, r);$$

- 2)  $x_0^\pi = \sum_{j,s} a_0^{j,s} h_{j,s} \geq b_0$  ( $-b_0$  означает имеющиеся ресурсы производственного фактора);  
 3) величина

$$\mu(\pi) = \min_{1 \leq l \leq n} \frac{x_l^\pi}{k_l},$$

где

$$x_l^\pi = \sum_{j,s} a_l^{j,s} h_{j,s} \quad (l = 1, \dots, n),$$

достигает максимума (числа  $k_l$  характеризуют требуемый ассортимент продукции).

Для каждого продукта ( $\nu$ ) ( $\nu = 1, \dots, n$ ) рассмотрим такой план  $\pi^\nu = \|h_{j,s}^\nu\|$ , удовлетворяющий условию 1), при котором расход производственного фактора не превосходит одной единицы ( $x_0^{\pi^\nu} \geq -1$ ), все продукты производятся в неотрицательных количествах ( $x_l^{\pi^\nu} \geq 0$ ,  $l = 1, \dots, n$ ), причем продукт ( $\nu$ ) производится в максимальном количестве ( $x_\nu^{\pi^\nu} = \max$ ). Мы утверждаем, что при плане  $\pi^\nu$

$$x_0^{\pi^\nu} = -1, \quad x_l^{\pi^\nu} = 0, \quad \text{если } l \neq \nu.$$

Действительно, если  $x_0^{\pi^\nu} > -1$ , то объем производства продукта ( $\nu$ ) можно повысить, включая частично план, при котором все продукты производятся в положительных количествах; если же для некоторого  $l_0 \neq \nu$  будет  $x_{l_0}^{\pi^\nu} > 0$ , то также можно включить указанный план за счет уменьшения одного из чисел  $h_{l_0,s}^\nu$ .

Нетрудно проверить, что, каковы бы ни были числа  $k_j > 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ), величины

$$c_0, c_1 = \frac{c_0}{x_1^{\pi_1}}, c_2 = \frac{c_0}{x_2^{\pi_2}}, \dots, c_n = \frac{c_0}{x_n^{\pi_n}},$$

где  $c_0$  — произвольное положительное число, представляют систему о. о. оценок, а план  $\pi = \|h_{j,s}\|$ , в котором

$$h_{j,s} = \frac{-b_0 \sum_{\nu=1}^n c_\nu k_\nu h_{j,s}^\nu}{\sum_{\nu=1}^n c_\nu k_\nu} \quad (j = 1, \dots, n; s = 1, \dots, r),$$

является оптимальным. Отсюда следуют утверждения 1° и 2°.

Отметим важный частный случай, когда для каждого продукта ( $j$ ) ( $j = 1, \dots, n$ ) имеется лишь один способ его изготовления, который характеризуется вектором

$$a^j = (a_0^j, a_1^j, \dots, a_n^j); \quad a_0^j < 0, \quad a_j^j > 0, \quad a_l^j \leq 0, \quad \text{если } l \neq j.$$

В этом случае, очевидно, в оптимальном плане используются все способы. Поэтому соответствующая система оценок может быть найдена из системы уравнений<sup>5)</sup>:

$$\sum_{l=1}^N a_l^j c_l = 0 \quad (j = 1, \dots, n);$$

<sup>5)</sup>Разрешимость этой системы ясна и непосредственно.

точнее, из этой системы оценки всех продуктов могут быть выражены через  $c_0$  (оценку единицы труда).

Этот последний случай соответствует так называемой открытой производственной модели Леонтьева<sup>6)</sup>, часто используемой при экономическом анализе. Необходимо указать, однако, что эта модель представляет малоудовлетворительное приближение к действительным условиям производства, определяющим текущий производственный план. Действительно:

1) Помимо труда, в реальных задачах необходимо учитывать еще и ряд других факторов, имеющих в ограниченном количестве, в частности, благоприятные природные ресурсы и, особенно, некоторые производственные мощности. Кроме того, труд неоднороден, и потому его также нельзя рассматривать как один фактор.

2) Систематически встречается комплексный выпуск продукции, который не охватывается указанной схемой.

3) В реальных условиях в современном производстве имеется множественность способов изготовления данной продукции, и применение различных способов называется, в частности, ограничениями, указанными в 1).

Модель Леонтьева часто предлагается использовать для составления матрицы межотраслевых связей, принимая в качестве коэффициентов  $a_{jl}$  средние затраты на данную продукцию продуктов других отраслей. Хотя построение таких матриц связей и получение на их основе полных затрат представляет определенный интерес, нельзя рассматривать этот подход как достаточно удовлетворительный для исчисления оценок продукции. Действительно, здесь вместо реальных производственных способов употребляются широкие усреднения их, причем получаемые результаты существенно зависят от принятых условных объединений. Поэтому нет достаточных оснований считать, что полученные этим путем оценки продукции будут давать реализуемые соотношения эквивалентности, а потому они и не смогут непосредственно применяться в плано-экономическом анализе. Их главный недостаток состоит в том, что они не учитывают ограничений, указанных в 1), и связанных с ними косвенных затрат.

**Транспортная задача.** Эта задача в простейшем случае состоит в следующем.

**Задача E<sup>7)</sup>.** Имеется  $m$  пунктов, соединенных железнодорожной сетью, состоящей из  $r$  участков. По участку сети ( $s$ ) ( $s = 1, \dots, r$ ) можно производить перевозки из пункта  $i_s$  в пункт  $j_s$ ; при этом затраты по перемещению единицы груза (например, одного вагона) составляют  $a_s$  (величину  $a_s$  можно, в частности, считать равной расстоянию между пунктами  $i_s$  и  $j_s$ ). В каждом пункте ( $i$ ) ( $i = 1, \dots, m$ ) задан объем потребления  $b_i$  некоторого однородного продукта (для пунктов потребления  $b_i > 0$ , для пунктов производства  $b_i < 0$ , для прочих пунктов  $b_i = 0$ ); причем

$$\sum_{i=1}^m b_i = 0$$

(суммарные объемы производства и потребления совпадают).

<sup>6)</sup> По поводу модели Леонтьева см., например, [9], а также последнюю статью сборника [10].

<sup>7)</sup> Частные приемы решения задачи E рассматривались в [2]; математический анализ и общие методы решения этой задачи, а также некоторых более общих задач, связанных с планированием перевозок (в частности, рассматриваемой ниже задачи E), были даны в [3, 4] и позднее в [9].



План перевозок определяется выбором вектора  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , компоненты которого указывают объем перевозок по каждому участку сети. Задача состоит в разыскании оптимального плана, удовлетворяющего условиям:

1)  $h_s \geq 0$  ( $s = 1, \dots, r$ );

2)  $\sum_{j_s=i} h_s - \sum_{i_s=i} h_s = b_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) (в каждый пункт поступает необходимое

количество продукта);

3) величина  $z = \sum_{s=1}^r a_s h_s$  минимальна (т. е. минимальны общие расходы на

перевозки).

Поставленная задача, как нетрудно видеть, представляет частный случай основной задачи производственного планирования. Действительно, можно считать, что в данном случае имеется  $(m + 1)$  ингредиент; первые  $m$  из них представляют рассматриваемый продукт, расположенный в различных пунктах, последний — транспортные затраты. Допустимые технологические способы характеризуются векторами

$$a^s = (a_1^s, a_2^s, \dots, a_{m+1}^s) \quad (s = 1, \dots, r),$$

где  $a_{m+1}^s = -a^s$ ,  $a_i^s = 1$  при  $i = j_s$ ,  $a_i^s = -1$  при  $i = i_s$  и  $a_i^s = 0$  при остальных  $i$ .

На основании теоремы 4 легко заключить, что оптимальный план в рассматриваемой задаче всегда существует. Характеристику его дает теорема 3, которая в данном случае сводится к следующей:

**Теорема 5.** Для оптимальности допустимого плана  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  (удовлетворяющего условиям 1) и 2)) необходимо и достаточно, чтобы имелись такие числа  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , что

а)  $c_{j_s} - c_{i_s} \leq a_s$  ( $s = 1, \dots, r$ );

б)  $c_{j_s} - c_{i_s} = a_s$ , если  $h \neq 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 11.** Числа  $c_i$ , фигурирующие в теореме 5, называют *потенциалами различных пунктов*. Разность потенциалов показывает, насколько единица транспортируемого продукта в одном пункте ценнее, чем в другом.

В практике планирования перевозок иногда приходится учитывать еще и ограниченную пропускную способность отдельных участков пути. Это приводит к более общей задаче.

**Задача Ж.** При условиях задачи Е допустимы лишь такие планы  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , которые удовлетворяют 2')  $h_s \leq q_s$  ( $s = 1, \dots, r$ ) (числа  $q_s$  характеризуют пропускную способность отдельных магистралей).

В данном случае характеристику оптимального плана дает следующее предложение, которое также вытекает из теоремы 2.

**Теорема 6.** Для оптимальности плана  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , удовлетворяющего условиям 1), 2) и 2'), необходимо и достаточно, чтобы имелись такие числа  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , что

а)  $c_{j_s} - c_{i_s} \leq a_s + d_s$  ( $s = 1, \dots, r$ );

б)  $c_{j_s} - c_{i_s} = a_s + d_s$ , если  $h_s > 0$ ;

в)  $d_s \geq 0$ , причем  $d_s = 0$ , если  $h_s < q_s$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 12.** Числа  $d_s$  представляют ренту (прокатную оценку) отдельных участков пути, рассчитанную на единицу груза (например, на один вагон).

**Задача о комплексе производств.** Допустим теперь, что имеется несколько производств (предприятий), для каждого из которых составлен оптимальный план работы. Иначе говоря, рассматривается одновременно решение ряда основных задач с некоторыми общими ингредиентами. Возникает естественный вопрос, нельзя ли за счет кооперирования отдельных предприятий повысить общую производительность.

Если имеющиеся предприятия расположены в одном или близких пунктах (так что расходы по транспортировке можно не учитывать), ответ на поставленный вопрос дает

**Теорема 7.** *Если для всех видов производственных факторов: сырья, промежуточных и конечных продуктов (неперемещаемые ингредиенты, расположенные в различных пунктах, рассматриваются как различные) нельзя установить единых оценок так, чтобы на каждом предприятии выполнялся принцип рентабельности, то общую производительность можно повысить путем изменения планов — дальнейшего кооперирования отдельных предприятий. Наоборот, если такие оценки существуют, то повысить производительность за счет кооперирования нельзя.*

Эта теорема следует из теоремы 3, если ее применить к задаче, в которой совокупность всех имеющихся предприятий рассматривается как единое предприятие.

**ЗАМЕЧАНИЕ 13.** Аналогичная теорема имеет место и в случае, когда имеющиеся предприятия расположены на значительных расстояниях друг от друга, т. е. когда транспортные расходы уже нельзя не учитывать. Здесь, правда, оценки одного и того же продукта в различных пунктах могут отличаться, но их разность не должна превышать затрат по перемещению этого продукта из одного пункта в другой (с учетом прокатных оценок соответствующих участков пути) и должна совпадать с этой величиной, если такое перемещение фактически производится в оптимальном плане.

**Динамическая задача.** С помощью рассмотренной выше основной задачи производственного планирования может быть проанализирован и более общий вопрос, связанный с составлением производственного плана для некоторого периода времени, разбитого на ряд промежутков  $t = 1, 2, \dots, T$  (задача перспективного планирования).

Один и тот же продукт (или фактор), производимый (или расходуемый) в разные промежутки времени, здесь следует рассматривать как различные ингредиенты. Поэтому имеющиеся технологические способы характеризуются теперь посредством матриц

$$a_s = \|a_{it}^s\| \quad (i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T; s = 1, \dots, r),$$

элементы которых показывают объем производства (отрицательные элементы означают затраты) различных продуктов и факторов в разные промежутки времени. В числе способов могут быть и такие, которые относятся к одному промежутку времени (способы, фигурировавшие и при составлении текущего плана). Технический прогресс в этих способах может учитываться посредством уменьшения затрат при

их применении в более поздние периоды путем указания периода, начиная с которого применим данный более совершенный способ и т. п. Ясно, что такого рода исходные данные, носящие прогностический характер, неизбежно весьма приближенны. Наряду с другими факторами целесообразно введение, как особых ингредиентов, производственных мощностей определенных видов. При этом последние являются здесь уже воспроизводимыми факторами, т. е. предусматривается возможность их производства. Понятие оптимального плана может вводиться по-разному; например, при заданных ресурсах для первого промежутка времени (некоторые ресурсы, скажем, естественные, могут задаваться для всех промежутков) и заданном потреблении конечных продуктов (для каждого промежутка времени) требуется составить план, при котором соблюдаются балансы и к концу планируемого периода накопление конечной продукции данного состава (или определенных производственных мощностей) максимально. Однако при любом естественном определении оптимальности план  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  не является оптимальным, если существует план  $\pi' = (h'_1, h'_2, \dots, h'_r)$ , при котором все ингредиенты производятся в больших количествах:

$$x_{it}^{\pi} = \sum_{s=1}^r a_{it}^s h_s < \sum_{s=1}^r a_{it}^s h'_s = x_{it}^{\pi'} \quad (i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T).$$

Это свойство оказывается достаточным для того, чтобы с оптимальным планом  $\pi$  была связана такая система множителей  $c_{it}$  ( $i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$ ) (оценок для всех продуктов и факторов во все промежутки времени), что

- а)  $c_{it} \geq 0$  ( $i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T$ ), причем не все  $c_{it} = 0$ ;
- б)  $\sum_{i,t} c_{it} a_{it}^s \leq 0$  ( $s = 1, \dots, r$ ),
- в)  $\sum_{i,t} c_{it} a_{it}^s = 0$ , если  $h_s > 0$ .

Множители (оценки) естественно нормировать. Например, полагая

$$c_{it} = \lambda_t c'_{it} \quad (i = 1, \dots, N; t = 1, \dots, T),$$

можно добиться того, чтобы оценки  $c'_{it}$  удовлетворяли условиям

$$c'_{i_1 t} q_{i_1} + c'_{i_2 t} q_{i_2} + \dots + c'_{i_n t} q_{i_n} = 1 \quad (t = 1, \dots, T),$$

т. е. чтобы оценка некоторого фиксированного набора продукции  $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots, q_{i_n}$  во все промежутки времени равнялась 1. При этом левые части неравенств и уравнений в условиях б) и в) заменяются на следующие:

$$\sum_{t=1}^T \lambda_t \sum_i c'_{it} a_{it}^s,$$

т. е. при оценке технологического способа для продукции и затрат, производимых в разные промежутки времени, оценки должны быть приведены к одному моменту с помощью множителей  $\lambda_t$ .

Отношение  $\lambda_t/\lambda_r$  представляет (при избранной единице) коэффициент приведения затрат периода  $t$  к периоду  $r$ . В частности, величина

$$\frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}} - 1 = \frac{\lambda_t - \lambda_{t+1}}{\lambda_{t+1}}$$

определяет нормальную эффективность капиталовложений при переходе от периода  $t$  к следующему.

Величины  $c_{it}$  характеризуют динамику оценок; они представляют оценки затрат и продукции, приведенные к одному моменту. Величины  $c'_{it}$  характеризуют относительную динамику оценок. В соответствии с этим возникают и два способа подсчета эффективности некоторого капиталовложения (нового производственного способа, рассчитанного на длительный период). Именно, если затраты и продукция по годам для него характеризуются матрицей  $\|\tilde{a}_{it}\|$ , то решение вопроса о целесообразности его применения определяется тем, будет ли положительной сумма

$$\sum_{i,t} c_{it} \tilde{a}_{it} = \sum_i \lambda_t \sum_i c'_{it} \tilde{a}_{it}.$$

Первое выражение подсчитывается непосредственно по динамике оценок, второе — по относительной динамике с последующим приведением затрат каждого периода к одному моменту (ср. выводы 25 и 26).

Расчет упрощается в случае, если относительные оценки не меняются во времени. Тогда достаточно знать оценки в начальный момент  $c'_{i1}$  и коэффициенты приведения  $\lambda_t$ , и для оценки способа достаточно применить второе из данных выше выражений, заменяя  $c'_{it}$  на  $c'_{i1}$ .

**Свойства оценок. Вариация плана.** При анализе основной задачи производственного планирования был выяснен ее геометрический смысл. В частности, было показано, что о. о. оценками являются коэффициенты при текущих координатах в уравнении гиперплоскости  $H$ , опорной к конусу  $K$  и проходящей через крайнюю точку  $y^*$  пересечения оси  $Y$  с этим конусом. Отсюда, прежде всего, ясно, что о. о. оценки вполне конкретны, т. е. они связаны с обстановкой (имеющимися технологическими способами, размерами ресурсов, ассортиментным заданием) и с ее изменением меняются (ср. вывод 6). Действительно, при таких изменениях изменяются конус планов  $K$  и ассортиментная ось  $Y$ , а вместе с ними и опорная гиперплоскость  $H$ .

Однако если исключить особые случаи, когда точка  $y^*$ , отвечающая оптимальному плану, лежит в грани конуса  $K$  размерности меньшей, чем  $N - 1$ , то при небольших изменениях ассортиментного задания и ресурсов крайняя точка  $y^*$  остается в той же грани; поэтому о. о. оценки при этом не меняются. При других небольших изменениях (в способах) несколько изменяется конус  $K$ ; это приводит лишь к небольшим изменениям о. о. оценок.

Таким образом, о. о. оценки обладают известной устойчивостью по отношению к изменениям в обстановке (ср. вывод 7).

Переходя от точки  $y^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$  к близкой точке

$$y = (x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2, \dots, x_N^* + \Delta x_N),$$

расположенной в той же опорной гиперплоскости, мы приходим к оптимальному плану, отвечающему несколько иным ресурсам и ассортиментному заданию. При этом, как отмечалось, о. о. оценки  $c_1, c_2, \dots, c_N$  не меняются, поэтому

$$\sum_{i=1}^N c_i x_i^* = \sum_{i=1}^N c_i (x_i^* + \Delta x_i) = 0,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^N c_i \Delta x_i = 0. \quad (11)$$

Последнее соотношение естественно назвать уравнением вариации плана; оно определяет условие эквивалентной замены одних видов продукции и производственных факторов другими, которое должно соблюдаться при переходе от данного оптимального плана к варьированному (близкому) оптимальному плану и которое, вообще говоря, достаточно для реализации последнего. В частности, одна единица ингредиента ( $i_1$ ) может быть заменена  $c_{i_1}/c_{i_2}$  единицами ингредиента ( $i_2$ ). При использовании других оценок (отличных от о. о. оценок) такая замена, вообще говоря, невозможна. Отсюда ясно, что определяемые о. о. оценками соотношения между продуктами и факторами различных видов вполне реальны (ср. вывод 8 и более общий вывод 13).

Указанные свойства о. о. оценок, а также уравнение вариации обеспечивают многочисленные применения о. о. оценок в различных вопросах, связанных с корректировкой плана и принятием отдельных частных решений (применения такого рода детально описаны в основном тексте книги; см., например, выводы 9, 10, 15, 16).

**ЗАМЕЧАНИЕ 14.** Мы указывали, что решение вопроса об эффективности некоторого нового способа, характеризуемого вектором  $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_N)$ , определяется тем, будет ли положительной сумма  $\sum_{i=1}^N c_i \tilde{a}_i$ . Однако сказанное относится лишь к случаю, когда способ может быть применен с любой интенсивностью. Нередко встречаются производственные способы, которые могут использоваться только в заданном размере (неделимые способы или вложения). При оценке такого способа необходимое условие его применения  $\sum_{i=1}^N c_i \tilde{a}_i \geq 0$  сохраняет силу; достаточность же этого условия нельзя гарантировать, так как включение рассматриваемого способа в план может потребовать больших вариаций, чем допустимо. Поэтому для решения вопроса в этих случаях может потребоваться составление нового плана с включением в него такого способа и сравнение продукции и затрат полученного плана с первоначальными.

**Рента и прокатная оценка.** Проведенный выше анализ основной задачи производственного планирования показал, что при приложении методов оптимального планирования к конкретным вопросам оказывается нужным наряду с обычно рассматриваемыми в экономическом анализе видами затрат учитывать еще и некоторые другие. В числе затрачиваемых факторов может фигурировать, например, использование более плодородной земли, занятость производственной площади, занятие дефицитного оборудования (помимо его износа) или оборотных средств на определенное время и тому подобное. Если эти факторы имеются в ограниченном объеме и полностью используются, то они получают положительные оценки. Поэтому игнорирование их в экономических расчетах часто приводит к неправильным решениям. Многочисленные примеры такого рода приведены в основном тексте книги.

Таким образом, для получения правильных решений в экономический расчет необходимо вводить ренту (при более благоприятных природных условиях) и прокатную оценку (при использовании дефицитного оборудования). Численные значения этих величин определяются наряду с другими о. о. оценками.

**О показателях, характеризующих работу предприятий.** Рассмотрим вопрос о возможности использования о. о. оценок при построении экономико-статистических показателей, характеризующих работу предприятий.

В изучавшейся модели можно считать, что каждый производственный участок включает в себя некоторую группу процессов, составляющую часть общего плана. На этом участке производится некоторая продукция и расходуются в определенном размере ряд факторов и продукция, выпускаемая на других участках. При этом плановая суммарная оценка продукции и затрат (по о. о. оценкам для всего комплекса с учетом ренты и прокатной оценки) должна для него равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^N c_i \tilde{x}_i^{\text{пл.}} = 0$$

( $\tilde{x}_i^{\text{пл.}}$  — плановые объемы выпуска продукции и расходов на рассматриваемом участке). Однако за счет сокращения затрат или увеличения выпуска по сравнению с планом сумма, составленная таким же образом по фактическим данным, как правило, должна оказаться положительной. Ее значение и можно принять в качестве основного показателя, характеризующего успешность работы участка:

$$R = \sum_{i=1}^N c_i \tilde{x}_i^{\text{ф.}}$$

где  $\tilde{x}_i^{\text{ф.}}$  — фактические объемы продукции и затрат. Этот показатель подобен обычному показателю рентабельности, но отличается тем, что продукция в нем учитывается по о. о. оценкам, а в число затрат включается рента и прокатная оценка.

Поэтому стремление улучшить этот показатель будет стимулировать сокращение затрат, увеличение выпуска нужной продукции, более полное и интенсивное использование оборудования, а также применение наиболее целесообразных в данных условиях производственных способов. Применение же тех способов, которые неоправданны в данных условиях (в частности, отвергнутых при составлении оптимального плана), окажется невыгодным — будет вести к ухудшению показателя. Помимо указанного показателя следует, очевидно, еще учитывать (при оценке работы предприятия и в хозрасчете) соблюдение планового задания по составу продукции и затрат.

**Исчисление необходимых затрат в среднем труде.** С оптимальным планом, как мы видели, связываются определенные о. о. оценки для отдельных видов продукции (в пределах рассматриваемой производственной системы). Возникает вопрос, не находятся ли они в противоречии с трудовой теорией стоимости, согласно которой и в условиях социалистического общества стоимость продукции должна определяться общественно-необходимыми затратами труда.

Анализ этого вопроса показывает, что связанные с оптимальным планом о. о. оценки полностью соответствуют трудовой теории стоимости; более того, методы нахождения этих оценок дают подход к исчислению полных общественных затрат труда.

Необходимо сказать, что вопрос об исчислении общественных затрат труда в условиях социалистического общества далеко не прост, и для более сложных случаев (постоянно возникающих в условиях современного производства) отсутствует полная ясность в том, что под ними следует понимать и как должно строиться их исчисление. Так, в различных процессах получения данной продукции, применение которых рационально, действительные (фактические или плановые) затраты различны, а общественно-необходимое время должно быть единым. Производство различных видов продукции часто взаимосвязано, поэтому и затраты на них взаимозависимы, и необходимо указать принцип распределения затрат между ними.

Нам представляется, что в условиях социалистического единого планового производства (во всяком случае, если говорить о государственной промышленности), в соответствии с марксистской теорией стоимости, могут быть в качестве исходных при исчислении общественных затрат приняты следующие предпосылки: а) должны учитываться *полные* затраты труда общества на данную продукцию; б) изготовление данной продукции должно рассматриваться *конкретно*, т. е. в данных условиях, при данном состоянии производительных сил; в) должны учитываться затраты в *оптимальном плане*, т. е. действительно необходимые для общества затраты; г) исчисление должно вестись в *среднем труде*, т. е. труде, примененном при средних общественных условиях.

Не ставя задачи исчисления общественных затрат в полном объеме, мы рассмотрим ее на изучаемой математической модели производства (задача Г).

Будем предполагать, что план строится для замкнутой производственной системы, т. е. такой, которая самостоятельно производит свою продукцию (рассмотрение комплекса всегда позволяет свести дело к этому случаю). В этих условиях производственными факторами в системе будут труд и факторы, повышающие производительную силу труда (производственные мощности — различные виды оборудования, более благоприятные природные источники и пр.), при этом единственным источником стоимости является труд.

Допустим, что в оптимальном плане затраты живого труда составляют  $-x_1$  единиц<sup>8)</sup>, затраты прочих факторов  $-x_2, -x_3, \dots, -x_m$  ( $x_1, x_2, \dots, x_m$  отрицательны), а количества производимой продукции по видам составляют  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}$ .

Каждому виду продукции соответствует определенная о. о. оценка  $c_{m+j}$ . Поэтому общая оценка произведенной продукции будет (в условных единицах)

$$\sum_{j=1}^n c_{m+j} x_{m+j},$$

<sup>8)</sup>Мы рассматриваем один вид труда — простого, считая, что другие его виды (по квалификации и интенсивности) приведены к нему.

а так как вся эта продукция произведена с помощью  $-x_1$  единиц труда (среднего для данной системы), то на одну условную единицу расходуется

$$\frac{-x_1}{\sum_{j=1}^n c_{m+j}x_{m+j}}$$

единиц труда. В соответствии с этим единица продукта вида  $(m+j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ), оцениваемая в  $c_{m+j}$  условных единиц, требует затраты

$$\tilde{c}_{m+j} = \frac{-x_1}{\sum_{j=1}^n c_{m+j}x_{m+j}} c_{m+j}$$

единиц среднего труда (ясно, что величины  $\tilde{c}_{m+j}$  не зависят от выбора условной единицы). Из этого выражения следует, что о. о. оценки продукции  $c_{m+j}$  пропорциональны затратам труда  $\tilde{c}_{m+j}$ .

Покажем, что определенные таким образом затраты труда на единицу продукции соответствуют тем, которые действительно требуются для получения продукции в данных условиях.

Для этой цели предположим, что произведено увеличение плановых ресурсов системы на  $-\Delta x_1$  ( $\Delta x_1 < 0$ ) единиц труда. При этом, чтобы условия труда остались неизменными, необходимо предположить, что и обеспечивающие эти условия производственные факторы получили пропорциональные приращения:

$$-\Delta x_1 = -\frac{x_2}{x_1} \Delta x_1, \dots, -\Delta x_m = -\frac{x_m}{x_1} \Delta x_1.$$

Направляя эти средства на увеличение продукции вида  $(m+j)$ , мы получим ее в количестве  $\Delta x_{m+j}$ , для прочих видов продукции, объем производства которых остается неизменным,  $\Delta x_{m+l} = 0$  ( $l \neq j$ ). В результате мы придем к несколько измененному, но также оптимальному плану.

Уравнение вариации плана (см. (11)) дает

$$c_1 \Delta x_1 + c_2 \frac{x_2}{x_1} \Delta x_1 + \dots + c_m \frac{x_m}{x_1} \Delta x_1 + c_{m+j} \Delta x_{m+j} = 0.$$

Отсюда затраты на единицу произведенной продукции составляют

$$-\frac{\Delta x_1}{\Delta x_{m+j}} = \frac{x_1}{\sum_{i=1}^m c_i x_i} c_{m+j} = \frac{-x_1}{\sum_{l=1}^n c_{m+l} x_{m+l}} c_{m+j} = \tilde{c}_{m+j};$$

при этом принято во внимание, что в силу соотношения в) (теорема 3) для каждого используемого способа, а потому и для плана в целом

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{l=1}^n c_{m+l} x_{m+l} = 0. \quad (12)$$

Следовательно, на единицу продукции вида  $(m+j)$  (при вариации мы вновь переходим к оптимальному плану) действительно требуется  $\tilde{c}_{m+j}$  единиц труда. Такой



результат обусловлен тем, что принято во внимание полное (с учетом произведенного перераспределения средств) изменение затрат комплекса, связанное с увеличением выпуска продукции. При этом размеры затрат исчислены на основе способов, отвечающих оптимальному плану.

Обоснованность такого расчета выявляется и при другом подходе, когда общественные затраты труда на некоторую продукцию (в данном случае затраты труда в комплексе) находятся непосредственно по затратам труда с учетом условий его применения.

Рассмотрим конкретный производственный способ получения данной продукции в оптимальном плане (можно было бы взять и некоторую комбинацию способов, отвечающую плану определенного участка), при котором производится только  $(m + j)$ -й продукт, а другие продукты не производятся и не расходуются. Так как это — способ, используемый в оптимальном плане, то для него имеем

$$c_1 x_1^s + \dots + c_m x_m^s + c_{m+j} x_{m+j}^s = 0. \quad (13)$$

Отсюда непосредственные затраты труда на единицу продукции вида  $(m + j)$  в этом способе равны

$$-\frac{x_1^s}{x_{m+j}^s} = \frac{x_1^s}{\sum_{i=1}^m c_i x_i^s} c_{m+j}.$$

Они отличаются от найденного раньше значения  $\tilde{c}_{m+j}$  множителем

$$k = \left( \frac{x_1}{\sum_{i=1}^m c_i x_i} \right) : \left( \frac{x_1^s}{\sum_{i=1}^m c_i x_i^s} \right).$$

Этот множитель — *коэффициент приведения* — характеризует отличие условий труда на данном участке от средних по комплексу в части обеспеченности труда благоприятствующими факторами. Коэффициент  $k > 1$ , если условия более благоприятные, чем средние, и  $k < 1$ , если они менее благоприятны. В частности, если условия труда не предусматривают применения благоприятствующих факторов, использование которых ограничено (его можно назвать невооруженным трудом), то коэффициент приведения его к среднему

$$k_{н.} = \frac{c_1 x_1}{\sum_{i=1}^m c_i x_i} \leq 1.$$

Таким образом, мы видим, что необходимые затраты, выраженные в среднем труде, могут быть получены и непосредственно из затрат труда в конкретных условиях, а именно, они приводятся к затратам труда в средних условиях умножением на коэффициент приведения. Впрочем, последнее соображение, помогая пониманию существа вопроса, не является конструктивным, так как построение коэффициентов приведения довольно затруднительно.

Однако нахождение трудовой оценки продукции на основании анализа затрат, произведенных в процессе ее изготовления, оказывается возможным, если наряду с непосредственными затратами труда мы учтем и косвенные.

Для этой цели нужно получить оценки благоприятствующих производственных факторов, выраженные в среднем труде. Это будет

$$\tilde{c}_i = \frac{x_1}{\sum_{r=1}^m c_r x_r} c_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

В частности, при  $i = 1$  это дает оценку единицы невооруженного труда, выраженную через средний труд.

Подсчитаем теперь затраты труда на единицу продукции вида  $(m + j)$  в способе  $s$ , учитывая как непосредственные затраты труда, так и косвенные затраты благоприятствующих факторов по их оценкам, выраженным в среднем труде. Пользуясь (12) и (13), находим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{c}_i x_i^s}{x_{m+j}^s} &= -\frac{1}{x_{m+j}^s} \sum_{i=1}^m \frac{x_1}{\sum_{r=1}^m c_r x_r} c_i x_i^s = -\frac{\sum_{i=1}^m c_i x_i^s}{x_{m+j}^s} \cdot \frac{x_1}{\sum_{r=1}^m c_r x_r} = \\ &= \frac{x_1}{\sum_{r=1}^m c_r x_r} c_{m+j} = \frac{x_1}{\sum_{l=1}^m x_{m+l} x_{m+l}} c_{m+j} = \tilde{c}_i. \end{aligned}$$

Таким образом, этот подсчет дает прежнее значение необходимых затрат труда. Этот способ подсчета может быть применен и в случае, когда в числе затрат фигурируют и другие виды продукции, если они будут учтены по их трудовой оценке.

При определении затрат труда в пределах комплекса мы исходили из натурального их измерения. В более сложных условиях исчисление общественных затрат, по-видимому, осуществимо только в стоимостной форме. Однако основные принципы, которые выявлены проведенным анализом — необходимость учета косвенных затрат или приведения условий труда к средним, — остаются в силе.

**Значение математических моделей и область их применения в экономическом анализе.** Математические методы с течением времени получают все большее значение и распространение. Если прежде основной областью их применения были естествознание и техника, то теперь они находят значительное использование в других областях науки и человеческой деятельности. Характерные примеры — применение математических методов в филологии (в связи с машинным переводом) и в военном деле (исследование операций). Весьма важным и естественным полем применения математических методов являются проблемы экономики (планово-экономического анализа), которые по самой своей природе имеют отчетливо выраженный количественный характер.

Математическая символика и методы занимают значительное место в экономических исследованиях К. Маркса и в экономических и статистических работах В. И. Ленина, относящихся к экономическому анализу капитализма. Эти методы должны получить особенно большое значение в вопросах экономики социалистического общества. Задачей марксистской экономической науки при исследовании

капиталистического общества было вскрытие его социальной природы, общих законов и тенденций его развития и гибели. Экономическая наука в условиях социалистического общества должна служить базой конкретных решений по вопросам развития народного хозяйства. Экономические законы в социалистическом обществе имеют объективный характер, но в условиях планового хозяйства реализуются в большей мере путем сознательных решений. Поэтому успешное применение этих законов в интересах общества зависит от того, насколько полно и глубоко мы ими овладеем<sup>9)</sup>. Отсюда ясно, что марксистский анализ экономических проблем социалистического общества, механизма действия его законов должен быть максимально точным, детальным и конкретным. Естественно ожидать, что в таком анализе математические средства должны получить особенно большое применение. При этом сложность и взаимосвязанность экономических проблем в условиях современного производства не позволяют ожидать, что при их количественном анализе будет достаточно обойтись простейшими математическими средствами. Несомненно, здесь должны потребоваться последние достижения современной математики.

Между тем до недавнего времени математический анализ не только почти не применялся в экономических вопросах, но приходилось даже встречаться с определенными возражениями против допустимости его применения. Такие возражения нельзя признать оправданными. Недооценка и отрицание возможности применения количественных математических методов при анализе экономических явлений со ссылкой на их специфический характер представляют, как нам кажется, пережиток имевших место представлений о том, что экономические законы при социализме не действуют объективно. В такой же мере неоправданно и предубеждение против математических методов, связанное с фактом распространенного их использования буржуазными экономическими школами. Очевидно, что прецеденты ненаучного применения математики в чуждых нам целях не могут воспрепятствовать тому, чтобы советскими учеными математические средства были применены в экономических вопросах методологически правильно и на пользу делу строительства коммунизма.

Математический анализ не применяется непосредственно к проблемам реальной действительности. Обычно всегда путем абстракции создается некоторая математическая модель рассматриваемого явления, и уже к ней применяются математические методы и средства. Такая модель, естественно, охватывает не все, а лишь некоторые важнейшие в данном рассмотрении стороны явления. Поэтому решения и выводы, полученные в результате анализа, применимы к реальной задаче лишь с известной степенью приближения. Часто последующий качественный анализ подсказывает, в каком направлении следует уточнить модель, чтобы она лучше отражала реальную задачу.

---

<sup>9)</sup> Для иллюстрации различного характера осуществления объективных законов напомним о двух классических задачах вариационного исчисления: задаче о цепной линии и задаче о брахистохроне (кривой наискорейшего спуска). Тяжелая нить провисает по цепной линии независимо от того, известно ли решение данной задачи лицу, закрепившему ее концы. То, насколько близкой к брахистохроне будет выбрана кривая для спуска, зависит от знаний вариационного исчисления конструкторами этого спуска.

В то же время если модель имеется, то ее математический анализ может быть использован не только для получения некоторых количественных данных; он помогает вскрывать новые закономерности, анализировать причинные связи и зависимости, предсказывать новые явления (примеры такого рода в естествознании: открытие Нептуна, теоретическое предсказание некоторых явлений при сверхзвуковых скоростях и в атомной физике).

Решающее значение для действительности и применимости данной модели является правильность исходных методологических предпосылок при ее построении, то, что в ней действительно учтены важнейшие и отброшены второстепенные факторы. Так, некоторые модели капиталистической экономики, вводимые буржуазными экономистами, оказываются заведомо порочными, так как при их построении авторы «отвлекаются» от эксплуатации, наличия безработицы и тому подобных явлений, постоянно присущих этому социальному строю. Естественно, что и выводы, полученные при таких предпосылках, не заслуживают никакого доверия.

Следовательно, необходимым условием при изучении задач экономики социалистического общества с применением математического анализа и математических моделей является соответствие исходных предпосылок основным принципам марксистской методологии в экономическом анализе: диалектическое мышление, объективный характер исследования, социальный анализ производственных отношений, примат производства, признание труда как единственного источника ценностей. Основным критерием для оценки значения и правильности таких исследований, как и вообще истинности всякого познания, должен служить ленинский критерий практики. Другими словами, решающее значение при их оценке должно иметь соответствие полученных результатов опыту и то, в какой мере они позволяют объяснять явления нашей экономической действительности и активно воздействовать на них, насколько они могут помочь в разработке наиболее действенных мероприятий и решений.

Социалистическое общество по своей природе способно обеспечить наиболее полное и рациональное использование производственных ресурсов (в целом и на отдельных участках) для наилучшего удовлетворения потребностей. Поэтому для каждого участка социалистического производства и для социалистического общества в целом оптимальный план является осуществимой реальностью, а закономерности такого плана — реальными экономическими закономерностями (подобно тому, как механическое движение управляется экстремальными вариационными принципами механики). В силу этого ясно, что при количественном, математическом анализе плано-экономических проблем социалистического общества основным средством должно быть исследование экстремальных математических задач<sup>10)</sup>.

<sup>10)</sup> Напротив, наличие в капиталистическом обществе безработицы, систематических кризисов и неполного использования производственных мощностей показывает недопустимость применения максимального принципа при исследовании его экономики в целом. Поэтому являются методологически порочными попытки буржуазных экономистов — апологетов капитализма (например, Парето) исследовать экономические законы капитализма, исходя из математических при-

В условиях социалистического общества решающей является задача повышения уровня производства. При этом в исследовании экономики социалистического общества методологически правомерно известное отделение проблемы производства от проблемы распределения. Самостоятельное рассмотрение проблемы оптимальной организации производства допустимо, так как при общественной, социалистической собственности на средства производства в двух ее формах, в бескризисном социалистическом хозяйстве не может случиться, что произведенная в соответствии с потребностями общества продукция окажется неиспользованной. В силу этого следует признать вполне оправданным рассмотрение моделей производственного планирования, соответствующих задачам текущего и перспективного планирования (основная задача и динамическая), в которых при данных ресурсах максимизируется выпуск продукции нужного состава или соответственно рост ее выпуска<sup>11)</sup>. Результаты анализа этих схем подтверждают, что требование оптимальности данного плана как производственного позволяет получить важные его количественные характеристики<sup>12)</sup> и достаточно содержательные выводы.

Не должно удивлять и то обстоятельство, что, несмотря на принципиальные, качественные различия закономерностей социалистического и капиталистического общества и их основных экономических категорий, по отдельным количественным показателям и соотношениям обнаруживается явная формальная аналогия: нормальная эффективность и норма прибыли, нормальная оценка и цена производства. На такую возможность обращал внимание В. И. Ленин, отмечая, что «единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений»<sup>13)</sup>.

Как мы отмечали, изученные модели должны найти применение как в вопросах народнохозяйственного планирования, так и в более частных вопросах, относящихся к отдельным участкам социалистического производства и отдельным задачам планирования. Анализ этих схем приводит также к некоторой системе объективно обусловленных оценок<sup>14)</sup>.

Социалистическое хозяйство заинтересовано в получении научно обоснованных значений затрат на различные виды продукции. Знание этих затрат требуется при решении вопросов распределения труда, замены одной продукции другой или

---

знаков максимума.

<sup>11)</sup>Использование таких моделей для общего анализа экономики в условиях капитализма невозможно. Там экономика страны в целом не может следовать единому, тем более максимальному плану. В капиталистическом хозяйстве не только интересы общества постоянно подменяются интересами отдельных капиталистических корпораций, но и истинные потребности общества искажаются конъюнктурой спроса.

<sup>12)</sup>Важно подчеркнуть, что анализ модели является необходимым элементом в исследовании объекта, хотя модель вовсе не исчерпывает объекта. Например, в строительной механике расчет здания далеко не исчерпывается расчетом балки, стержня и фермы; однако, не владея методами расчета этих элементов, правильно рассчитать здание в целом заведомо невозможно. *Ленин В. И. Сочинения. — Т. 14. — С. 276.*

<sup>13)</sup>*Ленин В. И. Сочинения. — Т. 14. — С. 276.*

<sup>14)</sup>Фигурально выражаясь, можно сказать, что проблема ценообразования была бы решена, если бы была найдена опорная гиперплоскость к конусу всех народнохозяйственных планов.

одних затрат другими. И такое проявление стоимостных отношений в условиях социалистического общества является основным и характерным. Выбор того или иного решения отдельного экономического вопроса не меняет коренным образом общего плана, а связан только с некоторой его вариацией. Поэтому о. о. оценки, соответствующие условиям производства продукции в оптимальном плане, позволяющие, как мы видели, правильно сопоставлять результаты различных вариаций плана, наиболее приспособлены для установления народнохозяйственного эффекта при выборе конкретных экономических решений. Это определяется тем, что о. о. оценки отвечают размерам затрат (среднего) труда, необходимым для производства продукции в данных условиях. То обстоятельство, что при этом приходится учитывать затраты факторов, определяющих условия применения труда и его экономию, и что эти факторы также получают о. о. оценки (рента, прокатная оценка оборудования), связано с необходимостью правильного подсчета народнохозяйственных затрат труда, учитывающего условия его применения, т. е. связано с необходимостью подсчета не частных затрат труда изолированно на данном участке, а полных общественных затрат.

При таком полном учете затрат оказывается, что они характеризуют не только уровень затрат на данную продукцию при малых вариациях объема ее выпуска, но, как правило, и единую их величину для всех используемых (рациональных) способов ее производства на всех участках, и, таким образом, в результате совпадают с глобальным (средним) уровнем затрат<sup>15)</sup>.

Важно отметить реальность постановки рассматриваемой задачи оптимального планирования. Она определяется тем, что система о. о. оценок, получаемая наряду с оптимальным планом, дает средства для решения вопросов, с необходимостью возникающих при его фактическом осуществлении: изменение плана (с сохранением оптимальности) при изменении обстановки, построение показателей работы отдельных участков, стимулирующих следование оптимальному плану и др.

Необходимо, однако, подчеркнуть, что рассмотренные модели производственного планирования представляют лишь приближение к реальной задаче. Уточняя исследование, следовало бы учесть неполную оправданность предпосылки линейности, учесть стохастический (вероятностный) характер некоторых исходных данных; наконец, не следует упускать из вида и необходимость учета внеэкономических факторов. Однако учет этих соображений не может изменить основных выводов, и поэтому в первую очередь необходима реализация тех путей плано-экономического анализа, которые дает рассмотрение основной модели.

При этом, конечно, остается в стороне ряд важных вопросов, которые вовсе не рассматриваются в указанных моделях: уточнение состава конечной продукции на основе изучения личных потребностей, вопросы распределения, в частности, системы оплаты труда и т. п. Все эти вопросы требуют специального изучения и

---

<sup>15)</sup> Игнорирование косвенных видов затрат приводит к искажению действительных соотношений затрат, сравнимому с тем, которое получилось бы, скажем, в задачах механики, если бы были исключены из рассмотрения (или учитывались бы только качественно) силы реакции, силы трения и силы инерции и были бы сохранены только «видимые» активные силы.

---

не являются предметом данной работы, но нужно полагать, что и при их исследовании математические методы и модели также найдут свое место. Описанный круг вопросов требует серьезных дальнейших исследований, результаты которых, вероятно, внесут значительные коррективы к выдвинутым в работе положениям и приведут к разработке многих важных вопросов, вовсе здесь не затронутых. Для нас, однако, несомненно, что математический анализ при правильной методологии применения поможет лучше познать количественные стороны экономических законов социалистического общества, полнее раскрыть преимущества этого самого совершенного социального строя. Это будет способствовать более полной реализации возможностей социалистического способа производства в практике народного хозяйства в целом и на каждом его участке. Эта задача была изучена автором в работе [1] (см. литературу к Приложениям I и II).

---

### Численные методы решения задач оптимального планирования

Приведенные в Приложении I признаки оптимальности плана позволяют дать ряд эффективных методов для решения рассматриваемых задач оптимального планирования. Описанию этих методов и посвящено настоящее приложение.

В излагаемых методах основным инструментом для разыскания оптимального плана служат множители, фигурирующие в соответствующих признаках. Поэтому все эти методы могут рассматриваться как различные конкретные осуществления общего метода разрешающих множителей, описанного в [1].

Как и во всей работе, изложение здесь строится в основном в расчете на лиц, не являющихся специалистами-математиками. Поэтому мы не останавливаемся на детальном математическом обосновании предлагаемых методов, а также на рассмотрении некоторых особых случаев, которые сравнительно редко встречаются на практике.

Следует заметить, что методы решения изучаемых задач, вытекающие из общих правил классического анализа, неосуществимы практически даже в сравнительно простых случаях. Например, для решения с помощью этих методов задачи А (о распределении программы) при  $m = 8$ ,  $n = 5$  необходимо решить около миллиарда алгебраических систем линейных уравнений с 12-ю неизвестными, что, очевидно, нереально даже при использовании современных быстродействующих вычислительных машин.

**Анализ имеющегося плана.** С задачей разыскания оптимального плана непосредственно связан вопрос о контроле (анализе) имеющегося плана. Очевидный способ контроля состоит в попытке составить новый план с более высокой комплексной производительностью. Просмотреть при этом огромное число всех вариантов, как правило, невозможно, а просмотр лишь части вариантов не дает уверенности в оптимальности рассматриваемого плана. Таким образом, несмотря на большую трудоемкость, указанный метод контроля не позволяет обосновать оптимальность выбранного варианта; поскольку качество такого контроля существенно зависит от квалификации работника, этот контроль носит субъективный характер.

Полученные признаки оптимальности плана (Приложение I, теоремы 1–6) дают объективные методы контроля имеющегося плана. Для проверки оптимальности данного плана достаточно выяснить, существует ли система множителей (оценок), удовлетворяющая соответствующим условиям.



ПРИМЕР 1<sup>1)</sup>. Пусть в условиях задачи А (Приложение I)  $m = 4$ ,  $n = 3$ ,  $k_1 = 5$ ,  $k_2 = 12$ ,  $k_3 = 10$  (речь идет, например, о распределении трех видов работ по четырем участкам); при этом производительности участков  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $j = 1, 2, 3$ ) характеризуются матрицей:

$$\begin{vmatrix} 40 & 250 & 250 \\ 20 & 0 & 500 \\ 80 & 200 & 220 \\ 0 & 120 & 180 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим следующий допустимый план работы участков:

$$\begin{vmatrix} 0,436 & 0,564 & 0 \\ 0,565 & 0 & 0,435 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

При этом плане в единицу времени производится  $x_1^\pi = 108,74$ ;  $x_2^\pi = 261$ ;  $x_3^\pi = 217,5$  единиц соответствующих продуктов (например,  $x_1^\pi = 40 \times 0,436 + 20 \times 0,565 + 80 \times 1 = 108,74$ ), т. е. в единицу времени производится

$$\mu(\pi) = \frac{x_1^\pi}{k_1} = \frac{x_2^\pi}{k_2} = \frac{x_3^\pi}{k_3} = 21,75$$

полных ассортиментных наборов продукции.

Попытаемся найти оценки продуктов, удовлетворяющие условиям теоремы 1 (стр. 321). Эти оценки определяются с точностью до постоянного множителя, поэтому можно принять оценку продукта 1-го вида за единицу:  $c_1 = 1$ . Тогда производительности участков (1), (2) и (3), которые используются для изготовления этого продукта, составляют соответственно:  $d_1 = 1 \times 40 = 40$ ,  $d_2 = 1 \times 20 = 20$ ,  $d_3 = 1 \times 80 = 80$ . На участке (1) производится еще продукт 2-го вида; поэтому оценка единицы этого продукта  $c_2 = 40 : 250 = 0,16$ . Далее находим производительность участка (4)  $d_4 = 0,16 \times 120 = 19,2$  и оценку единицы продукта 3-го вида  $c_3 = 20 : 500 = 0,04$ . Последовательность определения оценок может быть изображена схемой, представленной на рис. 10.

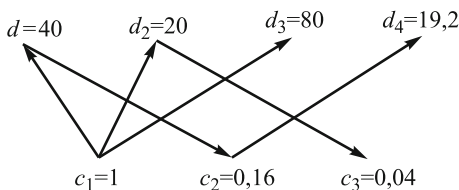


Рис. 10

<sup>1)</sup>Числовые данные этого примера соответствуют задаче, приведенной в § 2 главы I.

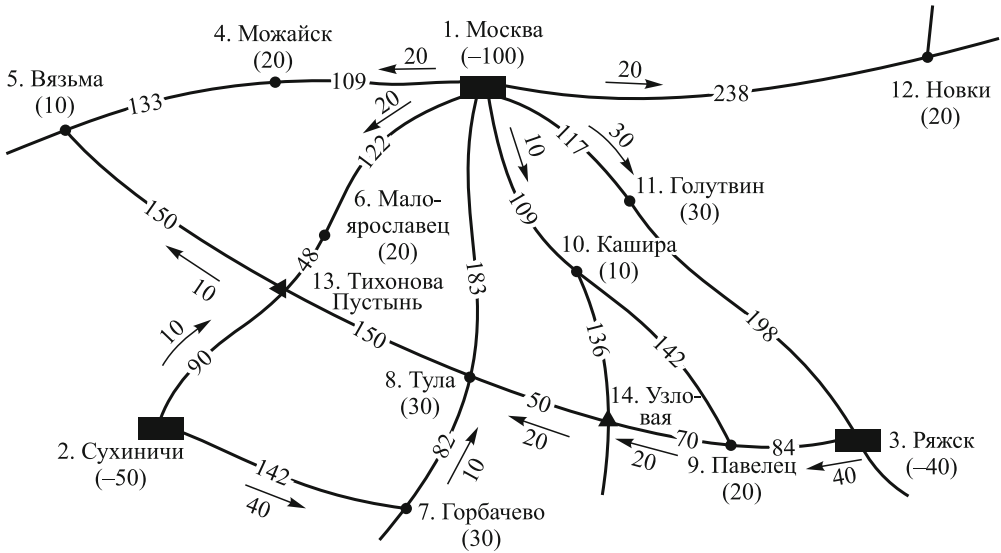


Рис. 11

Нетрудно проверить, что полученные оценки удовлетворяют всем условиям теоремы 1 (в частности, каждый станок используется на том виде работ, где его производительность максимальна). Следовательно, эти оценки представляют систему о. о. оценок, а рассматриваемый план — оптимальный.

Рассмотрим теперь другой план

$$\pi' = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,1925 & 0,8075 & 0 \\ 0 & 0,1622 & 0,8378 \end{array} \right\|.$$

Для него имеем:

$$x_1^\pi = 75,4; \quad x_2^\pi = 181,0; \quad x_3^\pi = 150,8;$$

$$\mu(\pi) = \frac{x_1^\pi}{k_1} = \frac{x_2^\pi}{k_2} = \frac{x_3^\pi}{k_3} = 15,08.$$

При контроле этого плана, аналогично предыдущему, находим:

$$c_1 = 1; \quad d_1 = 40; \quad d_2 = 20; \quad d_3 = 80;$$

$$c_2 = 80 : 200 = 0,4; \quad d_4 = 0,4 \times 120 = 48; \quad c_3 = 48 : 180 = 0,2667.$$

Полученные оценки не удовлетворяют теореме 1; например, производительность участка (2) при изготовлении 3-го продукта составляет  $0,2667 \times 500 = 133,3 > 20 = d_2$ , а эта возможность в плане не используется — нарушено условие б). Поэтому план  $\pi'$  не является оптимальным; его можно улучшить, используя частично участок (2) для изготовления 3-го продукта.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим транспортную задачу (задачу E) в конкретных условиях, приведенных на рис. 11.

Здесь  $m = 14$  пунктов соединены железнодорожной сетью, состоящей из  $r = 19$  участков<sup>2)</sup>.

Рядом с названием каждого пункта (i) в скобках указан объем потребления в нем  $b_i$ . Пункты производства ( $b_i < 0$ ) изображены прямоугольниками, пункты потребления ( $b_i > 0$ ) — кружками, а промежуточные пункты ( $b_i = 0$ ) — треугольниками. На каждом участке проставлена цифра  $a_s$  — затраты по перевозке единицы груза по этому участку. Для определенности мы считаем, что числа  $b_i$  указывают объем потребления в вагонах в сутки, а числа  $a_s$  — расстояние между соответствующими пунктами в километрах; следовательно, затраты измеряются в вагоно-километрах.

На рис. 11 приведен также некоторый план перевозок (стрелки и цифры над ними указывают соответственно направления и объемы грузопотоков). При этом плане в каждый пункт продукт поступает в необходимом количестве, т. е. план является допустимым. Для установления оптимальности плана нужно попытаться найти потенциалы  $c_1, c_2, \dots, c_{14}$ , удовлетворяющие условиям теоремы 5.

Потенциалы определяются лишь с точностью до постоянного слагаемого; поэтому для одного из пунктов потенциал можно выбрать произвольно. Примем, например, потенциал для Москвы  $c_1 = 500$ . Из Москвы производятся перевозки в Можайск; следовательно, потенциал в этом пункте  $c_4 = 500 + 109 = 609$ . Аналогично находим  $c_6, c_{13}, c_5, c_2$  и т. д.:

$$\begin{aligned} c_6 &= 500 + 122 = 622; & c_{13} &= 622 - 48 = 574; & c_5 &= 574 + 150 = 724; \\ c_2 &= 574 - 90 = 484; & c_7 &= 484 + 142 = 626; & c_8 &= 500 + 183 = 683; \\ c_{14} &= 683 - 50 = 633; & c_9 &= 633 - 70 = 563; & c_3 &= 563 - 84 = 479; \\ c_{10} &= 500 + 109 = 609; & c_{11} &= 500 + 117 = 617; & c_{12} &= 500 + 238 = 738. \end{aligned}$$

Полученные потенциалы удовлетворяют всем условиям теоремы 5. Действительно, эти потенциалы были построены так, чтобы выполнялись условия б); нетрудно проверить, что выполнены также и условия а):

$$\begin{aligned} c_5 - c_4 &= 115 < 133; & c_8 - c_7 &= 57 < 82; & c_8 - c_{13} &= 109 < 150; \\ c_{14} - c_{10} &= 24 < 136; & c_{10} - c_9 &= 46 < 142; & c_{11} - c_3 &= 138 < 198. \end{aligned}$$

Поэтому рассматриваемый план является оптимальным.

В приведенном примере удалось определять потенциалы во всех пунктах на основании одних только условий б). Может случиться, что при данном плане перевозок все пункты разбиваются на несколько групп, не связанных между собой грузопотоками. Тогда невозможно определить потенциалы во всех пунктах, исходя из условий б). Однако, используя помимо б) еще и условия а), можно получить для искомых потенциалов систему неравенств. Если эта система совместна, то имеющийся план — оптимальный. Если это не так, т. е. хотя бы для одного из

<sup>2)</sup>Точнее, если придерживаться обозначенной задачи E, следует считать, что  $r = 38$ , так как в данном случае по каждому участку сети допускаются перевозки в любом из двух направлений.

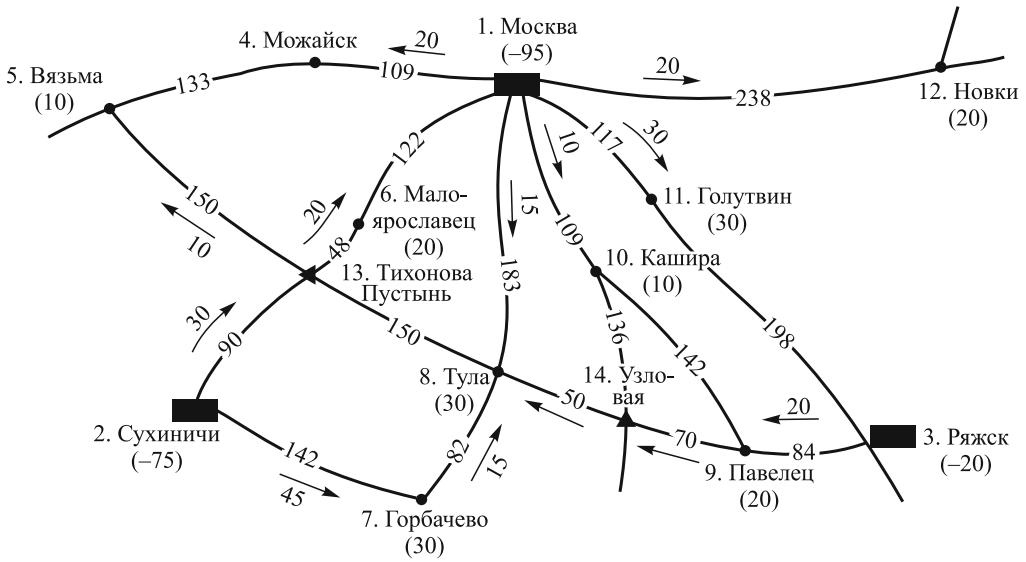


Рис. 12

потенциалов получаются противоречивые неравенства, то это означает, что рассматриваемый план не оптимальный; одновременно выявляется возможный способ улучшения плана.

Поясним сказанное на конкретном примере. Пусть в условиях примера 2 дан план, представленный на рис. 12. Как нетрудно видеть, этот план является допустимым. Попытаемся найти соответствующие ему потенциалы.

Принимая  $c_1 = 500$ , находим:

$$c_4 = 609; \quad c_6 = 622; \quad c_{10} = 609; \quad c_{11} = 617; \quad c_{12} = 738.$$

Остальные пункты не связаны грузопотоками с перечисленными. Поэтому условие б) не позволяет определить потенциалы в них.

Однако, применяя к участку Вязьма — Можайск условие а), получаем:

$$609 - 133 = 476 \leq c_5 \leq 609 + 133 = 742.$$

Согласно б) и а) для Тихоновой Пустыни имеем

$$326 = 476 - 150 \leq c_{13} \leq 742 - 150 = 592,$$

$$574 = 622 - 48 \leq c_{13} \leq 622 + 48 = 670,$$

откуда  $574 \leq c_{13} \leq 592$ .

Далее, согласно б), находим:

$$484 \leq c_2 \leq 502; \quad 626 \leq c_7 \leq 644; \quad 708 \leq c_8 \leq 726.$$

Применяя же условие а) к участку Москва — Тула, получаем

$$317 \leq c_8 \leq 683.$$

Для  $c_8$  — потенциала в Туле — получены противоречивые неравенства:

$$c_8 \geq 708, \quad c_8 \leq 683;$$

это показывает, что рассматриваемый план не оптимален. Его можно улучшить, вводя грузопоток на участке Москва — Тула за счет уменьшения грузопотока на участке Горбачево — Тула (первый из этих участков использовался для получения нижней границы для потенциала в Туле 708, а второй — для получения его верхней границы 683). Исправление этого плана рассмотрено ниже.

Дадим теперь общее алгебраическое описание предлагаемого метода контроля в условиях основной задачи производственного планирования (см. Приложение I, задача Г).

Каждому допустимому вектору (плану)  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , как мы видели (см. (8), стр. 331), отвечает точка

$$y^0 + \lambda z = \sum_{s=1}^r h_s a^s + \sum_{i=1}^N h_{r+i} e^i, \quad (1)$$

где

$$y^0 = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0); \quad z = (0, \dots, 0, k_1, \dots, k_n)$$

$$a^s = (a_1^s, a_2^s, \dots, a_N^s) \quad (s = 1, \dots, r)$$

— данные векторы, характеризующие соответственно ограничения по первым  $m$  ингредиентам, требуемую комплектность по последним  $n$  ингредиентам и имеющиеся технологические способы;  $e^i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, -1, 0, \dots, 0)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) — орты соот-

ветствующих координатных осей;  $\lambda = \mu(\pi)$  — комплексная производительность;  $h_s$  ( $s = 1, \dots, r$ ) — компоненты вектора  $\pi$ , а коэффициенты при ортах  $h_{r+i}$  — излишки по отдельным ингредиентам, которые определяются по формулам (9) (стр. 331). Сохраняя в правой части (1) лишь отличные от нуля слагаемые, мы приходим к соотношению:

$$y^0 + \lambda z = \sum_{k=1}^u h_{s_k} a^{s_k} + \sum_{l=1}^v h_{r+i_l} e^{i_l} \quad (2)$$

$$(h_s > 0, \quad s = s_1, \dots, s_u, \quad r + i_1, \dots, r + i_v).$$

В Приложении I (см. теорему 3) было показано, что для оптимальности допустимого плана  $\pi$  необходимо и достаточно, чтобы существовали такие множители (о. о. оценки)  $c_1, c_2, \dots, c_N$ , что:

а)  $c_i \geq 0$  ( $i = 1, \dots, N$ ),  $\max_{1 \leq j \leq n} c_{m+j} > 0$ ;

б)  $\sum_{i=1}^N c_i a_i^s \leq 0$  ( $s = 1, \dots, r$ );

в)  $\sum_{i=1}^N c_i a_i^{s_k} = 0$  ( $k = 1, \dots, u$ );

г)  $c_i = 0$  ( $i = 1, \dots, v$ ).

Это позволяет сформулировать следующее общее правило контроля.

ПРАВИЛО 1. Для контроля имеющегося допустимого плана  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  нужно рассмотреть систему уравнений в) и г) относительно неизвестных  $c_1, c_2, \dots, c_N$ .

1) Если эта система не имеет решения, удовлетворяющего условию а), то план  $\pi$  не является оптимальным; причем его можно улучшить без привлечения новых технологических способов, а путем изменения интенсивности применения используемых в нем способов.

2) Пусть рассматриваемая система имеет единственное (с точностью до множителя) решение  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_N$ , удовлетворяющее условию а). Определяем для всех технологических способов величины

$$\sum_{i=1}^N \tilde{c}_i a_i^s \quad (s = 1, \dots, r). \quad (3)$$

Если все они положительны, т. е. выполняется также и условие б), то план  $\pi$  оптимален, а числа  $\tilde{c}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) представляют систему о. о. оценок. В противном случае рассматриваемый план неоптимальный, причем известно, как его можно улучшить, а именно, привлекая тот технологический способ, для которого найденная величина оказалась положительной.

3) Если система в)–г) неопределенна, т. е. ее общее решение содержит несколько произвольных постоянных, то условия а) и б) дают систему неравенств для определения этих постоянных. При совместности этой системы неравенств план  $\pi$  — оптимальный; в противном случае он таковым не является.

ЗАМЕЧАНИЕ. В практических задачах случай 3) встречается значительно реже, чем случаи 1) и 2).

В рассмотренном выше примере 1 при контроле плана  $\pi$  мы находили оценки фактически из следующей системы:

$$\begin{aligned} -d_1 + 40c_1 &= 0; & -d_2 + 20c_2 &= 0; & -d_3 + 80c_3 &= 0; \\ -d_1 + 250c_2 &= 0; & -d_2 + 500c_3 &= 0; & -d_4 + 120c_2 &= 0, \end{aligned}$$

которая, как нетрудно видеть, и соответствует условиям в) и г). Далее мы проверяли, что каждый участок используется на той работе, где его производительность максимальна, т. е. проверяли выполнение неравенств:

$$-d_i + a_{ij} \leq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3).$$

Тем самым мы установили, что все величины (3) в данном случае неположительные и, следовательно, рассматриваемый план  $\pi$  оптимальный.

**Построение оптимального плана путем последовательного исправления<sup>3)</sup>.** В предыдущем пункте было показано, что если рассматриваемый план

<sup>3)</sup>Метод последовательного исправления плана для транспортной задачи указан в [3, 4], для задачи об обработке комплексного сырья — в [5]. Этот метод имеет много общего с разработанным независимо от него симплекс-методом Данцига (см. [9]); однако в последнем не используются о. о. оценки (разрешающие множители), что заставляет на каждом шаге процесса иметь разложение всех векторов  $a^s$  и  $e^i$  по базисным. Излагаемый метод в ряде случаев связан с меньшим объемом вычислений. (Дальнейшее развитие симплекс-метода привело именно к схемам, использующим разрешающие множители или, в современных терминах, двойственные переменные. Читатель легко найдет в курсах линейного программирования обширную информацию о современных методах организации вычислений — *примечание 1984 г.*)

неоптимальный, то при его контроле не только устанавливается этот факт, но и обнаруживается возможный способ улучшения плана. Именно устанавливается, что такое улучшение возможно за счет включения в план некоторого неиспользуемого в нем способа (роль такого способа может играть также и вектор  $e^i$ ). Далее определяется та максимальная степень интенсивности, с которой этот способ может быть включен в план. Включение нового способа приводит, как правило, к вытеснению одного из ранее использовавшихся способов. В результате такого исправления мы приходим к плану с более высокой комплексной производительностью. Если и этот план оказывается неоптимальным, то при контроле также обнаруживается возможный способ его улучшения и т. д. Через конечное число таких шагов мы приходим к оптимальному плану и системе о. о. оценок. В этом и состоит один из эффективных методов решения задач оптимального планирования.

Поясним вначале этот метод на тех же числовых примерах, которые рассматривались выше.

В примере 1 (стр. 352) при контроле плана  $\pi'$  было установлено, что этот план неоптимальный, причем его можно улучшить, частично используя и участок (2) для изготовления 3-го продукта. Обозначим через  $\varepsilon$  ту часть рабочего времени участка (2), которая отводится в новом плане на изготовление 3-го продукта. При полном использовании этого участка на изготовление 3-го продукта получается выигрыш в  $133,3 - 20 = 113,3$  условных единиц, что соответствует  $113,3 : (1 \times 5 + 0,4 \times 12 + 0,2667 \times 10) = 9,088$  ассортиментных наборов. Мы же получим выигрыш в  $9,088\varepsilon$  ассортиментных наборов.

На участке (2) за время  $\varepsilon$  производится  $500\varepsilon$  единиц 3-го продукта, а нужно его только  $10 \times 9,088\varepsilon = 90,88\varepsilon$  единиц. Поэтому освобождается часть рабочего времени участка (4), равная  $(500\varepsilon - 90,88\varepsilon) : 180 = 2,273\varepsilon$ . Используя это время для изготовления 2-го продукта, получаем его в количестве  $120 \times 2,273\varepsilon = 272,8\varepsilon$  единиц вместо нужных  $12 \times 9,088\varepsilon = 109,1\varepsilon$ . Это позволяет разгрузить участок (3) на  $(272,8\varepsilon - 109,1\varepsilon) : 200 = 0,8185\varepsilon$ . Используя это время для изготовления 1-го продукта, получаем его в количестве  $80 \times 0,8185\varepsilon = 65,48\varepsilon$  единиц. Однако на участке (2) получается теперь этого продукта на  $20\varepsilon$  единиц меньше. Следовательно, выигрыш составляет  $65,48\varepsilon - 20\varepsilon = 45,48\varepsilon$ , что соответствует потребности в увеличении 1-го продукта  $5 \times 9,088\varepsilon = 45,44\varepsilon$  (некоторое расхождение вызвано округлениями).

Таким образом, новый план строится в виде:

$$\pi' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \varepsilon & 0 & 0 \\ 0,1925 + 0,8185\varepsilon & 0,8075 - 0,8185\varepsilon & 0 \\ 0 & 0,1622 + 2,273\varepsilon & 0,8378 - 2,273\varepsilon \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Мы заинтересованы в выборе максимального  $\varepsilon$ ; однако при этом все числа  $h_{ij}$  должны оставаться неотрицательными.

Поэтому принимаем  $\varepsilon = 0,8378 : 2,273 = 0,3686$ . Подставляя это значение в (4), получаем план

$$\pi'' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,6314 & 0 & 0,3686 \\ 0,4942 & 0,5058 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

в котором комплексная производительность на  $9,088\epsilon = 3,35$  ассортиментных наборов выше, чем при плане  $\pi'$ .

Проверка плана  $\pi''$  показывает, что и он оказывается неоптимальным. Улучшая этот план, мы приходим к плану  $\pi$  (стр. 351), который, как уже было показано, является оптимальным.

В примере 2 мы установили неоптимальность плана, представленного на рис. 12. При этом полученное при определении потенциалов противоречие показало, что этот план можно улучшить, направляя некоторое число вагонов из Москвы в Тулу. Соединяем эти пункты незамкнутым кольцом Москва — Малоярославец — Тихонова Пустынь — Сухиничи — Горбачево — Тула, состоящем из участков, которые использовались при определении верхней границы 683 для потенциала в Туле. Наименьшее число вагонов, идущих по этому кольцу в направлении Москва — Тула, это 10 (участок Горбачево — Тула). Поэтому уменьшаем грузопоток в этом направлении на 10 вагонов, а именно: число вагонов на стрелках, идущих в указанном направлении, уменьшаем на 10, а число вагонов на стрелках, идущих в противоположном направлении, увеличиваем на 10, а на том участке, где грузопотока вовсе не было (участок Малоярославец — Тихонова Пустынь), вводим поток в 10 вагонов в направлении от Тулы к Москве. Чтобы не нарушался общий баланс (т. е. чтобы план оставался допустимым), направляем 10 вагонов непосредственно из Москвы в Тулу. Таким образом, мы приходим к плану, представленному на рис. 11, оптимальному, как нам уже известно.

В рассмотренном примере для получения оптимального плана пришлось произвести лишь одно исправление имеющегося. Вообще говоря, таких исправлений приходится делать несколько.

Перейдем теперь к общему алгебраическому описанию метода. Ради простоты изложения мы будем предполагать, что для каждого допустимого плана  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  комплексной производительностью  $\mu(\pi) > 0$  в представлении точки  $y^0 + \mu(\pi)z$  в форме (2) число слагаемых<sup>4)</sup>

$$u + v \geq N - 1. \quad (5)$$

Процесс начинается с допустимого плана  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , для которого имеет место равенство

$$u + v = N - 1. \quad (6)$$

В этом случае, как будет показано ниже, векторы

$$z, a^{s_1}, \dots, a^{s_u}, e^{i_1}, \dots, e^{i_v} \quad (7)$$

<sup>4)</sup>При нарушении указанного условия в рассматриваемом процессе построения оптимального плана могут встретиться некоторые затруднения. С таким положением мы встретились во второй части примера 2, что тем не менее не помешало найти оптимальный план. Однако здесь мы не можем подробно останавливаться на исследовании этого случая. Отметим только, что, вообще говоря, условие (5) должно быть соблюдено, а нарушение его связано со случаями вырождения; поэтому сколь угодно малым изменением начальных данных всегда можно добиться выполнения этого условия.



представляют базис рассматриваемого пространства, т. е. любой вектор однозначно представим в виде их линейной комбинации. Отсюда следует, что система

$$\sum_{j=1}^n k_j c_{m+j} = 1; \quad \sum_{i=1}^N a_i^{s_k} c_i = 0 \quad (k = 1, \dots, u); \quad c_l = 0 \quad (l = 1, \dots, v) \quad (8)$$

имеет единственное решение  $c_1, c_2, \dots, c_N$ . Если это решение удовлетворяет условиям:

а)  $c_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, N),$

б)  $\sum_{i=1}^N c_i a_i^s \leq 0 \quad (s = 1, \dots, r),$

то план  $\pi$  — оптимальный, а числа  $c_1, c_2, \dots, c_N$  представляют систему о. о. оценок.

При нарушении одного из этих условий план  $\pi$  неоптимален, причем комплексную производительность можно повысить, включая в план вектор

$$x = \begin{cases} e^{i_0}, & \text{если } c_{i_0} < 0, \\ a^{s_0}, & \text{если } \sum_{i=1}^N c_i a_i^{s_0} > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Для осуществления указанного включения представляем  $x$  в виде линейной комбинации векторов (7):

$$x = fz + \sum_{k=1}^u g_{s_k} a^{s_k} + \sum_{l=1}^v g_{r+i_l} e^{i_l}, \quad (10)$$

где, как нетрудно убедиться, умножая обе части этого равенства скалярно на вектор  $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)$  и используя (8),

$$f = (c, x) = \begin{cases} -c_{i_0} > 0, & \text{если } x = e^{i_0}, \\ \sum_{i=1}^N c_i a_i^{s_0} > 0, & \text{если } x = a^{s_0}. \end{cases}$$

Используя (2) и (10), получаем тождество:

$$y^0 + (\lambda + \varepsilon f)z = \sum_{k=1}^u (h_{s_k} - \varepsilon g_{s_k}) a^{s_k} + \sum_{l=1}^v (h_{r+i_l} - \varepsilon g_{r+i_l}) e^{i_l} + \varepsilon x. \quad (11)$$

Величина  $(\lambda + \varepsilon f)$  характеризует комплексную производительность в соответствующем плане. Следовательно, мы заинтересованы придать  $\varepsilon$  максимальное значение. При этом, однако, все коэффициенты в (11) должны оставаться неотрицательными, поэтому принимаем

$$\varepsilon = \min_{g_s > 0} \frac{h_s}{g_s} \quad (s = s_1, \dots, s_u, r + i_1, \dots, r + i_v). \quad (12)$$

Таким образом, приходим к представлению в форме (2) точки  $y^0 + \lambda'z$ , где  $\lambda' = \lambda + \varepsilon f > \lambda$  и число слагаемых  $u' + v' = N - 1$ ; процесс можно продолжать. Если в (10) все коэффициенты  $g_s \leq 0$ , то тогда, как показывает (11), имеются

планы со сколь угодно высокой комплексной производительностью и, следовательно, оптимального плана не существует. Это же, впрочем, следует из теоремы 4 Приложения I, так как при сделанном допущении из соотношения (10) следует нарушение условия  $\beta$ ) этой теоремы. Для практических задач, как уже отмечалось, этот случай нерелевантен.

Описанный процесс не может продолжаться неограниченно, так как имеется лишь конечное число таких точек  $y^0 + \lambda z$ , для которых в представлении (2) число слагаемых удовлетворяет (6), а ввиду монотонности процесса ( $\lambda' > \lambda$ ) мы не можем повторно прийти к той же точке. Поэтому через конечное число шагов мы либо приходим к оптимальному плану  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  и системе о. о. оценок  $c_1, c_2, \dots, c_N$ , либо убеждаемся в том, что в данной задаче оптимального плана не существует (имеются планы со сколь угодно высокой комплексной производительностью).

Наиболее трудоемкой частью описанного процесса является решение систем (8) и разложение векторов  $x$  по базису (7). Поясним, как, используя матрицы, можно упростить эти операции, начиная со второго шага процесса<sup>5)</sup>. Матрицу коэффициентов при неизвестных в системе (8) обозначим через  $A$ . Допустим, что известна обратная ей матрица  $A^{-1}$ . Тогда элементы первого столбца этой матрицы, как нетрудно видеть, представляют решение системы (8), а коэффициенты в разложении (10) легко находятся:

$$(f, g_{s_1}, \dots, g_{s_u}, g_{r+i_1}, \dots, g_{r+i_v}) = x \cdot A^{-1}. \quad (13)$$

Вычисление обратной матрицы, конечно, ничем не проще, чем решение двух систем уравнений (определение коэффициентов в (10) также сводится к решению системы). Однако получающаяся на каждом следующем шаге система (8) отличается от предыдущей лишь одним уравнением, поэтому для обращения ее матрицы (начиная со второго шага) можно использовать следующее правило.

**ПРАВИЛО 2.** Пусть имеются квадратные матрицы порядка  $N$ :  $A_1 = \|x_{ij}\|$  и  $A_2 = \|x'_{ij}\|$ , которые разнятся лишь элементами строки  $v$ :

$$x_{ij} = x'_{ij} \quad (i = 1, \dots, v-1, v+1, \dots, N; j = 1, \dots, N),$$

и известна обратная матрица  $A_1^{-1} = \|y_{ij}\|$ . Тогда обратная матрица  $A_2^{-1} = \|y'_{ij}\|$  находится следующим образом:

1) вычисляется вектор

$$(a_1, a_2, \dots, a_N) = (x'_{v1}, x'_{v2}, \dots, x'_{vN}) \cdot A_1^{-1};$$

2) столбец  $v$  матрицы  $A_1^{-1}$  делится на  $a_v$  и затем этот преобразованный столбец, умноженный на числа  $a_j$  ( $j = 1, \dots, v-1, v+1, \dots, N$ ), вычитается из соответствующих столбцов матрицы  $A_1^{-1}$ . Другими словами, элементы обратной матрицы  $A_2^{-1}$  определяются так:

$$y'_{ij} = \begin{cases} y_{ij}/a_v & \text{при } j = v, \\ y_{ij} - (a_j/a_v) & \text{при } j \neq v. \end{cases}$$

<sup>5)</sup>По поводу матричных обозначений и численных операций над матрицами см., например, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры. ГТИ, 1950.

Теперь можно и весь изложенный процесс сформулировать в виде некоторого правила.

**ПРАВИЛО 3.** Разыскание оптимального плана и системы о. о. оценок можно вести в следующей последовательности.

1) Исходя из некоторого допустимого плана  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , имеем матрицу  $A$ , строки которой суть компоненты векторов  $z, a^{sk}$  ( $k = 1, \dots, u$ ),  $e^{il}$  ( $l = 1, \dots, v$ ).

2) Находим обратную матрицу  $A^{-1}$  (для этого можно использовать любой из обычно рекомендуемых в алгебре приемов<sup>6)</sup>).

3) Для элементов первого столбца матрицы  $A^{-1}$ , дающих значение  $c_1, c_2, \dots, c_N$ , проверяем условия а) и б). В случае выполнения этих условий указанные элементы представляют систему о. о. оценок, а план  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$  — оптimalен; процесс окончен. В противном случае выбираем вектор  $x$  в соответствии с (9) и переходим к следующему пункту.

4) Вычисляем согласно (13) и (12) коэффициенты  $f, g_s$  ( $s = s_1, \dots, s_u, r + i_1, \dots, r + i_v$ ) и величину  $\varepsilon$ . Найденные величины используем для определения коэффициентов в новом соотношении (2):

$$\lambda' = \lambda + \varepsilon f, \quad h'_s = h_s - \varepsilon g_s \quad (s = s_1, \dots, s_u, r + i_1, \dots, r + i_v);$$

коэффициентом при вновь включенном векторе  $x$  служит  $\varepsilon$ .

Если все коэффициенты  $g_s > 0$ , то оптимального плана не существует (процесс окончен).

5) В строку  $s_0$  матрицы  $A$ , которая отвечает обратившемуся в нуль коэффициенту  $h'_{s_0}$ , вписываем новые элементы — компоненты вектора  $x$  — и обращаем полученную матрицу по правилу 2. При этом величины  $a_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) совпадают с соответствующими коэффициентами  $f$  и  $g$ , вычисленными в предыдущем пункте.

6) Переходим к пункту 3).

Остается еще вопрос о составлении исходного допустимого плана.

Сначала предположим, что мы располагаем некоторым допустимым планом  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , но для него неравенство (5) выполняется строго. В этом случае векторы (7) линейно зависимы (их число превышает размерность пространства), т. е. имеет место соотношение:

$$fz + \sum_{k=1}^u g_{sk} a^{sk} + \sum_{l=1}^v g_r + i_l e^{il} = 0. \quad (14)$$

Не умаляя общности, можно считать, что  $f \geq 0$  и при  $f = 0$  по крайней мере один из коэффициентов  $g_s > 0$ . Используя (2) и (14), получаем тождество:

$$y^0 + (\lambda + \varepsilon f)z = \sum_{k=1}^u (h_{sk} - \varepsilon g_{sk}) a^{sk} + \sum_{l=1}^v (h_{r+i_l} - \varepsilon g_{r+i_l}) e^{il}.$$

Подставляя в него величину  $\varepsilon$ , вычисленную согласно (12), приходим к представлению в форме (2) точки  $y^0 + \lambda'z$ , где  $\lambda' = \lambda + \varepsilon f$  и число слагаемых  $u' + v' < u + v$ .

<sup>6)</sup> В случае, когда представление (2) в основном построено на ортах, обращение начальной матрицы  $A$  особенно просто.

(Если все коэффициенты  $g_s \leq 0$ , то, как и выше, это означает, что в данной задаче оптимального плана не существует.)

Через конечное число таких шагов (не более чем  $u+v-N+1$ ) получим представление в форме (2), для которого выполнено условие (6) и которое, следовательно, можно принять в качестве исходного в описанном процессе (если же на некотором шаге получается соотношение (14), где  $g_s \leq 0$ , то в данной задаче оптимального плана не существует).

Попутно легко проверить использовавшийся выше факт, что при выполнении условия (6) векторы (7) образуют базис рассматриваемого пространства. Действительно, если бы эти векторы оказались линейно зависимыми, то, как мы видели, можно было бы прийти к представлению в форме (2) с меньшим числом слагаемых, т. е. к такому, для которого  $u+v < N-1$ , что противоречит сделанному допущению.

На составлении исходного плана в том случае, когда никакого допустимого плана нам не известно, мы здесь подробно останавливаться не будем. Укажем только, что в практических задачах нахождение некоторого допустимого плана не представляет обычно никаких затруднений. Например, если по первым  $m$  ингредиентам имеются положительные ресурсы (числа  $b_i < 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ) и во всех технологических способах последние  $n$  ингредиентов не расходуются ( $a_{m+j}^s \geq 0$ ;  $s = 1, \dots, r$ ;  $j = 1, \dots, n$ ), то в качестве начального можно принять любой план, в котором используется один или несколько технологических способов и все последние  $n$  ингредиентов производятся в положительных количествах. Более того, используя имеющуюся свободу при составлении начального плана, желательно получить сразу допустимый план с возможно большей комплексной производительностью; это может значительно уменьшить число необходимых шагов в процессе. Некоторые приемы такого рода приводятся ниже. Рассмотрим теперь числовой пример.

**ПРИМЕР 3.** В производстве участвуют пять ингредиентов. Имеющиеся технологические способы характеризуются векторами:

$$\begin{aligned} a^1 &= (-1; -5; 2; 12; 0); & a^2 &= (-5; -4; 1; 0; 11); & a^3 &= (-5; -9; 3; 5; 8); \\ a^4 &= (-5; -5; 2; 5; 4); & a^5 &= (-5; -9; 4; 1; 8); & a^6 &= (-8; -2; 1; 8; 1); \\ a^7 &= (-8; -7; 3; 7; 7); & a^8 &= (-4; -6; 2; 15; 8); & a^9 &= (-3; -7; 4; 20; 0). \end{aligned}$$

По первым двум ингредиентам имеются ресурсы в 18 и 24 единицы; последние три ингредиента нужно получать в пропорции 1 : 2 : 3, т. е.

$$y^0 = (-18; -24; 0; 0; 0), \quad z = (0; 0; 1; 2; 3).$$

Возьмем в качестве начального плана тот, в котором используется лишь один технологический способ (4). Применение этого способа лимитируется первым ингредиентом, поэтому принимаем:

$$h_4 = (-18) : (-5) = 3,6; \quad \pi_1 = (0; 0; 0; 3,6; 0; 0; 0; 0; 0).$$

При этом плане

$$x_1^{\pi_1} = -18; \quad x_2^{\pi_1} = -18; \quad x_3^{\pi_1} = 7,2; \quad x_4^{\pi_1} = 18; \quad x_5^{\pi_1} = 14,4; \quad \mu(\pi_1) = 4,8$$

Таблица I

		П р и б л и ж е н и я					
		1	2	3	4	5	6
Коэффициенты разложения (2) (планы)	$\lambda$	4,800	6,480	6,781	9,977	9,990	10,000
	$h_1$	—	—	—	—	—	—
	$h_2$	—	0,720	0,753	1,937	1,951	2,000
	$h_3$	—	—	—	—	—	—
	$h_4$	3,600	2,880	2,679	0,051	—	—
	$h_5$	—	—	0,167	1,062	1,064	1,000
	$h_6$	—	—	—	—	—	—
	$h_7$	—	—	—	—	—	—
	$h_8$	—	—	—	—	—	—
	$h_9$	—	—	—	0,932	0,946	1,000
	$h_{9+1}$	—	—	—	—	0,089	—
	$h_{9+2}$	6,000	6,720	6,084	—	—	—
	$h_{9+3}$	2,400	—	—	—	—	—
	$h_{9+4}$	8,400	1,400	—	—	—	1,000
$h_{9+5}$	—	—	—	—	—	—	
Оценки ингредиентов	$c_1$	0,267	0,360	0,377	0,146	0	0,111
	$c_2$	0	0	0	0,525	0,416	0,333
	$c_3$	0	0,700	0,093	0,923	0,777	0,667
	$c_4$	0	0	0,209	-0,023	-0,010	0
	$c_5$	0,333	0,100	0,163	0,041	0,081	0,111

и ему отвечает следующее представление в форме (2):

$$y^0 + 4,82z = 3,6a^4 + 6e^2 + 2,4e^3 + 8,4e^4$$

(коэффициенты этого представления приведены в первом столбце табл. I).

Согласно пунктам 1) и 2) правила 3 составляем матрицу  $A_1$  и находим обратную в ней матрицу  $A_1^{-1}$  (в данном случае это делается непосредственно):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -5 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0,267 & -0,200 & 1 & -0,133 & -0,467 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,333 & 0 & 0 & 0,333 & 0,667 \end{pmatrix}.$$

Элементы первого столбца матрицы  $A_1^{-1}$ , как отмечалось, представляют решение системы (8).

Следуя пункту 3), вычисляем оценки технологических способов (оценки ингредиентов  $c_i$  совпадают с элементами первого столбца матрицы  $A_1^{-1}$ ):

$$\sum_{i=1}^5 c_i a_i^1 = -0,27; \quad \sum_{i=1}^5 c_i a_i^2 = 2,33; \quad \sum_{i=1}^5 c_i a_i^3 = 1,67; \quad \sum_{i=1}^5 c_i a_i^4 = 0; \quad \sum_{i=1}^5 c_i a_i^5 = 1,33;$$

$$\sum_{i=1}^5 c_i a_i^6 = -1,8; \quad \sum_{i=1}^5 c_i a_i^7 = 0,20; \quad \sum_{i=1}^5 c_i a_i^8 = 1,6; \quad \sum_{i=1}^5 c_i a_i^9 = -0,8$$

(например,  $\sum c_i a_i^2 = 0,267 \times (-5) + 0 \times (-4) + 0 \times 1 + 0 \times 0 + 0,333 \times 11 = 2,33$ ).

Отмечаем технологический способ (2), для которого оценка оказалась наибольшей. Согласно пункту 4) находим:

$$(f, g_1, g_{9+2}, g_{9+3}, g_{9+4}) = a^2 \cdot A_1^{-1} = (2,333; 1,000; -1,000; 3,333; 9,667);$$

$$\varepsilon = \min\{3,6 : 1; 2,4 : 3,333; 8,4 : 9,667\} = 0,720,$$

а также коэффициенты  $\lambda$  и  $h_s$ , которые проставлены во втором столбце табл. I (например,  $\lambda = 4,800 + 0,720 \times 2,333 = 6,480$ ). Таким образом, мы приходим к новому представлению в форме (2):

$$y^0 + 6,48z = 2,88a^4 + 6,72e^2 + 0,72a^2 + 1,44e^4,$$

которому отвечает матрица

$$A_2 = \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & -5 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right\|.$$

По правилу 2 находим матрицу  $A_2^{-1}$ . Для этого элементы 4-го столбца матрицы  $A_1^{-1}$  делим на  $a_4 = g_{9+3} = 3,333$ , полученный 4-й столбец матрицы  $A_2^{-1}$  выписываем также рядом с матрицей  $A_1^{-1}$ , затем преобразованный столбец, умноженный на числа

$$a_1 = f = 2,333; \quad a_2 = g_4 = 1,000; \quad a_3 = g_{9+2} = -1,000; \quad a_5 = g_{9+4} = 9,667$$

(эти множители выписаны в строку над новой матрицей  $A_2^{-1}$ ), вычитаем соответственно из 1, 2, 3 и 5-го столбцов матрицы  $A_1^{-1}$ , получая остальные столбцы матрицы  $A_2^{-1}$ . Запись имеет следующий вид:

$$A_1^{-1} = \left\| \begin{array}{ccccc} 0,267 & -0,200 & 1 & -\mathbf{0,133} & -0,467 \\ 0 & 0 & -1 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & -1 \\ 0,333 & 0 & 0 & \mathbf{0,333} & 0,667 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \text{4-й столбец: } 3,333 \\ -\mathbf{0,040} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{0,300} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0,100} \end{array}$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2,333 & 1,000 & -1,000 & & 9,667 \\ 0,360 & -0,160 & 0,960 & -0,040 & 0,080 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0,700 & 0,300 & 0,300 & -0,300 & 2,900 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,100 & -0,100 & 0,100 & 0,100 & -0,300 \end{pmatrix} \times$$

Элементы 1-го столбца полученной матрицы, как и выше, представляют решение системы (8) (они указаны во втором столбце табл. I).

Теперь переходим снова к пункту 3) правила 3 и аналогично предыдущему получаем 3, 4, 5 и 6-е приближения (см. табл. I). Для последнего из этих приближений оценки технологических способов дают:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 c_i a_i^1 &= -0,444; & \sum_{i=1}^5 c_i a_i^2 &= 0; & \sum_{i=1}^5 c_i a_i^3 &= -0,555; \\ \sum_{i=1}^5 c_i a_i^4 &= -0,777; & \sum_{i=1}^5 c_i a_i^5 &= 0; & \sum_{i=1}^5 c_i a_i^6 &= -0,777; \\ \sum_{i=1}^5 c_i a_i^7 &= -0,444; & \sum_{i=1}^5 c_i a_i^8 &= -0,222; & \sum_{i=1}^5 c_i a_i^9 &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому план  $\pi = (0; 2; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 1)$  является оптимальным, а числа  $c_1 = 0,111; c_2 = 0,333; c_3 = 0,667; c_4 = 0; c_5 = 0,111$  представляют систему о. о. оценок.

**Метод корректировки множителей (оценок)<sup>7)</sup>**. Этот метод состоит в следующем. Задавшись системой оценок, обладающей тем свойством, что при каждом технологическом способе суммарная оценка производимой продукции не превосходит общей оценки затрат, отмечаем способы, при которых указанные оценки совпадают (рентабельные способы). Используя только эти способы, строим план с наибольшей комплексной производительностью. Этот план определяет измененную систему оценок. Если при новых оценках для каждого технологического способа суммарная оценка получаемой продукции не выше оценки производимых затрат, то план оптимальный, а найденные оценки представляют систему о. о. оценок. В противном случае, исходя из двух имеющихся систем оценок, строим новую систему (вообще говоря, в этой системе оказываются относительно более низкими оценки тех ингредиентов, которые не лимитировали производство). Эта новая система оценок позволяет, используя только рентабельные способы, получить план с более высокой комплексной производительностью и т. д. Через конечное число шагов приходим к оптимальному плану и системе о. о. оценок. Таким образом, при этом методе в процессе составления плана происходит своеобразная «конкурентная борьба» между отдельными технологическими способами с «колебаниями цен», которая позволяет выявить те способы, применение которых в данных условиях наиболее целесообразно. Эта «борьба» осуществляется здесь лишь в процессе

<sup>7)</sup>Этот метод систематически применялся еще в работе [1] (см. также [5, 7]). В самое последнее время подобный метод стал использоваться и в зарубежной практике (см. работу Данцига, Форда и Фулкерсона в сборнике [10]).

расчета и потому, конечно, не связана с теми большими потерями, которые неминуемо сопутствуют реальной конкурентной борьбе в условиях капиталистического общества.

Перейдем к алгебраическому описанию метода. Для простоты, как и выше, будем предполагать, что для любого допустимого плана  $\pi$  число слагаемых в представлении (2) подчинено неравенству (5).

Процесс начинается с произвольной системы оценок  $d_1, d_2, \dots, d_n$ , удовлетворяющей условиям:

1°. Эти оценки неотрицательные, причем, по крайней мере, один из продуктов, входящих в ассортиментный набор, имеет положительную оценку, т. е.

$$d_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad \max_{1 \leq j \leq n} d_{m+j} > 0.$$

2°. При каждом технологическом способе суммарная оценка производимой продукции не превосходит общей оценки расходуемых факторов:

$$\sum_{i=1}^N d_i a_i^s \leq 0 \quad (s = 1, \dots, r).$$

3°. Существует допустимый план  $\pi$ , в котором используются только рентабельные способы, т. е. такие способы ( $s$ ), что

$$\sum_{i=1}^N d_i a_i^s = 0.$$

Вычисляем оценки продукции при каждом технологическом способе:

$$D_s = \sum_{i=1}^N d_i a_i^s \quad (s = 1, \dots, r) \quad (15)$$

и отмечаем множество  $S$  рентабельных способов ( $D_s = 0$ ).

Строим затем план  $\pi$  с наибольшей комплексной производительностью, в котором используются только способы  $s \in S$ . Для этого можно воспользоваться изложенным выше методом последовательного исправления, осуществление которого в данном случае значительно упрощается за счет того, что множество  $S$  содержит, как правило, значительно меньше элементов, чем исходное множество способов. Таким образом, приходим к допустимому плану  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , которому отвечает представление (2), где

$$s_k \in S \quad (k = 1, \dots, u)$$

(используются только рентабельные способы), и к новой системе оценок  $c_1, c_2, \dots, c_N$ , удовлетворяющей условиям:

$$\text{а) } c_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, N), \quad \sum_{j=1}^n c_{m+j} k_j = 1;$$

$$\text{б) } \sum_{i=1}^N c_i a_i^s \leq 0 \quad (s \in S);$$



$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & \sum_{i=1}^N a_i^{sk} c_i = 0 \quad (k = 1, \dots, u); \\ \text{г)} \quad & c_{i_l} = 0 \quad (l = 1, \dots, v). \end{aligned}$$

Если и для остальных способов ( $s \notin S$ ) общая оценка продукции и затрат также неположительна, т. е.

$$C_s = \sum_{i=1}^N c_i a_i^s \leq 0, \tag{16}$$

то план  $\pi$  оптимальный, а числа  $c_1, c_2, \dots, c_N$  представляют систему о. о. оценок для исходной задачи.

При нарушении условий (16) полученные числа не являются о. о. оценками, а план  $\pi$  соответственно неоптимален. В этом случае строим новую систему оценок  $d'_1, d'_2, \dots, d'_n$  так, чтобы в множество  $S'$  рентабельных способов включился по крайней мере один из тех способов, для которых нарушалось (16). Для этого принимаем:

$$d'_i = d_i + \varepsilon(c_i - d_i) \quad (i = 1, \dots, N), \tag{17}$$

где

$$\varepsilon = \min_{C_s > 0} \frac{D_s}{D_s - C_s}. \tag{18}$$

Исходя из оценок (17), повторяем описанные операции. При этом мы получаем план  $\pi'$  с более высокой комплексной производительностью:  $\mu(\pi') > \mu(\pi)$ . Поэтому описанный процесс не может продолжаться неограниченно, и, следовательно, через конечное число шагов приходим к оптимальному плану и системе о. о. оценок.

Заметим, что на каждом шаге описанного процесса, начиная со второго, при решении малой задачи (с ограниченным числом способов) методом последовательного исправления плана в качестве исходного удобно принимать план, полученный на предыдущем шаге (на каждом шаге, как правило, приходится делать лишь одно исправление). При этом оказывается возможным использовать описанный выше упрощенный прием построения обратной матрицы.

Рассмотренный метод можно сформулировать в виде следующего правила.

**ПРАВИЛО 4.** Исходим из произвольных оценок  $d_1, d_2, \dots, d_N$ , удовлетворяющих условиям 1°, 2° и 3°.

1) По формулам (15) вычисляем оценки продукции и затрат во всех технологических способах и отмечаем множество  $S$  рентабельных способов:

$$S = \{s \mid D_s = 0\}.$$

2) Методом последовательного исправления плана решаем вспомогательную задачу, в которой все множество способов исчерпывается способами  $s \in S$ . Получаем для этой малой задачи оптимальный план  $\pi = (h_1, h_2, \dots, h_r)$ , ( $h_s = 0$  при  $s \notin S$ ) и матрицы  $A$  и  $A^{-1}$ , отвечающие представлению (2). В первом столбце матрицы  $A^{-1}$  стоят оценки  $c_1, c_2, \dots, c_N$ , которые для малой задачи представляют систему о. о. оценок.

3) По формулам (16) вычисляем оценки  $c_s$  для остальных способов  $s \notin S$ . Если все эти оценки неположительные, то план  $\pi$  и оценки  $c_1, c_2, \dots, c_N$  представляют

решение исходной задачи; процесс заканчивается. В противном случае переходим к следующему пункту.

4) По формулам (17) и (18) вычисляем новые оценки  $d'_1, d'_2, \dots, d'_N$  и переходим к пункту 1).

ЗАМЕЧАНИЕ. В пункте 2), начиная со второго шага, в качестве исходного берется план, полученный на предыдущем шаге.

Мы не будем здесь подробно останавливаться на способах определения исходных оценок  $d_1, d_2, \dots, d_N$ , удовлетворяющих условиям 1°, 2° и 3°. Укажем только, что в практических задачах такие оценки, как правило, легко находятся. Например, в задачах А, Б и В (см. Приложение I) оценки продукции могут быть выбраны произвольно, а оценки производственных факторов определены так, чтобы соблюдались условия 2°.

Проиллюстрируем теперь рассмотренный метод на том же числовом примере 3, что и предыдущий.

Примем за исходные такие оценки:

$$d_1 = 5; \quad d_2 = 5; \quad d_3 = 2; \quad d_4 = 2; \quad d_5 = 2.$$

(Эти оценки получены следующим образом: полагаем  $d_1 = d_2 = x, d_3 = d_4 = d_5 = y$  и находим максимальное отношение  $x/y$ , при котором оценки продукции и затрат во всех технологических способах  $D_s \leq 0$ .)

Согласно пункту 1) правила 4 по формулам (15) находим:

$$D_1 = -2; \quad D_2 = -21; \quad D_3 = -36; \quad D_4 = -28; \quad D_5 = -44;$$

$$D_6 = -30; \quad D_7 = -41; \quad D_8 = 0; \quad D_9 = -2; \quad S = \{8\}.$$

Мы можем использовать только технологический способ (8), и наибольшую производительность получим в том случае, когда этот способ применяется максимально. Однако нас лимитируют имеющиеся ресурсы, поэтому принимаем  $\pi_1 = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 4; 0)$ . Коэффициенты  $\lambda$  и  $h_s$  в представлении (2), а также оценки ингредиентов  $c_i$ , соответствующие этому плану, приведены в первом столбце табл. II.

Далее по формулам (16) находим:  $C_1 = 0,333; C_2 = -0,333; C_3 = 0; C_4 = 0,333; C_5 = 1,000; C_6 = 0,333; C_7 = 0,667; C_8 = 0; C_9 = 1,667$ . Так как среди этих чисел имеются положительные, то переходим к пункту 4), т. е. по формулам (17) и (18) находим:  $\varepsilon = \min \left\{ \frac{-2}{-2-0,333}; \frac{-28}{-28-0,333}; \frac{-44}{-44-1}; \frac{-30}{-30-0,333}; \frac{-41}{-41-0,667}; \frac{-2}{-2-1,667} \right\} = 0,5454$ ,

$$d_1 = 2,273; \quad d_2 = 2,455; \quad d_3 = 1,455; \quad d_4 = 0,909; \quad d_5 = 0,909$$

(например,  $d_1 = 5 + 0,5454 \times (0 - 5) = 2,273$ ). Затем переходим снова к пункту 1).

Аналогично предыдущему, получаем следующие приближения (см. табл. II). Для последнего из них имеем:  $C_1 = -0,444; C_2 = 0; C_3 = -0,555; C_4 = -0,777; C_5 = 0; C_6 = -0,777; C_7 = -0,444; C_8 = -0,222; C_9 = 0$ . Поэтому план  $\pi = (0; 2; 0; 0; 1; 0; 0; 0; 1)$  оптимальный, а числа  $c_1 = 0,111; c_2 = 0,333; c_3 = 0,667; c_4 = 0; c_5 = 0,111$  представляют систему о. о. оценок.

Таблица II

		П р и б л и ж е н и я			
		1	2	3	4
Оценки ингредиентов	$d_1$	5,0000	2,2727	0,0987	0,2349
	$d_2$	5,0000	2,4546	0,4626	0,2648
	$d_3$	2,0000	2,4546	0,6861	0,5875
	$d_4$	2,0000	0,9091	0,0395	0,0104
	$d_5$	2,0000	0,9091	0,1507	0,1496
	$c_1$	0	0	0,2836	0,1111
	$c_2$	0,3333	0,3721	0,1940	0,3333
	$c_3$	1,0000	0,6512	0,5522	0,6667
	$c_4$	0	0	0	0
	$c_5$	0	0,1163	0,1492	0,1111
Коэффициенты разложения (2) (планы)	$\lambda$	8,000	8,930	9,761	10,000
	$h_1$	—	—	—	—
	$h_2$	—	—	1,881	2,000
	$h_3$	—	—	—	—
	$h_4$	—	—	—	—
	$h_5$	—	—	—	1,000
	$h_6$	—	—	—	—
	$h_7$	—	—	—	—
	$h_8$	4,000	3,349	1,075	—
	$h_9$	—	0,558	1,433	1,000
	$h_{9+1}$	2,000	2,930	—	—
	$h_{9+2}$	—	—	—	—
	$h_{9+3}$	—	—	—	—
	$h_{9+4}$	44,000	43,535	25,253	1,000
	$h_{9+5}$	8,000	—	—	—

Метод двухсторонних границ для о. о. оценок<sup>8)</sup>. Несмотря на то что о. о. оценки первоначально, как правило, неизвестны, некоторые неравенства для возможных их значений могут быть получены из рассмотрения отдельных технологических способов, а также простейших планов. Довольно точные границы, в которых лежат о. о. оценки, можно получить путем последовательного уточнения первоначально взятых грубых границ. Например, имея некоторый план, мы знаем, что суммарная оценка производимой продукции не должна превосходить общей оценки расходуемых ингредиентов, что дает некоторое неравенство, связывающее о. о. оценки. Взяв, в частности, для всех производимых ингредиентов, кроме одного, нижние границы о. о. оценок, а для расходуемых ингредиентов — верхние границы, мы получаем уточнение верхней границы о. о. оценки для выделенного

<sup>8)</sup>Для задачи об обработке комплексного сырья этот метод изложен в [5] (гл. I, § 8).

ингредиента. Аналогично строятся неравенства противоположного смысла. Часто оказывается полезным находить границы, в которых лежат о. о. оценки для целых комплектов.

Точность указанного способа тем выше, чем лучше найдены приближения к оптимальному плану, используемые в процессе уточнения границ для о. о. оценок. Вообще говоря (в случае единственности системы о. о. оценок), этот путь позволяет получить сколь угодно точные границы для о. о. оценок. Для этого можно использовать планы, в которых соответствующий продукт или фактор производится в недостаточном или избыточном объеме по сравнению с требуемым заданием.

Метод двухсторонних границ может использоваться для полного решения задач оптимального планирования. В частности, этот метод оказывается удобным при решении задачи о распределении программы, задачи обработки комплексного сырья и транспортной задачи.

Помимо того, указанный метод можно применять в комбинации с другими. Например, не доводя уточнение верхних и нижних границ до полного совпадения, а лишь достаточно сблизив их, мы переходим к методу корректировки множителей, принимая за исходную систему множителей усредненные значения найденных границ для о. о. оценок. При этом оказываются уже в значительной степени учтенными как имеющиеся технологические способы, так и требуемое ассортиментное задание, поэтому число необходимых шагов для получения оптимального плана значительно сокращается.

Наконец, метод двухсторонних оценок позволяет получить границы для о. о. оценок даже и в том случае, когда некоторые исходные данные не полностью известны, а указаны лишь пределы, в которых они лежат.

**Приближенное решение задач оптимального планирования.** Использование хотя бы приближенных значений о. о. оценок позволяет обычно сразу составить весьма удовлетворительный план. Во многих случаях этот план оказывается настолько близким к оптимальному, что его улучшение уже не представляет практического интереса. Во всяком случае, принимая его в качестве исходного в методе последовательного исправления, мы значительно сокращаем число необходимых шагов.

Способ построения такого приближенного плана мы поясним на конкретном примере решения задачи типа А.

**ПРИМЕР 4<sup>9)</sup>.** Имеется 8 луцильных станков, на которых обрабатывается материал пяти разных видов, поступающих в известном соотношении (см. табл. III). В табл. IV указаны производительности станков при обработке этих материалов.

В качестве приближенных значений о. о. оценок трудоемкости обработки различных материалов можно принять числа, обратно пропорциональные суммарной производительности станков:

$$c_1 = 30,30; \quad c_2 = 17,45; \quad c_3 = 13,76; \quad c_4 = 9,09; \quad c_5 = 7,4,$$

например,

$$c_1 = 1000 : (4,0 + 4,5 + 5,0 + 4,0 + 3,5 + 3,0 + 4,0 + 5,0) = 1000 : 33 = 30,30.$$

<sup>9)</sup>Решение этого примера с помощью метода корректировки множителей приведено в [1].

Таблица III

## Ассортиментное задание

Номенклатура материала	I	II	III	IV	V
Доля в общем объеме в %	10	12	28	36	14

Таблица IV

## Производительности станков

№ станка	Номенклатура материала				
	I	II	III	IV	V
1	4,0	7,9	8,5	13,0	16,5
2	4,5	7,8	9,7	13,7	17,5
3	5,0	8,0	10,0	14,8	18,0
4	4,0	7,0	9,0	13,5	17,0
5	3,5	6,5	8,5	12,7	16,0
6	3,0	6,0	8,0	13,5	15,0
7	4,0	7,0	9,0	14,0	17,0
8	5,0	8,0	10,0	14,7	18,0

Соответствующие оценки производительности станков даны в табл. V (столбцы этой таблицы получаются из столбцов табл. 4 умножением на оценку соответствующего материала; в каждой строке таблицы выделены максимальные оценки и ближайшие к ним).

Если нам удастся использовать каждый станок на той работе, где оценка его производительности максимальна, то мы получим продукцию в размере  $122 + 136 + 152 + 126 + 119 + 123 + 127 + 152 = 1057$  условных единиц, а оценка ассортиментного набора  $30,3 \times 0,1 + 17,45 \times 0,12 + 13,76 \times 0,28 + 9,09 \times 0,36 + 7,41 \times 0,14 = 13,29$  условных единиц. Поэтому количество ассортиментных наборов не может превосходить  $1057 : 13,29 = 79,5$ .

Используя по возможности станки на тех работах, на которых они имеют наибольшую производительность, попытаемся разместить производство указанного числа комплектов, т. е. будем распределять задание, приведенное в табл. VI. Например, для I номенклатуры (ее доля 10%) имеем:  $79,5 \times 0,1 = 7,95$ .

Материал номенклатуры I, согласно табл. V, целесообразно обрабатывать на станках № 2, 3 и 8. Однако их суммарная производительность превышает задание ( $4,5 + 5 + 5 > 7,95$ ). Поэтому некоторые из этих станков придется использовать также и на других работах. Целесообразнее на номенклатуре I использовать станки № 3 и 8, так как станок № 2 может быть эффективно использован также на обработке материала II. Станок № 3 загрузим полностью; это дает 5,0 единиц материала I. Чтобы получить материал I в количестве 7,95 единиц, нужно использовать еще 59% рабочего времени станка № 8. Остальное время этого станка — 41% — отводится на

Таблица V

**Производительности станков**  
(в условных единицах)

№ станка	Номенклатура материала				
	I	II	III	IV	V
1	<b>121</b>	<b>122</b>	117	118	<b>122</b>
2	<b>136</b>	<b>136</b>	133	125	130
3	<b>152</b>	<b>140</b>	138	135	133
4	121	122	<b>124</b>	123	<b>126</b>
5	106	113	<b>117</b>	115	<b>119</b>
6	91	105	110	<b>123</b>	111
7	121	122	124	<b>127</b>	<b>126</b>
8	<b>152</b>	<b>140</b>	138	135	133

Таблица VI

Номенклатура материала	I	II	III	IV	V
Задание	7,95	9,54	27,26	28,62	11,13

работу с материалом II, поскольку на ней оценка производительности станка наиболее близка к максимальной. Таким образом, обрабатываем  $8 \times 0,41 = 3,28$  единиц материала II. Оставшиеся  $9,54 - 3,28 = 6,26$  единиц этого материала обрабатываются на станке № 2, для чего требуется 80% его рабочего времени. Остальное время станка № 2 отводится для работы с материалом III. Продолжая процесс распределения задания, приходим к плану 1 (табл. VII).

Оказывается, что в плане 1 обрабатывается на 1,8 единиц материала IV меньше, чем намечалось, что оценивается в  $9,09 \times 1,8 = 16,36$  условных единиц или  $16,36 : 13,29 = 1,23$  ассортиментных наборов. Теперь, исходя из чуть меньшего задания, а именно:  $79,5 - 1,23 = 78,27$  ассортиментных наборов, аналогично предыдущему составляем план 2 (см. табл. VIII), в котором оно выполнено полностью.

Принимая во внимание, что объем продукции не может превышать 79,5 ассортиментных наборов, видим, что описанный метод построения первого приближения в данном случае дал погрешность, которая во всяком случае не превосходит  $(1,23 : 78,4) \times 100 = 1,6\%$ . Сравнение с оптимальным планом показывает, что на самом деле погрешность составляет всего лишь 0,7%.

**Использование физических моделей.** Как мы видели, признаки оптимальности плана, характеризующие его, позволили дать весьма эффективные вычислительные приемы для решения задач оптимального планирования. На этих же характеристиках может базироваться конструкция моделирующих устройств, позволяющих решать задачи автоматически. Характерным примером такого рода может служить модель для решения транспортной задачи (задачи E).

Таблица VII

План 1

№ станка	Доли рабочего времени станков, отводимые на работы с материалами				
	I	II	III	IV	V
1	—	—	0,27	0,05	0,68
2	—	0,80	0,20	—	—
3	1	—	—	—	—
4	—	—	1	—	—
5	—	—	—	1	—
6	—	—	—	1	—
7	—	—	1	—	—
8	0,59	0,41	—	—	—

Таблица VIII

План 2

№ станка	Доли рабочего времени станков, отводимые на работы с материалами				
	I	II	III	IV	V
1	—	—	0,19	0,15	0,66
2	—	0,76	0,24	—	—
3	1	—	—	—	—
4	—	—	1	—	—
5	—	—	—	1	—
6	—	—	—	1	—
7	—	—	1	—	—
8	0,57	0,43	—	—	—

Ради наглядности мы приводим здесь описание гидравлической модели, хотя электрическая, основанная на тех же принципах, представляется более удобной (эти модели упоминаются в [4]).

Пусть имеется  $m$  сосудов. В каждый сосуд ( $i$ ) ежесекундно поступает  $-b_i$  единиц жидкости (из сосудов, для которых  $b_i > 0$ , жидкость вытекает со скоростью  $b_i$  единиц в секунду). Сосуды  $i_s$  и  $j_s$  ( $s = l, \dots, r$ ) соединены между собой таким образом, что они превращаются в сообщающиеся, когда разность уровней жидкости в них:

$$H_{i_s} - H_{j_s} \geq a_s.$$

Нетрудно проверить, что в этом случае количество жидкости, перетекающее ежесекундно в установившемся процессе из сосуда ( $i_s$ ) в сосуд ( $j_s$ ), совпадает с объемом перевозок по участку сети ( $s$ ) в оптимальном плане. При этом за потен-

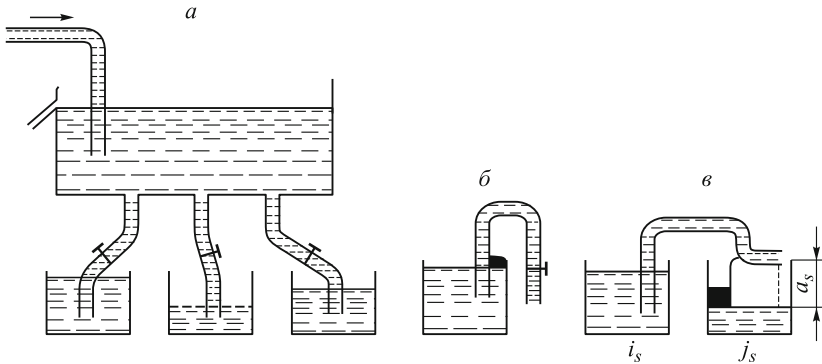


Рис. 13

циалы можно принять числа

$$c_i = H - H_i \quad (i = 1, \dots, m),$$

где  $H_i$  (уровень жидкости в сосуде  $(i)$ , а  $H$  — произвольное вещественное число).

Практическое осуществление описанной схемы достигается путем следующих соединений сосудов. Сосуды, отвечающие пунктам производства ( $b_i < 0$ ), питаются из общего резервуара (в котором поддерживается постоянный уровень жидкости) посредством трубок, снабженных градуированными кранами (рис. 13, а). Из сосудов, отвечающих пунктам потребления ( $b_i > 0$ ), жидкость отводится также через трубки, снабженные градуированными кранами; для поддержания постоянного напора отводящий конец этих трубок закрепляется на поплавке (рис. 13, б). Соединение между сосудами ( $i_s$ ) и ( $j_s$ ), показанное на рис. 13, в, обеспечивает разность уровней, не превосходящую  $a_s$ , благодаря креплению отводного конца сифонной трубки на определенной высоте на поплавке.

**Пример одновременного анализа размещения производства и грузопотоков.** Допустим, что в рассмотренной выше транспортной задаче Е в пунктах производства (такowymi считаем первые  $m_1 < m$  пунктов) допускается варьировать в некоторых пределах объемы производства  $-b_i$ .

$$0 \leq -b_i \leq Li \quad (i = 1, \dots, m),$$

причем суммарная производственная мощность превосходит потребности в данном продукте<sup>10)</sup>, т. е.

$$\sum_{i=m_1+1}^m b_i < \sum_{i=1}^{m_1} Li.$$

Задана себестоимость единицы продукта  $d_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) в каждом пункте производства (считаем, что себестоимость  $d_i$  и затраты  $a_s$  по перемещению продукта выражены в одних и тех же единицах, скажем, в рублях). Требуется запланировать объемы производства  $-b_i$  ( $i = 1, \dots, m_1$ ) и составить план перевозок так, чтобы

<sup>10)</sup> Такое положение может встретиться, например, при добыче некоторого вида сырья для промышленности стройматериалов.



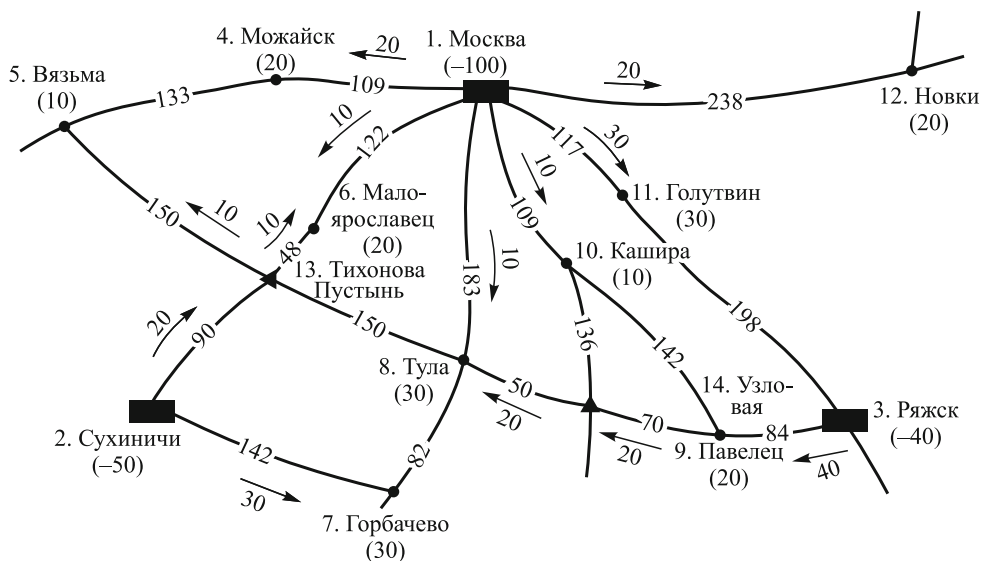


Рис. 14

суммарная себестоимость продукта с включением транспортных расходов была бы минимальной. Оптимальный план в данном случае характеризуется наличием такой системы потенциалов  $c_1, c_2, \dots, c_m$ , что выполнены условия а) и б) теоремы 5 и помимо того условие:

в) потенциалы в пунктах производства удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned}
 c_i &= d_i, & \text{если } 0 < -b_i < L_i, \\
 c_i &\leq d_i, & \text{если } b_i = 0, \\
 c_i &\geq d_i, & \text{если } -b_i = L_i.
 \end{aligned}$$

Проиллюстрируем эту задачу на конкретном числовом примере.

ПРИМЕР 5. Пусть в условиях примера 2 в пунктах производства допускается варьировать объемы производства. При этом себестоимость единицы продукта и максимальные производительности в различных пунктах производства характеризуются следующими данными:

$$d_1 = 500, \quad d_2 = 450, \quad d_3 = 550, \quad L_1 = 120, \quad L_2 = 75, \quad L_3 = 80.$$

Как и выше, план, представленный на рис. 11, здесь является допустимым. Однако в изменившихся условиях он уже не будет оптимальным. Действительно, для соответствующих этому плану потенциалов нарушается условие в):

$$c_2 = 484 > 450 = d_2.$$

Это означает, что общие затраты можно снизить за счет изменения объемов производства  $-b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

На рис. 14 представлен другой допустимый план распределения объемов производства и грузопотоков, при котором общие затраты по изготовлению и транспортировке продукта на 895 единиц ниже, чем в предыдущем плане.

Этому плану отвечают потенциалы:  $c_1 = 500$ ,  $c_2 = 459$ ,  $c_3 = 550$ ,  $c_4 = 609$ ,  $c_5 = 699$ ,  $c_6 = 597$ ,  $c_7 = 601$ ,  $c_8 = 683$ ,  $c_9 = 634$ ,  $c_{10} = 609$ ,  $c_{11} = 617$ ,  $c_{12} = 738$ ,  $c_{13} = 549$ ,  $c_{14} = 633$ , которые, как нетрудно проверить, удовлетворяют условиям а) и б) теоремы 5, а также условию в). Поэтому рассматриваемый план является оптимальным. Заметим, что этот план может быть получен из плана, представленного на рис. 11, путем последовательного исправления последнего. Для получения оптимального плана в данном случае потребовалось сделать три исправления, которые в принципе мало отличаются от проведенного в примере 2.

**ИСПРАВЛЕНИЕ 1.** Снимается 10 вагонов на участке Москва — Малоярославец и добавляется 10 вагонов на участках Сухиничи — Тихонова Пустынь — Малоярославец. В Москве объем производства уменьшается на 10, а в Сухиничах — увеличивается на 10.

**ИСПРАВЛЕНИЕ 2.** Снимается 15 вагонов на участках Рязск — Павелец — Узловая — Тула и добавляется 15 вагонов на участках Сухиничи — Горбачево — Тула. В Рязске объем производства уменьшается на 15, а в Сухиничах — увеличивается на 15.

**ИСПРАВЛЕНИЕ 3.** Снимается 5 вагонов на участках Рязск — Павелец — Узловая — Тула и добавляется 5 вагонов на участке Москва — Тула. В Рязске объем производства уменьшается на 5, а в Москве — увеличивается на 5.

**Пример расчета динамической задачи.** Рассмотрим весьма упрощенную задачу составления перспективного плана.

**ПРИМЕР 6.** Для изготовления некоторого продукта необходимо использование оборудования (машин) и рабочей силы; при этом имеется несколько технологических способов, с разной интенсивностью использующих технику и требующих соответственно различное количество рабочей силы. (Будем считать, что используется только один вид машин с большим сроком службы.) Производимый продукт частью расходуется на потребление, частью используется для приобретения (или изготовления) новых машин. Заданы ресурсы труда во все годы, имеющийся парк машин и количество продукта, выделяемого каждый год на потребление. Требуется составить производственный план таким образом, чтобы к концу рассматриваемого периода иметь производственные мощности в наибольшем объеме. При этом:

- 1) Рассматривается четырехлетний период.
- 2) В первый год имеется 30 машин.
- 3) Ресурсы труда и размеры потребления даны в табл. IX.
- 4) Различные технологические способы приведены в табл. X.
- 5) Машины могут быть приобретены в любом требуемом количестве по цене 20 единиц продукции за одну машину. Приобретение и использование машины в течение нескольких лет также может быть описано как некоторый способ. Эти способы приведены в табл. XI.

Для составления оптимального перспективного плана нужно найти те способы, которые обеспечивают наименьшие затраты на единицу продукции при заданном соотношении ресурсов техники и рабочей силы. Для этого достаточно свести рассматриваемую динамическую задачу к основной задаче производственного плани-

Для составления оптимального перспективного плана нужно найти те способы, которые обеспечивают наименьшие затраты на единицу продукции при заданном соотношении ресурсов техники и рабочей силы. Для этого достаточно свести рассматриваемую динамическую задачу к основной задаче производственного плани-

**Таблица IX**  
**Ресурсы труда и размеры потребления**

Год	Ресурсы труда (в чел.-ч)	Размеры потребления (в единицах продукта)
I	100 000	1500
II	100 000	1600
III	100 000	1700
IV	100 000	1800

**Таблица X**  
**Текущие производственные способы (одногодичные)**

Способы	З а т р а т ы и п р о д у к ц и я		
	труд (в чел.-ч)	производственные мощности (в единицах)	продукт (в единицах)
1	– 50 000	0	1000
2	– 40 000	– 20	1000
3	– 30 000	– 50	1000
4	– 25 000	– 70	1000

рования (см. анализ динамической задачи в Приложении I, стр. 336) и к последней применить любой из описанных выше методов решения.

В табл. XII приведен оптимальный план, соответствующий данным конкретным условиям. При этом плане к концу четвертого года машинный парк будет состоять из 271 машины.

Мы не будем останавливаться на расчете приведенного плана, а ограничимся лишь проверкой его оптимальности. Для этого построим о. о. оценки единицы труда, единицы продукта и прокатную оценку машины, соответствующие каждому из рассматриваемых четырех лет. Обозначим их соответственно  $T_1, T_2, T_3, T_4, P_1, P_2, P_3, P_4, M_1, M_2, M_3, M_4$  (эти оценки предполагаются приведенными к одному моменту; ср. стр. 338). Пусть оценка единицы труда на четвертый год есть  $T_4 = A$ . Исходя из того, что оценка продукции равна сумме оценок затрат и эта оценка одинакова для всех используемых способов, имеем:

$$25\,000T_4 + 70M_4 = 1000P_4; \quad 30\,000T_4 + 50M_4 = 1000P_4$$

или

$$T_4 = A, \quad M_4 = 250,0A, \quad P_4 = 42,5A.$$

**Таблица XI**  
**Производственные способы, рассчитанные на ряд лет**  
**(приобретение машин)**

Способы	Затраты и продукция							машин к концу периода
	продукт по годам				производственные мощности по годам (в единицах)			
	I	II	III	IV	II	III	IV	
5. Приобретение машины в I год	-20	—	—	—	1	1	1	1
6. То же во II год	—	-20	—	—	—	1	1	1
7. То же в III год	—	—	-20	—	—	—	1	1
8. То же в IV год	—	—	—	-20	—	—	—	1

**Таблица XII**  
**Оптимальный перспективный план**

Год	Производство продукта способом				Затраты		Валовая продукция	Приобретение машин
	1	2	3	4	труда	производ- ственных мощностей		
I	800	1500	—	—	100 000	30	2300	40
II	—	2071	571	—	100 000	70	2642	52
III	—	957	2057	—	100 000	122	3014	66
IV	—	—	2718	744	100 000	188	3462	83

Переходя от четвертого года к третьему, мы должны учесть, что машина, купленная на год раньше, должна иметь более высокую оценку (а вообще в пределах каждого года оценка машины равна  $20P$ ). Именно для получения оценки машины в данный год нужно к ее оценке в следующем году прибавить прокатную оценку того же года. Поэтому для третьего года оценка машины равна:

$$20P_4 + M_4 = 20 \times 42,5A + 250,0A = 1100A,$$

тогда оценка продукции на третий год  $P_3 = 1100A : 20 = 55A$ . Повторяя проведенные рассуждения, получаем все остальные оценки на третий год, а затем последовательно на второй и первый. Выбрав множитель пропорциональности  $A$  так, чтобы в первый год оценка единицы продукта равнялась 1, получаем окончательно таблицу оценок (табл. XIII).

Нетрудно проверить (см. табл. XIV), что при всех одногодичных технологических способах оценка продукции не превосходит оценки затрат, причем для

**Таблица XIII**  
**Объективно обусловленные оценки (приведенные к первому году)**

Год	Оценка продукта $P$	Оценка труда $T$	Прокатная оценка $M$	$T : P$	Норма эффективности в %
I	1,0000	0,02000	10,000	0,02000	36
II	0,7368	0,01579	5,263	0,02143	36
III	0,5429	0,01163	3,878	0,02144	29
IV	0,4100	0,00988	2,470	0,02353	—

**Таблица XIV**  
**Продукция и затраты при одногодичных технологических способах (в условных единицах)**

Год	Затраты при способе				Оценка продукта
	1	2	3	4	
I	1000	1000	1100	1200	<b>1000</b>
II	790	737	737	763	<b>737</b>
III	582	543	543	562	<b>543</b>
IV	494	445	420	420	<b>420</b>

используемых в плане способов эти оценки совпадают. Такую же проверку можно провести для способов, указанных в табл. XI. Отсюда ясно, что найденные оценки являются о. о. оценками, а рассматриваемый план  $\pi$  оптимальным.

В последнем столбце табл. XIII для каждого года (кроме последнего) указана норма эффективности, которая получается, если за единицу измерения принят продукт (например, для первого года  $1,0000 : 0,7368 - 1 = 0,36$ , т. е. 36%). Заметим, что при другой единице измерения норма эффективности имеет иное значение. Например, если за единицу измерения принять труд, то для первого года норма эффективности составит  $0,02000 : 0,01579 - 1 = 0,27$ , т. е. 27%.

Отметим систематическое понижение всех оценок и возрастание отношения оценки труда к оценке продукции; эти тенденции имеют общий характер.

Отличительной особенностью динамических задач является существование технологических способов, длящихся несколько периодов. Знание динамики оценок (табл. XIII) позволяет определять эффективность таких способов, если даже они и не были учтены при составлении первоначального плана.

Пусть в рассмотренном примере существует еще один, 9-й способ, который для производства 1000 единиц продукции в течение второго года требует затрат: в первый год 15 000 чел.-ч и 25 машин, во второй 5000 чел.-ч и 31 машину. Во всех случаях имеются в виду годы от начала работы по этому способу.

Применим имеющиеся оценки к исследованию целесообразности этого способа. В первый и второй годы способ нецелесообразен, так как:

$$15\,000T_1 + 5000T_2 + 25M_1 + 31M_2 = 792,1 > 1000P_2 = 736,8;$$

**Таблица XV**  
**Оптимальный план с использованием двухгодичного**  
**технологического способа**

Год	Производство продукта способом				Затраты		Валовая продукция	Приобретение машин
	1	2	3	9	труда	производственных мощностей		
I	800	1500	—	—	100 000	30	2300	40
II	—	2071	571	—	100 000	70	2642	52
III	—	951	1836	—	100 000	122	2793	55
IV	—	—	3264	442	100 000	177	3706	95

**Таблица XVI**  
**Новые о. о. оценки**

Год	Оценка продукта $P$	Оценка труда $T$	Прокатная оценка $M$
I	1,0000	0,02000	10,000
II	0,7368	0,01578	5,263
III	0,5429	0,01165	3,883
IV	0,4024	0,00872	2,816

во второй и третий годы он также неоправдан:

$$15\,000T_2 + 5000T_3 + 25M_2 + 31M_3 = 546,8 > 1000P_3 = 542,9;$$

в третий и четвертый годы этот способ выгоден:

$$15\,000T_3 + 5000T_4 + 25M_3 + 31M_4 = 397,4 < 1000P_4 = 420,0.$$

Применение указанного 9-го способа в третий и четвертый годы позволяет получить новый план (см. табл. XV), при котором техническая оснащенность к концу периода достигает 272 машин. С помощью новых о. о. оценок, приведенных в табл. XVI, легко убедиться в оптимальности этого плана (при этом для двухгодичного способа суммарная оценка затрат должна сравниваться с оценкой продукции в год реализации).

**Использование электронных цифровых машин.** Как мы видели, решение небольших задач, включающих лишь несколько видов продукции или производственных факторов, при помощи рассмотренных расчетных приемов вполне осуществимо вручную или с использованием лишь примитивных устройств: логарифмической линейки, арифмометра, настольной счетной машины. Однако при нескольких десятках, а тем более сотнях и тысячах ингредиентов такой расчет требует применения современных вычислительных средств — электронных цифровых

машин с программным управлением. При этом могут с небольшими модификациями применяться те расчетные приемы, которые описаны в этом Приложении, а составление программ не вызывает затруднений. Экспериментальные расчеты, проведенные нашими сотрудниками на машине «Стрела», показали, что с применением электронных счетных машин решение задач с десятками видов продукции требует лишь несколько минут.

При этом необходимо подчеркнуть важность использования электронных счетных машин с одновременным совершенствованием методики планово-экономических расчетов, достигаемым применением математических методов.

Использование электронных счетных машин на основе обычно применяемой методики планово-экономических расчетов привело бы лишь к некоторому ускорению расчетов, но не дало бы никакого улучшения по существу и не позволило бы устранить те существенные недостатки, которые имеются. При этом сама машина, естественно, не может анализировать вопрос, в то время как применение методики позволяет дополнительно (в т. ч. и качественно) рассмотреть ряд его неучтенных аспектов, внося в необходимых случаях коррективы. Разумеется, бессмысленны и попытки нахождения оптимального плана систематическим просмотром всех возможных или ряда случайно взятых вариантов на ЭВМ.

Напротив, научно обоснованная методика оптимального планирования, которая исходит из экономически отчетливо поставленной задачи и дает точное и полное ее математическое описание, может быть непосредственно реализована на электронных машинах и даст значительный эффект, несмотря на значительный объем и сложность необходимых расчетов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
2. Толстой А. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании // Социалистический транспорт. 1939. № 9. С. 28–51.
3. Канторович Л. В. О перемещении масс // Докл. АН СССР. 1942. Т. 37, № 7–8. С. 227–229.
4. Канторович Л. В., Гавурин М. К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.: Изд-во АН СССР, 1949. С. 110–138 (работа написана в 1940 г. и цитируется в [3]).
5. Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Л.: Лениздат, 1951.
6. Залгаллер В. А. Новое в составлении поставок для распиловки бревен. Л.: ЦНИЛ треста Севзаплес, 1956.
7. Рубинштейн Г. Ш. Задача о крайней точке пересечения оси с многогранником // Докл. АН СССР. 1955. Т. 100, № 4. С. 627–630. Обобщение задачи о крайней точке // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113, № 5. С. 987–900.
8. Канторович Л. В. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 3. С. 441–444. (Основные результаты работы докладывались на Научной сессии ЛГУ 12 мая 1941 г.).
9. *Activity analysis of production and allocation* / Т. С. Koopmans (editor). New York: Wiley, 1951.
10. *Linear inequalities and related systems* / Н. W. Kuhn, A. W. Tucker (editors) // Ann. Math. Stud. 1956. Vol. 38.

## Показатели работы предприятий нуждаются в пересмотре

Показатели работы предприятий: выполнение плана по валовой и товарной продукции, себестоимости, производительности труда и др., представляют основные количественные данные, характеризующие работу предприятий. По ним страна судит о работе предприятий, о том, как предприятие выполняет свои обязательства перед народным хозяйством, насколько полно и правильно оно использует свои производственные возможности. По ним сравнивают работу данного предприятия с другими и с работой того же самого предприятия за предыдущий период времени. На основе анализа этих показателей органы, осуществляющие руководство деятельностью предприятий, строят выводы, касающиеся определения объема производства и характера продукции на следующий период, обеспечения предприятий и пр.

С другой стороны, по плановым показателям работы предприятие судит о том, чего требует от него страна, как оно выполняет свой долг, в соответствии с этим направляет свою работу. Даже о целесообразности того или иного отдельного мероприятия предприятие судит по тому, как его проведение отразится на выполнении плана, на показателях работы предприятия, на оценке его работы.

Такая роль показателей работы предприятий, как основного средства экономической оценки их деятельности, предъявляет очень серьезные требования к выбору используемой системы показателей. Наиболее существенными требованиями к данным о работе предприятия, которые дает система показателей, нам представляются следующие три: *полнота* данных, *сравнимость* и *правильность* их. Именно, во-первых, система данных должна отличаться полнотой, т. е. все основные моменты, характеризующие работу предприятий, должны получать известное отражение в показателях. Во-вторых, получаемые данные должны иметь общий, суммарный характер: так, чтобы можно было сравнивать по ним работу предприятий при различной продукции и условиях. Наконец необходимо, чтобы показатели давали правильную характеристику работы предприятия с точки зрения интересов страны в целом. Действительно, улучшение работы предприятия должно положительно отражаться на его показателях. Проведение мероприятий, целесообразных в данный момент с точки зрения народного хозяйства, должно вызывать улучшение показателей работы. Стремление улучшить показатели своей работы должно стимулировать работу предприятий в нужном для страны направлении.

Оценивая с точки зрения этих естественных и бесспорных требований используемую в настоящее время систему показателей нашей промышленности, нельзя не прийти к тому выводу, что она имеет очень существенные недостатки, анализ которых приведен ниже. Наличие этих недостатков мешает правильной оценке деятельности предприятий и выводам по ней, приводит к тому, что показатели



работы предприятий не стимулируют проведения важнейших государственных мероприятий по экономии и рациональному использованию топлива, электроэнергии, железнодорожных перевозок, оборудования и т. д. Поэтому наличие этих недостатков является серьезным тормозом для дальнейшего улучшения работы нашей промышленности.

Некоторые из этих недостатков нашли то или иное отражение в работах наших экономистов и печатных выступлениях наших хозяйственников как до войны, так и во время нее. Однако мы считаем полезным подвергнуть здесь эти недостатки более полному анализу и одновременно наметить целесообразное направление изменений в системе показателей.

Первым, весьма существенным недостатком системы показателей, является *множественность* их. Показатели используются как денежные, так и натуральные. Так, например, учитывается выполнение плана по валовой и по товарной продукции и одновременно выпуск ее в натуральном выражении. Далее, основными показателями служат себестоимость и производительность труда. Кроме этих основных, суммарных, показателей принимается во внимание ряд других, более частных, но не менее существенных: расход материала на единицу продукции, удельный расход электроэнергии, сортность продукции, производительность оборудования, число рабочих, не выполняющих норм и т. п.

Такое многообразие показателей крайне затрудняет оценку работы предприятий. Следует ли признать работу успешной, если предприятие перевыполнило план выпуска продукции, но дало вместо намеченного снижения повышение себестоимости? Если себестоимость снижена за счет затрат труда, но расход сырья на единицу продукции возрос и т. п.? Такая множественность показателей не только затрудняет оценку работы предприятий для вышестоящих и контролирующих органов, но и для самого предприятия. Трудно держать в поле зрения одновременно большое число показателей. Обычно производственные работники предприятия следят главным образом за одним — выполнением плана выпуска продукции. Что до прочих показателей, то они выводятся плановыми отделами за прошедший период и производственные работники не знают и мало интересуются тем, как их работа и отдельные мероприятия отражаются на этих показателях. Принимать в расчет одновременно несколько показателей тем более трудно, что часто они находятся в известном противоречии один с другим — мероприятие, дающее улучшение одного показателя, может снизить другой, и часто нелегко решить вопрос о том, какому следует отдать предпочтение. Более того, нередки случаи, когда проведение важного и нужного мероприятия может вызвать ухудшение всех показателей. Так, отказ от использования электроэнергии городской станции и переход на собственную установку, работающую на местном топливе, и заготовка его самим предприятием, требуя определенных сил и средств, не дает увеличения валовой и товарной продукции (выполнения плана) и обычно отрицательно отражается на себестоимости. Таким образом, оно представляется явно невыгодным мероприятием, несмотря на целесообразность его с государственной точки зрения.

Перейдем теперь к анализу недостатков отдельных показателей.

### Валовая и товарная продукция

Эти основные показатели имеют целью указать общий объем продукции, которую дает предприятие. Однако ряд недостатков в способах исчисления этой продукции приводит к большим неудобствам при их использовании.

*Учет валовой, а не чистой продукции.* Первый, основной, недостаток состоит в том, что учитывается общая (валовая) продукция, выпускаемая предприятием, а не чистая продукция, иначе говоря, учитывается не только стоимость, созданная на самом данном предприятии, но и перенесенная (сырье и материалы, топливо, электроэнергия, полуфабрикаты). Между тем для разных предприятий и для различных изделий одного и того же предприятия доля стоимости, созданной данным предприятием, в общей стоимости изделия резко различна. Одни изделия изготавливаются целиком из примитивного сырья, но требуют значительной обработки, по другим изделиям главную долю стоимости представляет сырье или полуфабрикаты и даже готовые части (моторы, поступающие от другого предприятия). Если для мелких стальных деталей стоимость материала незначительна и чистая продукция близка к 100%, то для крупных отливок, не подвергающихся обработке, которые выполняет нередко то же самое предприятие, она составляет не более 20–30%. Если доля сырья и материалов в рудодобывающей и горнохимической отраслях составляет 1–3%, то для металлообрабатывающей она равна 33%, для деревообрабатывающей — 43% и доходит до 75–80% для текстильной, швейной, пищевкусовой отраслей. Таким образом, действительно произведенная предприятием ценность довольно случайным образом зависит от валовой продукции. Это создает целый ряд трудностей и имеет весьма вредные последствия. Перечислим некоторые из них.

*Предприятие не заинтересовано в соблюдении состава программы (ассортимента).* Благодаря наличию в программе изделий с разной долей чистой продукции, предприятию гораздо легче выполнить свой план (по валовой продукции) за счет одних изделий, чем за счет других. Если (неизменная) цена каждого из двух изделий 100 руб., но в первом доля чистой продукции — 80%, а во втором — 20%, то для предприятия произвести второе изделие (обычно) в 4 раза легче, чем первое, между тем оба войдут в валовую продукцию одинаковым слагаемым. Поэтому первые изделия «невыгодны» для предприятия, вторые — «выгодны», и нередко, благодаря этому предприятия стараются нарушить заданный ассортимент, уменьшить долю невыгодных изделий, хотя они были бы и весьма нужны, и достигают за счет этого выполнения плана — в действительности фиктивного. Например, на заводе им. Дзержинского для оцинкованного железа по сравнению с чугуном передельный ценностный коэффициент был 6,44, а коэффициент по трудоемкости 3,51, благодаря значительной стоимости используемых при оцинковке материалов, поступающих со стороны, т. е. для него было «выгодным» увеличение выпуска оцинкованного железа.

*Предприятие не заинтересовано в производстве у себя на месте сырья, топлива, электроэнергии, полуфабрикатов, инструмента.* Если предприятие получает полуфабрикат с другого завода, то оно совершенно не заинтересовано в том, чтобы вместо этого производить его у себя, даже если имеет к тому возможность.

Действительно, производство полуфабриката потребует значительных усилий, затраты труда, загрузки оборудования, между тем оно ничуть не отразится на выполнении плана, так как не повлияет на валовую и товарную продукцию. Благодаря этому, предприятие пойдет на развитие такого производства только в случае крайней необходимости, когда получение его со стороны срывается. В результате нередко предприятия создают кооперирование производства без особой нужды к тому, чтобы облегчить себе формальное выполнение плана. То же самое относится к сырью, электроэнергии, топливу, инструменту и пр., предприятию «выгоднее» получать их со стороны, чем производить самим, ибо собственное производство, требуя значительных усилий, нисколько не увеличит валовой продукции. Именно поэтому предприятия идут на самообеспечение только в крайнем случае, при прямой угрозе остановки основного производства, далеко не используя всех случаев, когда такая возможность имеется и целесообразна с государственной точки зрения. Этим в значительной степени следует объяснять возможность таких безобразных фактов, как то, что ряд фабрик и заводов Ивановской области, несмотря на перегрузку Ивэнерго, не используют собственных энергетических установок (Вичугская фабрика, Тейковский комбинат, Красноволжский комбинат в Кинешме, «Правда», 22.XI.42 г.); как то, что еще до недавнего времени из Челябинской области вывозили в Свердловскую область до двух составов формовочного песка, несмотря на полную возможность получать его из местных карьеров (ПРАВДА, 10.X.42 г.).

*Недостаточная заинтересованность предприятий в экономии сырья, топлива, горючего, электроэнергии.* Известно, какое значение имеет экономия перечисленных производственных факторов и как зависит от нее работа всей промышленности. Экономия имеет такое же значение, как и выпуск продукции; бесспорно, что если предприятие произведет ту же самую продукцию, но затратит на 100 тонн стали меньше, то это равносильно тому, что оно в дополнение к основной продукции дало бы 100 тонн стали. Однако такое уменьшение основных затрат при существующем способе учета не отражается на валовой продукции, и так как в основном именно по ней судят о работе предприятия, заинтересованность предприятий в проведении мероприятий по экономии недостаточна. Как правило, предприятие настойчиво проводит экономию данного материала, если оно снабжается им недостаточно, так что от экономии прямо зависит выпуск основной продукции. Если же предприятие уверено, что оно данным материалом будет обеспечено, то, хотя бы последний был и крайне дефицитным вообще, вопрос об экономии в большинстве случаев остается в области планов, а возможные мероприятия реализуются крайне медленно. Такое положение усугубляется еще тем, что и на другие показатели мероприятия по экономии не влияют положительно или влияют незначительно.

*Трудность суждения о выполнении программы при изменении ассортимента.* Нередко предприятие меняет состав программы в силу не зависящих от него причин — изменение заказа, отсутствие тех или иных материалов и т. п. В таком случае очень трудно по выполнению плана по валовой продукции судить о действительной работе предприятия, ибо одни изделия более трудоемки (имеют большую долю чистой продукции), другие менее трудоемки. И совсем нередки случаи, когда правильный анализ покажет, что предприятие, выполнившее план на 120%, работало плохо, а выполнившее план на 80%, работало хорошо. Очень трудно также

при изменении состава продукции сравнивать работу предприятия за разные периоды. Так, например, на автомобильном заводе, производящем одновременно и прежние изделия и специзделия, по первым доля сырья, покупных полуфабрикатов и материалов составляет примерно 65%, по вторым — 18%. В связи с этим очень трудно судить об успешности работы и действительном выполнении плана таким заводом, так как доля той и другой продукции меняется по периодам и значительно отличается в фактическом выпуске от предусмотренной планом.

Наконец, *трудно судить о производственной мощности предприятия.* Действительно, данному производственному аппарату (состав работающих, оборудование) отвечает определенная возможность производства ценностей, т. е. определенный (примерно) объем чистой продукции. Но одному и тому же объему чистой продукции может отвечать совершенно различный объем валовой продукции, и потому даже самое приближенное решение вопросов о возможной загрузке предприятия сравнением валовой продукции невозможно. Завод им. Андреева до 1929 г. производимую им мартеновскую болванку отпускал на сторону, получая для трубных агрегатов штрипсы со стороны. Впоследствии для производства штрипсов был восстановлен листопрокатный стан, и сталь, которая отпускалась на сторону, пошла тут же в дальнейшую переработку. В результате валовая продукция завода резко снизилась, так как раньше в ее состав входили и сталь и трубы, а сейчас только трубы. Таким образом, производственная мощность завода возросла, а валовая продукция уменьшилась! Применение учета чистой продукции вместе с некоторыми другими изменениями значительно облегчило бы суммарный анализ производственных мощностей.

*Искажение результатов при анализе отраслей производства.* Анализ валовой продукции отраслей является базой для целого ряда важных заключений относительно веса, развития отраслей и т. п. Между тем эти цифры являются в значительной мере случайными. Валовая продукция отрасли получается сложением продукции отдельных предприятий. Но продукция одних предприятий дает сырье, материал или полуфабрикат для других предприятий той же отрасли, в результате ряд стоимостей учитывается дважды и трижды, и притом каждая разное число раз, что придает случайный характер полученной сумме. Явным свидетельством этого является тот, например, факт, что такое чисто организационное мероприятие, как разукрупнение комбината (металлургического, резинового, текстильного), может резко повысить учетную валовую продукцию без изменения действительного физического выпуска продукции. Это может привести к различным неправильным заключениям. Например, металлургические заводы им. Петровского и Ленина до 1933 года существовали как единое предприятие. Впоследствии они разделились, и сталь, которая прежде шла в дальнейшую переработку внутри комбината, стала готовым изделием завода им. Петровского. В результате суммарная валовая продукция обоих заводов резко возросла без существенного изменения физического ее объема. Далее, так как доля чистой продукции в разных отраслях резко отличается, то при сравнении отраслей по валовой продукции ряд весьма важных отраслей (с высокой долей чистой продукции): горнодобывающая, металлургическая, получают несообразно низкий удельный вес, напротив, вес таких отраслей, как пищевкусовая, швейная и, отчасти, металлообрабатывающая, оказывается завышенным.

### Устарелые и неправильные оценки продукции

При оценке валовой и товарной продукции в большей части отраслей промышленности пользуются неизменными ценами 1926–1927 гг. Однако эти цены по ряду причин плохо отражают действительное соотношение ценностей продукции и связанных с ее производством затрат на сегодняшний день. Во-первых, даже в указанный период 1926–1927 гг. эти цены не для всех изделий были правильны. Однако на сегодняшний день эти мерки плохо применимы. Многие изделия вовсе не производились в 1926–1927 гг. и потому на них цены были установлены впоследствии, в значительной мере произвольно и случайно на основании сравнения с аналогичными изделиями, для которых цены имелись. Далее, ряд изделий производился в то время в совершенно иных условиях. Многие изделия, которые в настоящее время находятся в массовом производстве, тогда производились индивидуально или мелкосерийно. Для этих изделий цены явно завышены по сравнению с другими. Напротив, для таких продуктов как уголь, металл и некоторые другие — цены занижены. Наконец, в некоторой мере недостатки цен связаны с недостатком в подсчете себестоимости, о чем ниже. Неправильность существующих цен усматривается из того, что нередко для машины, более совершенной и трудной в изготовлении, цена более низкая просто в результате того, что цены устанавливались в разные годы и различными органами. Далее, сравнение с ценами других стран также показывает, что, например, цены на сталь, уголь, нефть, железнодорожный транспорт у нас резко занижены, скажем, по сравнению с продукцией машиностроения. Так, если там цена автомобиля (США, 1937 г.) соответствует цене 20–80 тонн чугуна, то у нас — цене 100–150 тонн.

Этот недостаток в начислении валовой и товарной продукции еще усиливает те последствия, которые указаны выше. Благодаря неправильностям в ценах усиливается разница в «выгодности» изделий для предприятия. Весьма трудоемкие изделия часто дают малое слагаемое в валовую продукцию, другие, высокоценные, выгодны для предприятия. Так, в программе одного предприятия одновременно фигурировали изделия, имевшие неизменную цену 20 руб., а себестоимость — 7 руб. 50 коп., и изделие, для которого при неизменной цене 300 руб. себестоимость была 500 руб. При этом сходные значения себестоимости этих изделий были и на других предприятиях. Очевидно, в таких условиях предприятию «выгодно» увеличение доли первого вида продукции и «невыгодно» увеличение доли второго вида.

В результате еще более затрудняется суждение о выполнении плана или сравнение объема производства в разные периоды в случае изменения состава продукции. Сильно искажается оценка веса различных отраслей промышленности в народном хозяйстве. Так, в 1934 г. такая основная для страны промышленность, как угольная, привлекавшая огромные средства и усилия, имела по валовой продукции (Главуголь — 922 млн руб.) примерно такой же вес, как энергетическое машиностроение (Главэнергопром — 1000 млн руб.), резиновая (Главрезина — 956 млн руб.), кожевенно-обувная (1051 млн руб.) и кондитерская (711 млн руб.) и значительно меньший, чем швейная (1380 млн руб.). Вся торфяная промышленность Союза дала меньшую валовую продукцию (161 млн руб.), чем один Кировский завод (175 млн

руб.) или чем галантерейное производство (252 млн руб.)!\* То же несоответствие оказывается при сравнении с другими странами. В 1936 г. машиностроение у нас имело по валовой продукции удельный вес 26,9%, в то время как в Соединенных Штатах, несмотря на включение в нее огромной автомобильной промышленности, только 17,5% (1929–1937 гг.), в Японии, Англии и Германии — 10–16%\*\* . Наоборот, черная металлургия имела несколько более низкий удельный вес у нас, чем в США, Англии и Германии. Это связано со сравнительно низкой ценой металла у нас по сравнению с продукцией машиностроения, о чем уже была речь выше.

Кроме перечисленных недостатков следует остановиться еще на одном. Разница в ценах по сортам продукции и качеству, как правило, весьма незначительна, что не соответствует ни потребительской ценности высших сортов, ни трудности их производства. Такое положение ведет к тому, что предприятия не заинтересованы должным образом в выпуске продукции высших сортов.

Следует заметить также, что хотя действующие отпускные цены существенно разнятся от цен 1926–1927 гг., но они также плохо отражают действительные затраты, поэтому переход к ним не дает положительных результатов.

Неправильный учет незавершенной продукции и других работ, обеспечивающих производство следующего календарного периода. Незавершенная продукция учитывается полностью в валовой продукции и не учитывается вовсе в товарной продукции. И то и другое влечет весьма отрицательные последствия. Когда о выполнении плана судили по валовой продукции, то предприятия, идя по пути наименьшего сопротивления, не добивались часто подтягивания выпуска по наиболее трудным деталям и накапливали незавершенную и некомплектную продукцию. Именно в связи с этим в качестве основного показателя работ предприятия была избрана товарная продукция, в которую незавершенная продукция не включалась. Однако это имеет свою отрицательную сторону, которая состоит в том, что наряду с другими причинами такое положение благоприятствует штурмовщине — неравномерной работе предприятий. Именно, предприятия, будучи заинтересованы в максимальном выполнении плана к концу месяца по законченной продукции, полностью проедают задел, в последние дни перебрасывают всех рабочих на завершающие операции и сборку. В результате к началу следующего месяца предприятие, не имея необходимого задела, не может нормально работать, возникают различные потери: простой рабсилы и оборудования, увеличение брака, перерасход сырья, топлива, электроэнергии. Неравномерный выпуск продукции и соответственно обеспечение ею других предприятий в свою очередь мешает равномерной работе на них. На эти вредные явления указывалось неоднократно до войны, в частности, в докладе тов. Маленкова на XXVIII партконференции, но они не изжиты и сейчас. Так, в передовой от 2.VII.42 г. ПРАВДА пишет: «В конце мая на отдельных предприятиях склады деталей были вычищены под метелку, и уже к 1 июня нормальный выпуск продукции был нарушен». Одной из существенных причин этих явлений, мешающих нормальной работе предприятий по графику, является именно неправильный учет незавершенной продукции. Поэтому мы считаем необходимым

\*Народнохозяйственный план на 1935 год. Второе издание. — С. 504–580.

\*\*Экономика социалистической промышленности. — М.: Соцэкгиз, 1940. — С. 108. Соединенные Штаты Америки. — М.: ОГИЗ, 1942. — С. 64.

учитывать в товарной продукции движение незавершенной продукции, но в пределах, предусмотренных планом.

Следует указать, что отдельные предприятия, учитывая выполнение плана запуска деталей, как один из основных показателей при оценке работы цеха, добились создания нормального задела (см. статью директора завода им. Ильича тов. Пригильского в ПРАВДЕ от 19.X.42 г.). В настоящее же время не только отсутствует заинтересованность предприятий в создании заделов и запасов, обеспечивающих нормальную работу, но часто наоборот, существующий порядок снабжения и обеспечения приводит к тому, что предприятия могут рассчитывать на получение и подвоз дефицитного материала или топлива, только если им грозит прямая опасность остановки. Электростанция, создающая резерв топлива, получит его меньше, чем работающая с колес.

С тем же самым сталкиваемся в вопросе о подготовительных работах, обеспечивающих производство следующего периода. В настоящее время, когда основным показателем, по которому судят об успешности работ предприятия, является количество выпущенной им за данный период продукции, многие предприятия не проводят необходимых подготовительных мероприятий, без которых невозможен нормальный выпуск продукции в следующий период, например, проходка новых лав в угольной промышленности. Такое положение отрицательно отражается на работе предприятий в следующий период времени, делая непрочными достигнутые производственные успехи. Для устранения такого положения необходимо в той или иной мере отразить в основном показателе, характеризующем объем продукции, созданной предприятием, также работы, обеспечивающие следующий период, а выполненные в данный период.

### **Учет продукции в натуральном выражении**

Отчасти ввиду указанных выше недостатков учета продукции в денежном выражении наряду с ним широко пользуются учетом продукции в натуральном выражении. Этот способ учета продукции имеет то преимущество, что на оценке выпуска продукции при таком способе не отражаются изменения в ценах и неправомерности в них, а также в способах вычисления. Однако и этот способ имеет не менее существенные недостатки. Прежде всего здесь сохраняются некоторые из тех недостатков, которые были упомянуты выше. Поскольку и при таком способе учета объема производства подсчитывается общая продукция, а не чистая с учетом произведенных затрат, сохраняются те же вредные последствия. Также отрицательно сказывается и неверный учет незавершенной продукции, который имеет место и здесь.

Однако при таком измерении объема продукции имеется ряд других недостатков, которые необходимо отметить особо.

При пользовании натуральными показателями крайне затруднительно сравнение работы предприятий. Совсем невозможно сравнивать объем работы предприятий, производящих разную продукцию. Даже для одного и того же предприятия, но производящего несколько видов продукции, трудно сравнивать его работу за разные периоды или план с фактическим выпуском, если состав продукции был разным. Например, хорошо или плохо работал автомобильный завод, если вместо

намеченных 1000 автомашин и 100 троллейбусов он выпустил 1200 автомашин и 50 троллейбусов?

Далее, лишь на очень немногих предприятиях имеется всего 2–3 вида продукции, что позволяет применять натуральные показатели в чистом виде. В других случаях натуральные показатели применяют в той или иной приведенной, укрупненной форме (тонны условного топлива, тонны отливок, кубометры древесины, метры материала, тонно-километры на железных дорогах и т. п.). Применение таких показателей дает дополнительно ряд недостатков.

Опять появляются «выгодные» и «невыгодные» изделия. Так, литейному цеху гораздо легче выполнить план (в тоннах металла) за счет крупных отливок, чем за счет мелких и т. п. Это толкает предприятие на нарушение планового состава продукции. Предприятие может сорвать выпуск некоторых весьма важных и трудных изделий и в то же время формально выполнить план (за счет других изделий).

Но даже в тех случаях, когда предприятие выпускает одну продукцию, единый натуральный показатель неудобен тем, что не учитывает такого важного момента, как сорт и вид продукции. Так, в течение ряда месяцев в 1942 г. основные тресты Кузбасса выполняли формально общий план угледобычи (в тоннах), но не добывали предусмотренное планом количество коксующихся углей и тем срывали работу черной металлургии (см. ПРАВДА от 19.X.1942 г., «Больше коксующихся углей»). Такое же положение и на металлургических заводах. Так, директор Кузнецкого завода тов. Белан (ПРАВДА, 8.VIII.1942 г.) писал о том, что «можно давать много кокса и получать мало чугуна и наоборот — давать меньше кокса (но высокого качества) и получать много чугуна». Такое положение заставило комбинат при оценке работы цехов завода отказаться от чисто количественных показателей.

Таким образом, другой существенный недостаток натуральных показателей тот, что они не обеспечивают выпуска продукции нужного вида, сорта и высокого качества.

### **Недостатки показателя «производительность труда»**

На этом показателе, прежде всего, сказываются все перечисленные выше недостатки показателя валовой продукции, так как он определяется отношением валовой продукции к числу работающих. Например, производство менее «выгодных» изделий с большим весом собственной работы предприятия (чистой продукции) или низкоценных может вызвать резкое снижение производительности труда, что не будет означать действительного ухудшения работы предприятия. По той же причине к снижению показателя производительности труда приведет переход предприятия к собственному обеспечению сырьем, топливом, полуфабрикатами или инструментом, если прежде эти составляющие (без затрат труда на самом предприятии) входили в оценку его продукции.

Ввиду этих же обстоятельств весьма малопоказательно сравнение производительности труда на различных предприятиях. В частности, обычно более высокий уровень производительности труда на предприятиях обрабатывающей промышленности, чем на предприятиях добывающей, как правило, отнюдь не свидетельствует ни о лучшей работе первых предприятий по сравнению со вторыми, ни о большей их технической оснащенности.



Другим существенным недостатком показателя производительности труда является тот, что он составляется без учета квалификации рабочей силы. Благодаря этому, оказывается, что при неизменном составе продукции и прочих условий этот показатель не характеризует достаточно удовлетворительно использование рабочей силы предприятием. В частности, таким образом не создается заинтересованность предприятия в вовлечении в производство новых кадров, ибо такое мероприятие дает обычно ухудшение показателя производительности труда.

Наконец, показатель производительности труда, будучи взят безотносительно к оснащенности предприятия оборудованием, часто не благоприятствует полному и правильному его использованию. Именно, пусть предприятие, имеющее квалифицированное оборудование, но находящееся не в полном соответствии с продукцией, производимой в данное время, увеличит объем производства за счет частичного привлечения менее производительного оборудования по тем группам, которые у него не загружены. Такое мероприятие потребует значительного числа дополнительных рабочих, в результате чего производительность труда на одного рабочего снизится. В то же время такое мероприятие может быть вполне целесообразным с государственной точки зрения, если эта продукция вообще не может быть произведена в другом месте или может быть произведена только на предприятиях, менее оборудованных и с еще большими затратами труда. Действительно, в таком случае проведение этого мероприятия в общегосударственном масштабе даст повышение производительности труда.

Та же картина имеет место и по отношению к отдельным недостаточным видам оборудования. Так, при недостатке кранового оборудования, когда параллельно с погрузкой краном идет погрузка вручную, стоит увеличить число рабочих, обслуживающих кран, если это хотя бы ненамного повысит интенсивность его работы, несмотря на то, что производительность труда работающих на кране при этом уменьшится, ибо общая производительность труда на погрузке возрастет. В настоящее время нередки случаи, когда ориентировка по производительности труда по отдельному виду оборудования служит тормозом для правильного его использования. Так, чтобы не понижать производительность труда и заработка бригады, на шахтах не шли на увеличение числа забойщиков, обслуживающих щиты. Между тем такое увеличение числа забойщиков дает более интенсивное использование щита и тем самым рост угледобычи (см. ПРАВДА, 1.Х.1942 г., «Источник увеличения добычи угля»).

### **Недостатки показателя «себестоимости продукции»**

Себестоимость является основным показателем, учитывающим затраты, а потому правильное ее определение имеет чрезвычайно существенное значение. Хотя важная роль себестоимости и признается работниками производства, однако практически этому показателю придают гораздо меньшее значение, чем товарной и валовой продукции, отчасти вследствие тех недостатков в его исчислении, о которых идет речь ниже.

а) Учет разных составляющих в различных масштабах. Основным недостатком в построении себестоимости является то, что различные виды затрат — сырье, амортизация, рабочая сила — учитываются в ней различным образом, можно сказать,

в разных масштабах: зарплата — в ставках текущего года, сырье и материалы — в отпускных ценах, которые были установлены в различные годы и часто соответствовали иным уровням зарплаты и пр., амортизация — в процентах к стоимости оборудования, исчисленной на год его приобретения (импортного оборудования — нередко в золотых рублях). Такой способ исчисления можно сравнить по точности с техническим расчетом, в котором одни данные брались бы измеренными в сантиметрах, другие — в дюймах, третьи — в вершках, и полученные результаты без перевода в одну и ту же единицу складывались бы, сравнивались и т. п.

Неудивительно поэтому, что такой способ дает весьма неправильное соотношение веса различных затрат при исчислении себестоимости, что еще усугубляется тем, что затраты, связанные с использованием оборудования, вообще учтены неполно, о чем подробнее ниже. Этот принципиальный недостаток в исчислении себестоимости имеет целый ряд вредных последствий.

Прежде всего оказывается, что благоприятное с точки зрения народного хозяйства изменение структуры затрат может вызвать ухудшение показателя себестоимости. В частности, благодаря сравнительно низким ценам на важнейшие продукты и услуги (металл, уголь, нефть, электроэнергию, железнодорожный транспорт), не соответствующим их народнохозяйственной значимости, мероприятия по их экономии часто связаны с повышением себестоимости. Так, замена угля дровами и торфом дает значительное повышение себестоимости. Также с повышением себестоимости часто связано применение заменителей вместо полноценных дефицитных материалов. Напротив, нередки случаи, когда снижение себестоимости достигается в ущерб государственным интересам за счет увеличения расходования этих дефицитных факторов. Так, на одном из заводов Рыбинска, перейдя к электронагреву при травлении проволоки (с использованием электроэнергии системы Ярэнерго) вместо нагрева паром от собственной котельной, получили «экономии» в 140 тыс. руб. в год (Северный Рабочий, 22.XI.1942 г.).

В других случаях, когда проведение мероприятий по экономии перечисленных факторов не требует специальных затрат, благодаря низким ценам на указанные факторы в денежном выражении, снижение себестоимости и экономия оказываются крайне незначительными. Так, если на машиностроительном предприятии доля электроэнергии в себестоимости составляет 1–2%, то экономия электроэнергии на 10%, что должно потребовать весьма значительных усилий от предприятия, даст снижение себестоимости лишь на 0,1–0,2%.

Такое отсутствие экономической заинтересованности предприятий в сокращении расходования указанных факторов имеет следствием то, что наличные возможности экономии предприятиями часто не используются или используются крайне медленно. Как правило, предприятия идут на подобные мероприятия по замене и экономии дефицитных материалов и услуг только будучи вынужденными к этому, когда непроведение этих мероприятий непосредственно угрожает выполнению плана.

Ярославский автозавод, не получив дальнепривозного топлива, удачно использовал в качестве топлива находившиеся вблизи запасы гудрона. При этом оказалось, что это дало не только большую экономию по сравнению с дровами, на которые он должен был перейти, но даже по сравнению с углем — это дало эконо-

мию в 145 тыс. руб. за сезон. Таким образом, это мероприятие было осуществимо и экономично даже на несколько лет раньше. Однако предприятие не подумало реализовать его до тех пор, пока не было к тому вынуждено. На другом предприятии, когда обнаружилось, что в связи с увеличением программы пропускная система гальванических ванн недостаточна, была проверена их работа. Оказалось, что полезно используется не более 1/4 энергии. После устранения этих недостатков пропускная способность ванн возросла в 4–5 раз, и получилась экономия в 360 000 кВт·ч электроэнергии. Конечно, это мероприятие было целесообразно и раньше, однако, пока это не потребовало выполнение программы, его не замечали и не осуществляли. Из этих примеров видно, что даже в случаях, когда предприятия имеют несомненные достижения в области экономии, обычно оказывается, что соответствующее мероприятие было проведено для обеспечения программы, а экономия получилась лишь попутно.

Случаи, когда проводились бы существенные мероприятия для экономии, для снижения себестоимости, когда это не связано с прямым обеспечением программы, сравнительно редки. Причиной этого положения, кроме указанных недостатков показателя себестоимости, является и то, что он рассматривается как второстепенный.

Тем более предприятия отмахиваются от мероприятий по снижению расхода электроэнергии и топлива, когда их проведение связано с какими-либо производственными трудностями или затратами. Между тем такие мероприятия могут быть целесообразны, даже если они связаны с некоторым повышением себестоимости. Действительно, следует признать, что непроведение этих мероприятий может иметь результатом нарушение баланса электроэнергии и возможные потери во много раз большие: работа на пониженной частоте, случаи полного выключения и простоя отдельных предприятий.

Таким же образом экономию материалов предприятия проводят в основном по тем видам, которые лимитируют их производство на данный момент, и довольно равнодушны к таким мерам, если предприятие обеспечено данным материалом на несколько месяцев, хотя тот же материал очень дефицитен для других предприятий. Предприятие энергично использует свой газогенераторный парк, когда у него нет горючего, и забывает об экономии горючего в тот период, когда оно им обеспечено.

Тем же отсутствием экономической заинтересованности следует объяснять и уже упомянутые факты неустранения все еще продолжающихся ненужных дальних перевозок таких материалов, как формовочная земля, известь и т. п.

Впрочем, то положение, что в настоящее время предприятию «выгоднее» и проще работать «на всем готовом» — на дальнепривозном топливе, городской электроэнергии, дефицитных материалах — столь хорошо известно, что вряд ли нуждается в доказательстве. При этом даже забывается вся странность такого положения, когда предприятию выгодно то, что невыгодно государству! И совершенно правильно «Правда» говорит о том, что выполнение норм расхода топлива и замена дальнепривозного топлива местным должны рассматриваться, как основные показатели работы предприятий, наряду с выполнением программы (10.X.1942 г.).

По нашему мнению, нужно пойти дальше, и основные показатели работы предприятий построить так, чтобы здесь не было противоречий, чтобы проведение таких государственно-полезных мероприятий вызывало бы улучшение и основных показателей, характеризующих объем производства, и производственные издержки.

Другим основным пороком показателя «себестоимость», имеющим принципиальное значение, является недостаточный учет в числе затрат оборудования. Применение квалифицированного и недостаточного (дефицитного) оборудования находит крайне незначительное отражение в себестоимости продукции. Учитывается только износ оборудования (амортизация), а важнейший момент занятости — «задалживание» оборудования на данной работе и то, что тем самым народное хозяйство лишено возможности использовать его в данное время для других работ, не находит количественного выражения, т. е. крайне важный вид народнохозяйственных затрат не отражен в основном показателе, характеризующем затраты, — в себестоимости.

Такое положение, прежде всего, имеет следствием тот факт, что оборудование используется не наилучшим и не наиболее полным образом. Для предприятия оказывается выгодным применение квалифицированного оборудования даже на простой работе и с малой нагрузкой, когда это нецелесообразно для народного хозяйства, ибо из-за недостатка оборудования его будут лишены места, где оно могло бы дать в несколько раз большую экономию труда. Так, для данной стройки целесообразно и дает снижение себестоимости строительства применение экскаватора даже в том случае, когда он может быть использован только 1/3 времени. Для народного хозяйства такое применение экскаватора будет нецелесообразно, ибо имеется ряд строек, где он бы мог быть использован на 80–100% и где за отсутствием его земляные работы производятся вручную.

Таким образом, получается, что предприятие не заинтересовано в том, чтобы обойтись минимумом оборудования, максимально использовать имеющееся, а излишнее высвободить. Именно этим в значительной степени объясняются те многочисленные факты неиспользования или неправильного использования оборудования, о которых шла речь в докладах тов. Вознесенского и тов. Маленкова на XVIII партконференции и которые весьма распространены и сейчас.

Более того, оказывается, что в отличие от простоев рабсилы, которые дают резкий рост себестоимости, даже полный простой отдельных видов оборудования почти не отражается в ней. Поэтому в то время как простой рабсилы представляют сравнительно редкое явление, простой оборудования чрезвычайно часты и привычны, между тем наносимый ими ущерб не менее значителен. Благодаря тому, что предприятие ничего не теряет и в случае омертвления средств или малого использования оборудования, столь обычным явлением оказываются необоснованно завышенные заявки на новое оборудование, препятствующие правильному его распределению и нередко лишаящие этого оборудования те места, где оно действительно необходимо и его применение могло бы дать большой эффект. В то же время крайне редки случаи противоположного характера, когда предприятие само отказалось бы от излишнего оборудования или требовало бы увеличения программы для более полного использования имеющегося.

Следует указать на то, что неучет фактора задалживания оборудования является в ряде случаев препятствием для более интенсивного его использования. Именно, во многих случаях оказывается, что при более интенсивном использовании оборудования затраты, связанные с производством единицы продукции, начинают возрастать, между тем все же до известной степени такое интенсивное использование целесообразно с народнохозяйственной точки зрения, если данный вид оборудования является дефицитным.

Несколько подобных примеров, когда растут затраты труда на единицу продукции при повышении интенсивности использования оборудования, мы приводили выше, говоря о показателе производительности труда. Обычно в таком случае возрастает и себестоимость. Приведем еще пример подобного рода. Удельный расход топлива на кВт·ч электроэнергии резко различается от порядка 0,5 кг/кВт·ч для крупных новых ТЭЦ до нескольких кг/кВт·ч для малых старых установок, и нередко те и другие станции работают в общее кольцо. Если крупная ТЭЦ могла бы увеличить мощность со 100 тыс. кВт до 110 тыс. кВт, но при этом расход топлива на дополнительные 10 тыс. кВт составил бы 0,7 кг/кВт·ч, то в среднем для станции удельный расход угля возрос бы до 0,52 кг/кВт·ч. Таким образом, этот основной показатель работы электростанции ухудшился, а вместе с ним возросла бы и себестоимость, т. е. для данной станции такая интенсификация ее работы оказывается невыгодной.

В то же время она, конечно, целесообразна, так как позволяет отказаться от работы нескольких наиболее устарелых установок (общей мощностью до 10 тыс. кВт) и тем самым получить в несколько раз большую экономию топлива, чем затрачено на ее работу. Между тем, как видим, существующий способ подсчета себестоимости может послужить тормозом для подобного мероприятия.

Другой характерный пример такого рода — эксплуатация малодебитных скважин при нефтедобыче. Известно, что затраты на тонну нефти для этих скважин значительно выше среднего. Поэтому продолжение эксплуатации таких скважин дает некоторое повышение себестоимости и снижение производительности труда. Именно поэтому некоторые нефтетресты прекращали эксплуатацию таких скважин, как «нерентабельных», что было в свое время выправлено ЦК. Конечно, увеличение добычи и за счет таких скважин государственно целесообразно, ибо дополнительная продукция достигается при том же самом оборудовании. При этом если бы оборудование было полно учтено в себестоимости нефти, то подсчет показал бы, что в действительности это и рентабельно.

Этот недостаток себестоимости — неправильный учет оборудования — имеет и другое вредное последствие, заключающееся в неправильной оценке продукции. Как известно, отпускные цены, а часто и неизменные (для новых видов продукции) определяются, исходя из себестоимости. То обстоятельство, что в себестоимости не учтен один из важнейших видов затрат, создает неправильное соотношение цен для различных видов продукции и услуг, не соответствующее действительной народнохозяйственной значимости и трудности их производства. В особенности заниженными оказываются, благодаря этому, цены на ряд важнейших видов продукции и услуг, производство которых требует особенно большого и недостаточного оборудования и капиталовложений, именно: металла, угля, нефти, электроэнер-

гии, железнодорожных перевозок. Мы уже указывали выше, что такое положение не благоприятствует правильному использованию и экономии этих производственных факторов, а также их целесообразному распределению. Так как эти факторы фигурируют во всех других видах продукции, то для них получаются оценки, не соответствующие действительным затратам, связанным с их производством. Существует мнение, что затраты, связанные с использованием оборудования, учтены через амортизацию. Конечно, этого недостаточно. Доля амортизации в себестоимости составляет для большинства отраслей 3–5% от всех затрат, в то время как себестоимость производства при применении квалифицированного оборудования по сравнению с производством при простейшем оборудовании, так же имеющим широкое распространение у нас, оказывается ниже на 50% и более. Таким образом, момент использования этого оборудования, который и обеспечивает такую высокую экономию труда, почти не отражается в затратах.

В результате неучета фактора использования оборудования, себестоимость, в которой приняты во внимание только трудовые затраты, оказывается резко различной для предприятий различной оснащенности. Это создает ряд неудобств. Если отпускная цена определяется по некоторому среднему значению себестоимости, то выбор ее мало оправдан — создается положение, при котором на ряде предприятий заведомо предусматривается убыточность.

По той же причине и себестоимость различных изделий на одном и том же предприятии оказывается неверно определенной. Так как себестоимость определяется в основном рабочим временем (плюс материалы), то деталь, обработка которой поставлена на более совершенном автоматическом и прессовом оборудовании, получает низкую оценку, а нередко более простая деталь, но обработку которой пришлось за недостатком такого оборудования поставить на обычных станках, получает более высокую себестоимость, что очевидным образом неправильно. Таким образом, значения себестоимости отдельных деталей и изделий являются в значительной мере случайными и не могут служить базой для каких-либо заключений экономического характера — о выгодности замены одной детали другой, о целесообразности постановки производства данного изделия на том или другом предприятии, о сравнении нескольких возможных способов обработки одной и той же детали и т. п.

Эти неправильности еще усугубляются применяемой техникой исчисления себестоимости. Так, на машиностроительных предприятиях обычно все слагаемые, кроме материалов и зарплаты производственных рабочих (общезаводские, цеховые расходы, электроэнергия, топливо, вспомогательные рабочие и пр.), не подсчитываются индивидуально для данной детали, а распределяются пропорционально производственной зарплате. Очевидно, однако, что ряд затрат (электроэнергия, ремонт и содержание оборудования и др.) на час рабочего времени гораздо больше для мощных станков, чем для обычных. Благодаря этому, еще усиливается то положение, что для деталей и работ, поставленных на более совершенных и мощных станках, получается заниженное значение себестоимости.

Приведем один пример такого рода. На одном из заводов сравнивались два способа изготовления заготовок: на пиле «Галлер» и ломка под гидропрессом. По первому способу затраты на одну заготовку были: рабсила — 11,9 коп., электроэнергия — 8,4 коп., накладные расходы (общеховые, общезаводские) — 50,3 коп., всего

70,6 коп.; на прессе: рабсила — 6,9 коп., электроэнергия — 12,8 коп., накладные — 29,7 коп., полная себестоимость — 48,4 коп. Факт перехода на ломку гидропресом приводился как достижение в области экономии затрат. В действительности снижение себестоимости чисто «калькулятивное» по накладным расходам, исчисленным пропорционально рабочему времени. Фактически же эти расходы вряд ли существенно изменяются, так как пресс потребует большего ухода и ремонта, транспортировка будет та же и т. д. Реально же расход в рабсиле 5,0 коп. заменен расходом на электроэнергию в сумме 4,4 коп., что, ввиду напряженности электробаланса, мало целесообразно.

Весьма существенным недостатком себестоимости является и тот, что при подсчете затрат не учитывается конъюнктура данного момента, что данный производственный фактор (металл, горючее, определенный вид рабсилы или оборудования) стал особенно дефицитным в связи с резким увеличением потребности в нем или трудностью подвоза и т. п. И тот факт, что этот важный момент не отражен в затратах, вносит еще большее несоответствие в соотношение себестоимости продукции действительным народнохозяйственным затратам.

Ввиду всех этих обстоятельств оказывается, что сравнение себестоимостей не может быть решающим при рассмотрении вопросов о выборе способа производства, о выборе сырья, об использовании продукции и замене одного вида другим. Поэтому указанные важнейшие вопросы приходится решать не на основании точного количественного расчета, а в основном качественно, «на глаз», что, несомненно, сказывается отрицательно на правильности их решения.

Особо следует отметить большую пестроту в способах исчисления себестоимости реализуемых отходов и отпускных цен на них. Если, как это часто принято, на их долю не относится большинство производственных расходов, то себестоимость и отпускная цена отходов оказывается сильно заниженной. Такое положение не создает должной заинтересованности в передаче отходов другим предприятиям для их использования. Примером такого рода отходов является металлолом. Любопытно для сравнения указать, что установленная в США твердая цена на лом черных металлов составляет 19,2 доллара за тонну\*, а существовавшие до ее установления рыночные цены были еще выше: эта цена во много раз выше принятой у нас.

В некоторых других случаях, наоборот, отпускные цены отходов весьма высоки, чуть ли не выше отпускных цен для самого материала (топливные отходы в лесобрабатывающей промышленности). Такое положение приводит к незаинтересованности предприятий в уменьшении отходов и увеличении выхода основной продукции из единицы сырья.

Наконец, недостатками себестоимости, как показателя, который характеризует затраты предприятия, является то, что некоторые важные виды затрат не находят должного отражения. В частности, почти не отражается в себестоимости весьма существенный с точки зрения народного хозяйства вид затрат, состоящий в омертвлении средств в запасах материалов. Поскольку этот момент не находит отражения в рассмотренных выше других основных показателях, не создается должного стимула к освобождению предприятий от излишних запасов материалов, инструмента

\* Журнал «Мировое хозяйство». — 1942. — № 7.

и пр., использование которых могло бы в ряде случаев облегчить работу других предприятий.

### Недостатки других показателей

Из синтетических показателей нами не был здесь рассмотрен показатель прибыли — рентабельности. По поводу него следует сказать, что, так как он зависит как от цены продукции, так и от оценки производственных затрат, на нем сказываются все дефекты в исчислении валовой продукции и в исчислении себестоимости, о которых шла речь выше. В силу указанных причин этот показатель имеет довольно случайный характер — наличие прибыльности в такой же мере не говорит о хорошей работе предприятия, как наличие убыточности — о плохой его работе.

Достаточно здесь сослаться на то, что черная металлургия, которая привлекала огромные усилия всей страны, лучшие хозяйственные, технические и партийные кадры, в течение многих лет была нерентабельной, а спиртоводочная давала большую прибыль.

При сравнительно небольших изменениях в условиях работы (изменение состава продукции, изменение материала, переход к самозаготовке сырья) предусмотренная планом прибыльность может перейти в убыточность и обратно. Мы не останавливаемся подробно на этих недостатках, так как неудовлетворительность этого показателя то, что он в своем настоящем виде не характеризует успешности работы предприятия, является достаточно общепризнанной.

Что касается прочих показателей: использование оборотных средств, выход продукции на единицу оборудования, расход электроэнергии на единицу продукции, число рабочих, не выполняющих норм, процент брака и т. п., то они характеризуют лишь какой-то один момент в работе предприятия и потому являются, в известной мере, однобокими. Не всегда ухудшение какого-либо из этих показателей означает действительное ухудшение работы предприятия. Так, если за счет некоторого увеличения затрат оборотных средств, предприятие создало нормальные заделы и запасы материала и, благодаря нормальной равномерной работе увеличило выпуск продукции и другие производственные показатели, то вряд ли это поставят ему в вину. Если предприятие несколько увеличило расход сырья, но за счет этого резко снизило расход электроэнергии, это тоже может быть и неплохо — все зависит от того, в каком соотношении изменились затраты. Если число рабочих, не выполняющих нормы, выросло временно за счет вовлечения в производство новых кадров, это также нельзя рассматривать как отрицательное явление.

Приведем следующий пример. На одном предприятии был уменьшен вес отливки вдвое за счет придания ей формы, более близкой к изделию. Это мероприятие встретило оппозицию литейного цеха, ссылавшегося на неосуществимость его. Причина в том, что показатели цеха — выпуск литья в тоннах, % брака (ввиду сложности формы), затраты на тонну литья и пр. могли только ухудшиться в результате его проведения. Между тем для государства и даже для завода в целом мероприятие, конечно, целесообразно — уменьшится расход металла, последующая обработка в механических цехах, а с ней затраты труда, инструмента, электроэнергии.



Все эти показатели планируются в соответствии с определенным заданием и условиями работы (состав продукции, оборудования, вид сырья и пр.), при каких-либо изменениях в этих условиях все резко меняется и тогда ни выполнение, ни невыполнение заданий плана в отношении этих показателей не позволяет о чем-либо судить.

### Заключение

Произведенный выше анализ показателей работы предприятий с несомненностью устанавливает то, что они обладают весьма крупными дефектами и не удовлетворяют тем основным требованиям полноты, сравнимости и правильности, о которых мы говорили в начале статьи. Именно, эти показатели, как было сказано, не отражают или почти не отражают ряд весьма важных моментов работы предприятия (неиспользование оборудования, омертвление средств в материалах и др.). Не позволяют удовлетворительно производить сравнение работы предприятия для предприятий разных отраслей; одной отрасли, но различно оснащенных; для одного и того же предприятия в разные периоды, при изменении состава продукции или других условий производства.

В результате, суждение о работе предприятия прямо по цифрам показателей является весьма поверхностным и неправильным, однако часто все же им и ограничиваются. Это положение хорошо известно и поэтому многими авторами указывалось на необходимость неперемennого тщательного анализа показателей и условий их исчисления, по существу направленного на частичное исправление перечисленных выше недостатков\*. Однако такой анализ в том виде, как он в настоящее время дается в отчетах предприятий, приносит мало пользы. Обычно плановики указывают на те поправки и обстоятельства, которые говорят в пользу положительной оценки предприятия, и воздерживаются от упоминания и анализа моментов, которые «невыгодны» для предприятия. Иначе говоря, такое объяснение и анализ являются удобным полем для очковтирательства.

Главное же свидетельство неправильности показателей — то, что они приводят к противоречию интересы отдельных предприятий с интересами народного хозяйства в целом. В частности, не стимулируют таких актуальных задач работы предприятий, как собственное обеспечение сырьем, топливом и электроэнергией; переход от дальнепривозных видов топлива и сырья на местные; экономия и замена дефицитных материалов; выполнение плана по качеству и ассортименту; полное и эффективное использование оборудования — отсутствие его простоев; сокращение омертвления средств в материалах; уничтожение штурмовщины, обеспечение условий работы следующего периода; максимальное уменьшение отходов и использование их.

Наличие таких существенных недостатков в показателях работы предприятий служит определенным тормозом в работе промышленности, а потому делает бесспорной необходимость их пересмотра.

---

\* См., например, Турецкий Ш. Я. Планирование себестоимости. — М.: Госпланиздат, 1941.; Канторович Л. В. Вопросы планирования предприятий. — М.: Госпланиздат, 1941.

Мы не ставим задачей в данной статье указать полностью те изменения, которые нужно произвести в показателях работы. В каком направлении должно, по нашему мнению, идти изменение системы показателей, ясно из приведенного выше анализа недостатков. Однако самый выбор системы показателей существенно зависит от того, насколько значительные изменения будет признано возможным внести в систему учета предприятия.

Некоторые из перечисленных недостатков могут быть устранены без особого труда, как, например, учет в произведенной продукции движения незавершенной продукции в пределах, предусмотренных планом, чтобы сделать невыгодным для предприятия как «проедание» нормального задела, так и излишнее накопление незавершенной продукции. Также не должен встретить больших трудностей переход к учету объема производства по чистой продукции.

Устранение некоторых других недостатков может потребовать внесения более существенных изменений в показатели (в особенности это относится к учету задалживания оборудования), однако ни один из них не является неустранимым. Несмотря на некоторые трудности, связанные с внесением этих изменений, такая работа является чрезвычайно важной, благодарной и неотложной.

Показатели работы предприятий, хорошо увязанные с государственными интересами, будут правильно ориентировать предприятия, способствовать проведению ими важнейших государственных мероприятий и весьма благоприятно отразятся на их работе.

## Об исчислении общественно-необходимого времени в условиях социалистического общества

Предметом данной работы являются принципы и методы исчисления общественно-необходимого времени в социалистическом обществе вообще и, в частности, в СССР.

Вопрос этот имеет большое теоретическое значение, поскольку через общественно-необходимое время определяется стоимость, а через нее и другие основные категории политической экономии социализма. Этот вопрос имеет и непосредственно-практическое значение для советского хозяйства, так как методология определения общественно-необходимого времени играет первостепенную роль для правильного решения вопросов использования и экономии общественного труда.

Таким образом, данная работа относится к теории стоимости при социализме, однако она касается главным образом одной стороны проблемы стоимости, именно, вопроса количественного ее определения.

Мы хотим сразу же подчеркнуть особое значение этой стороны вопроса при изучении стоимости именно в социалистическом обществе.

При анализе капиталистической экономики детали методологии количественного определения стоимости для отдельных видов продукции не играли такой существенной роли и, в частности, им не уделено большого места в «Капитале» Маркса. По ряду вопросов, скажем, о приведении сложного труда к простому, Маркс ограничивается лишь принципиальными указаниями. Конечно, он оставляет в стороне эти вопросы не случайно, а совершенно сознательно.

Прежде всего предметом и целью анализа Маркса было вскрытие основных законов капиталистического общества, его эксплуататорской сущности, тенденций. И здесь не было надобности входить в вопросы детального количественного определения общественно-необходимого труда для отдельных видов продукции, а вполне достаточно было общего разрешения указанных вопросов. Более того, как указывает К. Маркс, увлечение количественной стороной дела и сосредоточение на ней может отвлечь от социального анализа, затуманивать эксплуататорскую сущность капиталистического общества («Капитал», т. 1, стр. 42, примечание). С другой стороны, в условиях стихийного капиталистического общества такой точный количественный анализ невозможен.

«Вообще при капиталистическом производстве всякий общий закон осуществляется лишь как господствующая тенденция, весьма запутанным и приблизительным образом, как некоторая средняя постоянных колебаний, которая не может быть точно установлена» («Капитал», т. 3, стр. 146).

Напротив, нет никаких причин, делающих невозможным точный количественный анализ экономических соотношений, определяющих стоимость в плановом социалистическом обществе. При этом не только имеется возможность такого анали-

за, но и актуальная потребность в нем, так как анализ общественно-необходимых затрат труда должен служить базой экономического расчета при рассмотрении конкретных задач социалистической экономики.

Иначе говоря, такой количественный анализ стоимости должен явиться важнейшим орудием при практическом решении вопросов советского хозяйства. Поэтому здесь нельзя ограничиться принципиальным определением стоимости, а нужно до конца выяснить и количественную сторону вопроса. Уместно в этой связи напомнить о том исключительном внимании к цифрам и методам цифрового анализа, которое постоянно проявляет тов. Сталин, когда речь идет о проблемах социалистической экономики.

Однако, несмотря на теоретическую важность и практическую актуальность, проблема общественно-необходимого времени в социалистической экономике не наша должного отражения в нашей экономической литературе.

Это следует объяснить, с одной стороны, недостаточным вниманием к общим проблемам социалистической экономики и, в особенности, к проблеме стоимости, связанным с имевшими хождение неправильными и вредными взглядами об отрицании политэкономии как науки в социалистическую эпоху, о том, что будто бы закон стоимости преодолен в СССР. С другой стороны тем, что теоретические исследования в области политической экономии часто были отделены от реальных проблем советской экономики, и насущные нужды ее игнорировались в этих исследованиях. В практической деятельности широко практиковалась подмена общественно-необходимого времени средней фактической затратай его. Недопустимость и вредность такой подмены детально разбирается ниже.

Между тем имелись все необходимые источники и предпосылки для разрешения данной проблемы. Правда в работах Маркса отсутствуют детальные формулировки и правила исчисления количества общественно-необходимого труда в случае социалистического общества, и «было бы смешно требовать, чтобы классики марксизма выработали для нас готовые решения на все и всякие теоретические вопросы, которые могут возникнуть в отдельной стране через 50 лет» (И. Сталин, Вопросы социализма, стр. 6).

Но в них дано гораздо более важное — метод исследования экономических явлений и классический образец его — детальный анализ капиталистического общества.

И эти образцы и методы исследования с полным успехом могут применяться и к исследованию проблем социалистического общества, если их применять действительно, с конкретным учетом иной обстановки и иных задач исследования. Блестящие образцы такого творческого владения методами марксизма даны Лениным и, особенно, тов. Сталиным, в работах которого содержится принципиальное разрешение всех основных проблем экономики социализма, в частности, и рассматриваемой. Эти указания тов. Сталина являются основным руководящим источником.

Наконец, очень важным является теоретическое осмысливание и использование 25-летнего опыта советской экономики и учет ее потребностей и задач.

В этих источниках можно найти принципиальное разрешение вопроса об определении и методологии исчисления общественно-необходимого времени. Целью данной работы является лишь более детальное исследование количественной стороны вопроса, т. е. методологии фактического определения этого времени в различных условиях.

В § 1 и 2 мы развиваем более детально постановку вопроса и выявляем принципиальный подход к его разрешению. В последующих параграфах мы даем методы исчисления общественно-необходимого времени, особенности его исчисления в различных условиях. Попутно устанавливаем связь понятия общественно-необходимого времени с другими экономическими категориями, а также значение и способы применения его в экономическом расчете.

### § 1. Общие положения

Как говорит К. Маркс, «при всяких условиях то рабочее время, которого стоит производство средств существования, должно было интересовать людей, хотя и не в одинаковой степени, на разных ступенях развития» («Капитал», т. 1, стр. 33). Знание этого времени чрезвычайно важно в плановом социалистическом обществе, которое заинтересовано в максимальной экономии общественного труда, позволяющей обеспечить наилучшее удовлетворение потребностей.

При этом, так как производимый в социалистическом обществе продукт есть продукт общественный, а его распределение и оценка не сводятся к техническим бухгалтерским операциям, но представляют акты общественно-экономического характера, то для нас оказывается существенной общественная оценка необходимых затрат труда, соответствующая экономической категории стоимости. Конечно, последняя лишена ряда черт и проявлений специфической стоимости товарно-капиталистического общества и имеет в то же время свои особенности и проявления. Мы не останавливаемся подробнее на этом, так как работа не ставит задачей общее исследование проблемы стоимости в социалистическом обществе, а лишь вопросы исчисления ее.

Определение общественно-необходимого времени, принадлежащее Марксу, вполне применимо и в случае социалистического общества. Это определение, как известно, гласит: «Общественно-необходимое время есть то рабочее время, которое требуется для изготовления какой-либо потребительной стоимости при общественно-нормальных условиях производства и при среднем в данном обществе уровне умелости и интенсивности труда» («Капитал», т. 1, стр. 5).

Это общественно-необходимое время не есть нечто постоянное, а оно представляет величину, изменяющуюся с изменением производительной силы труда; последняя «определяется многосложными обстоятельствами, между прочим, средней степенью искусства рабочего, уровнем науки и степенью ее технологического применения, общественной комбинацией производственного процесса, размерами и дееспособностью средств производства и, наконец, природными условиями» (там же, стр. 5).

Таким образом, общественно-необходимое количество труда должно определяться для данного момента, для данной обстановки и условий. Однако непосредственно его количество не может быть найдено. Фактически почти ни один вид продукции не производится при нормальных, средних условиях. В действительности даже одна и та же продукция производится при различной степени вооруженности: металлическое изделие на автоматических станках и на универсальных станках для механической обработки, пахота — трактором и лошадьёю и т. п.; при

различной степени благоприятности естественных условий, например, фонтанирующие скважины и малодебитные, различная плодородность земли и т. д. Еще более разнятся условия производства разных видов продукции. И реально мы имеем возможность определить именно затраты труда, необходимые для данных конкретных условий труда, отклоняющихся от идеальных средних.

Однако стоимость должна быть единой для единицы продукции данного вида независимо от того, как именно она произведена, так как «каждая единица выступает лишь как средний экземпляр своего рода»<sup>1)</sup>.

Таким образом, стоимость определяется не количеством затраченного конкретного труда, а воплощенным в продукции абстрактным общественно-необходимым трудом.

Основной количественной проблемой в данном вопросе и является правильное выведение на основании знания затрат конкретного труда количества общественно-необходимого труда для производства единицы продукции. Или, иначе говоря, задача приведения конкретного труда, примененного в определенных условиях, к абстрактному труду — выражения через него. Эта проблема является далеко не простой и заслуживает внимательного исследования.

Итак, имеется ряд способов производства данной продукции в различных природных условиях, с различной технической вооруженностью и соответственно различной трудоемкостью. Как должно определиться общественно-необходимое время?

Руководящее принципиальное указание по этому вопросу мы находим у тов. Сталина, оно дано при решении не тождественного с данным, но сродного вопроса. Рассматривая вопрос об установлении новых технических норм с учетом результатов работы стахановцев, тов. Сталин говорит, что нельзя взять эти результаты за нормы, так как они будут нереальны. Нормы должны быть взяты где-то посередине между нормами, достигнутыми передовыми стахановцами, и нормами, прежде действовавшими, а также средней фактической производительностью (Речь на Первом Всесоюзном совещании стахановцев, Вопросы ленинизма, Изд. 11, стр. 503). Таким образом, нормы должны быть реальны, но в то же время должны звать вперед. Должны быть выбраны так, чтобы они наилучшим образом отвечали поставленным задачам, не тормозили работу промышленности, а помогали ей.

Можно ли определять общественно-необходимый труд в соответствии со способом производства продукции при наиболее благоприятных условиях, наиболее совершенной технике и соответственно наименьших затратах? Как правило, нельзя, потому что такой способ обычно нереализуем полностью, — это будет отрыв от реальности, маниловщина. При этом, даже если по отношению к данной продукции такой способ и реализуется полностью, нельзя определять общественно-необходимое время по затратам в этом способе, так как такую высокую мерку невозможно будет выдержать по отношению к другим видам продукции. Тем более недопустимо определять общественно-необходимое время по производительности в наилучших условиях.

---

<sup>1)</sup>Мы имеем в виду, конечно, что речь идет о единице продукта в одном и том же пункте.

Многие считают, что стоимость может быть получена непосредственным подсчетом средних фактических произведенных затрат труда и что этим поставленный вопрос принципиально решается до конца. Мы показываем несостоятельность этой точки зрения в самом тексте работы. Однако считаем полезным тотчас же отметить те трудности и противоречия, к которым она приводит, чтобы показать, что эта эмпирическая точка зрения далеко не дает приемлемого решения вопроса.

Это решение является неприемлемым, прежде всего, по теоретическим соображениям. Во-первых, далеко не все фактически производимые в настоящий момент затраты труда для получения продукции являются рациональными, а потому общественно-необходимыми.

Во-вторых и главное, фактические затраты труда происходят в условиях, отклоняющихся от нормальных и сильно отличающихся одни от других. Поэтому получаемые цифры, по существу, выражены в различных единицах — часах труда, соответствующих разным условиям. Неучет этих различий внесет недопустимую уравниловку. Нельзя считать равноценными час труда землекопа, работающего в условиях, соответствующих чуть ли не каменному веку, и час труда рабочего, обслуживающего современной автоматический станок<sup>2)</sup>. В действительности эти часы несопоставимы, тем более недопустимо их сложение, сравнение и т. д.<sup>3)</sup> При этом недостаточно внесение поправки только на квалификацию рабочего без учета остальных условий, которые фигурируют в приведенном выше определении нормальных условий труда, принадлежащем К. Марксу.

Практическое применение такого подхода также встречает ряд трудностей. Затраты труда на единицу продукции могут различаться чуть ли не в десять раз для различных фактически применяемых способов работы, например, при механизированном производстве земляных работ и выполнении их вручную. Выводить при этом отдельно среднюю стоимость работ, выполняемых вручную и механизированным способом, нельзя — это будет противоречить понятию стоимости: раз продукция одна и та же, то и стоимость ее должна быть единой.

Необходимо их объединять. При этом результат будет зависеть от соотношения долей того или другого способов производства. Это соотношение может быть весьма различным даже для двух близких видов продукции, что может привести к противоречивым результатам. Например, более калорийный уголь, добываемый с полной механизацией, может получить меньшую стоимость, чем менее калорийный. Для пахоты, проводимой в основном тракторами, может оказаться чуть ли меньшая трудоемкость, чем для боронования, если оно производится главным образом на конной тяге. Установление стоимости, исходя отсюда, противоречит здравому смыслу — более трудная и сложная работа должна иметь большую стоимость, а не меньшую.

Далее, при нахождении средних затрат труда необходимо какое-то объединение продукции по видам или родам, степень которого может быть весьма различной,

<sup>2)</sup>Это также недопустимо, как если бы в техническом проекте одни длины брались измеренными в сантиметрах, другие — в дюймах, третьи — в вершках и полученные цифры вводились в расчет без перевода всех единиц в одну.

<sup>3)</sup>Мы имеем в виду здесь не различия, связанные с квалификацией и интенсивностью труда, а именно различия в условиях труда — в уровне применяемой техники.

например нахождение стоимости для каждого вида и сорта угля, для основных сортов, вообще, для угля или для условного топлива. Выбор такого объединения крайне условен, а от него очень сильно зависит значение средней трудоемкости. Наконец, очень часто интересно установление общественно-необходимого труда при проектировании производства продукции, когда неизвестно еще распределение по возможным способам доли выполнения данной работы.

Однако даже если эти средние затраты труда как-то выведены, дадут ли они то, что требуется — действительно ли они способны правильно и точно отражать общественные затраты труда? Можно ли ими пользоваться для решения вопросов об экономии общественного труда? На эти вопросы приходится ответить отрицательно — во многих случаях эти величины явно не отражают правильно затрат общественного труда. Достаточно рассмотреть такой характерный пример.

В довоенное время торф в Ленинграде имел большую себестоимость (полную), требовал больших затрат труда, чем донецкий уголь (включая и его себестоимость и затраты на транспорт)<sup>4</sup>. Казалось бы, отсюда можно было сделать заключение, что экономически правильно было бы отказаться от использования торфа и перейти на уголь, что в результате должна получиться экономия общественного труда? Между тем такое заключение было неправильным. Следовательно, просто по фактическим непосредственным затратам труда нельзя судить об экономии общественного труда. Причина в том, что эти цифры не отражают полно и правильно все общественные затраты труда. Чтобы показать это, проанализируем этот пример детальнее. Замена торфа углем была бы экономически нецелесообразной по той причине, что это увеличило бы загрузку железнодорожной сети дополнительными перевозками угля, что заставило бы сократить перевозки ряда других грузов. Последнее имело бы результатом значительные потери в других отраслях хозяйства. Только присоединяя эти потери к затратам на транспортировку и добычу угля, мы получим полные общественные затраты на уголь, которые окажутся большими, чем на торф, и потому мы должны отвергнуть замену торфа углем. Таким образом, непосредственные затраты труда на добычу и транспорт угля, определяющие его себестоимость, не дают полностью объема затрат общественного труда, связанных с увеличением его использования, так как не включают косвенных затрат в других отраслях, возникающих в результате этого, которые в советском хозяйстве нельзя не учитывать. Игнорирование этих затрат и неполный учет общественного труда, как видим, может дезориентировать при экономическом расчете.

Из всего сказанного ясно, что подмена общественно-необходимого времени фактически затрачиваемым при используемых способах производства также недопустима.

Итак, в соответствии с приведенным выше указанием тов. Сталина, общественно-необходимое время должно быть установлено где-то посередине между затратами в различных возможных способах. Иначе говоря, при приведении конкретного труда к абстрактному коэффициент приведения должен быть взят меньше еди-

---

<sup>4</sup>Мы считаем, что соотношение затрат труда на торф и уголь примерно соответствуют соотношению их себестоимостей. В обоих случаях количество берем измеренным в единицах условного топлива.



ницы, если условия труда ниже средних общественных, и больше единицы, если эти условия особенно благоприятны — выше средних общественных. При этом решающее значение для суждения о правильности такого приведения должно иметь соответствие его нуждам и требованиям советской экономики. При этом так как определение общественно-необходимого времени и применения его имеют основное значение в вопросах использования и экономии общественного труда, то критерием правильности такого исчисления должна быть возможность правильного решения указанных вопросов на основе полученных цифр<sup>5)</sup>.

Следует сказать, что это проявление и роль стоимости, как орудия правильного распределения общественного труда, часто недооценивается, в то время как в условиях социалистического общества это, пожалуй, важнейшее ее проявление.

## § 2. Основные условия исчисления общественно-необходимого времени

Для дальнейшего уточнения порядка определения общественно-необходимого времени нужно отметить и подчеркнуть некоторые положения, которые особенно существенно учитывать. Следует сказать, что они представляют, собственно, лишь развитие приведенного выше основного определения Маркса.

*А. При определении общественно-необходимого времени должны учитываться затраты труда на данную работу в конкретных условиях в общем плане.*

Иначе говоря, должны учитываться наличные природные условия, достигнутый уровень техники, наличная производственная база и наличные возможности ее расширения. Данная работа или производство данного вида продукции должно рассматриваться *не изолированно и оторванно от прочих, а в общем плане на фоне других работ.*

Это положение с предельной ясностью дано в приведенной выше цитате К. Маркса. Точно так же необходимость установления плановых показателей в соответствии с конкретными условиями постоянно подчеркивалась тов. Сталиным. Например, по вопросу о нормах: «Новые люди, новые времена, новые технические нормы» (Вопросы ленинизма, стр. 503).

*Б. Должны приниматься во внимание только затраты труда, которые необходимы, т. е. рациональны для общества в данных условиях.* Иначе говоря, должны учитываться общественные затраты труда в тех способах выполнения работ, для которых эти затраты наименьшие, но, конечно, при этом берутся в расчет только способы, осуществимые в данных условиях. Связано это с тем, что в социалистическом обществе рациональный план является реальностью, и неустрашимых потерь нет (в отличие от капиталистического общества).

Мы хотим подчеркнуть, что сказанное отнюдь не следует понимать так, что необходимыми являются затраты труда только при применении наиболее совершен-

---

<sup>5)</sup> Чтобы пояснить значение цели введения понятия и его применение для определения понятия, приведем такой пример. Скорость снаряда во время его полета — величина переменная. Беспредметным, однако, является спор о том, какую именно скорость следует считать главной или истинной. Если нужно рассчитать отдачу орудия — важна начальная скорость, пробивную способность снаряда — конечная, время полета и некоторые другие данные — средняя скорость.

ных из используемых или известных способов выполнения данной работы. В действительности, в конкретной обстановке может оказаться нужным и оправданным применение далеко не самого совершенного способа. В таких случаях затраты труда следует все равно признать необходимыми с точки зрения общества (к вопросу о том, как точно они должны учитываться, мы вернемся ниже).

Так, в военное время в условиях недостатка горючего оказывалось целесообразным применение в ряде случаев конной вспашки вместо тракторной, а иногда даже вскапывание вручную, хотя нормы выработки в последнем случае чуть ли не в 100 раз ниже по сравнению с тракторной вспашкой. Несмотря на такую выработку, день работы на вскапывании в колхозах засчитывался за трудодень.

Таким же образом, несмотря на то, что себестоимость электроэнергии и ее конечная трудоемкость на заводских станциях в несколько раз выше, чем на районных, в условиях недостатка электроэнергии оказывалось нужным использовать и их. Конечно, такие увеличенные затраты труда следует признать необходимыми, только если они действительно вызывались требованиями обстановки. Так, нельзя было бы признать общественно-необходимыми затраты труда на вскапывание вручную, если бы в том же колхозе имелась незанятая лошадь или трактор, обеспеченный горючим. Таким же образом не был бы необходим повышенный расход топлива на заводских станциях, если бы районная была незагружена.

*Таким образом, при исчислении общественно-необходимого труда следует принимать во внимание затраты труда в рациональном производственном плане.*

*В. Должны учитываться полные общественные затраты труда.*

Именно, необходимо учитывать не только видимые затраты труда на данную работу, но и то влияние, которое оказывает избранный способ ее выполнения на необходимые затраты для других видов работы. Это вытекает из того, что социалистическое, в частности, советское хозяйство является единым.

Действительно, нередко мы создаем благоприятные условия для выполнения данной работы и уменьшаем непосредственно связанные с ее выполнением затраты труда за счет других работ, увеличивая необходимые затраты труда для их выполнения. В таких случаях правильный выбор способа производства работы и определение необходимых затрат труда возможно, только если производить сравнение общих суммарных затрат. В противном случае, если не учитывать этого влияния, может получиться однобокое, антигосударственное решение или неправильные исходные данные для решения. Только при учете полных затрат общественного труда можно получить цифры, приводящие к правильным выводам в вопросах использования общественного труда. «Рентабельность нужно брать в общегосударственном масштабе в разрезе нескольких лет» (Сталин. — «Вопросы ленинизма». — С. 383).

Поясним сказанное примером. Сравнивая затраты на производство электроэнергии на заводской электростанции с затратами на районной ТЭЦ, можно прийти к выводу, что мы получим уменьшение затрат и общественную экономию труда, отказавшись от использования заводской электростанции. Между тем такой вывод будет неправилен в условиях напряженного электробаланса. Мы избежали бы такого неправильного вывода, если бы принимали во внимание полные затраты общественного труда. Именно, в условиях полной загрузки районной ТЭЦ мы смогли

бы получить ток для замены работы заводской станции только за счет других потребителей. А тогда, учитывая полные общественные затраты, нужно было бы *к затратам на производство этой электроэнергии на ТЭЦ присоединить те потери, которые понесут другие потребители* в результате лишения их или сокращения им отпуска электроэнергии.

Г. При исчислении общественно-необходимого времени должны учитываться затраты труда в нормальных средних условиях труда. Именно, так как мы считаем, как это делает Маркс, что во всех случаях труд простой, а квалифицированный приведен к нему (механизма приведения мы здесь не касаемся)<sup>6)</sup>, то средний труд означает, что имеются в виду средние условия труда. Иначе говоря, считается, что труд средне обеспечен благоприятными природными условиями и средне вооружен технически. Это необходимо постоянно учитывать. Приравнивать затраты труда мы можем, только если они произведены в одинаковых условиях. При увеличении ресурсов труда средние условия будут сохранены, только если соответственно возрастет вооруженность и обеспеченность его.

Отдельные виды продукции производятся при условиях, отличных от средних, поэтому затраты труда для них должны приводиться к средним. Весь возможный выпуск продукции производится при средних условиях труда, поэтому стоимость этой продукции измеряется полными затратами труда, ибо *труд — единственный источник стоимости*. Напротив, по отдельным предприятиям и видам продукции произведенная стоимость (исчисляемая в среднем труде) может существенно отличаться от фактических и плановых затрат конкретного труда.

Резюмируя, можно сказать, что при исчислении общественно-необходимого времени нужно принимать во внимание полные рациональные затраты общественного труда, которые требуются для производства единицы продукции с учетом общего плана и при сохранении средних условий труда.

В соответствии с этими основными положениями, при исчислении общественно-необходимого труда для некоторой работы нужно исходить из минимальных затрат среднего труда, необходимых для выполнения ее в данных условиях. При этом в случае, когда выполнение ее может заставить изменить способ выполнения других работ, необходимо принимать в расчет то конечное увеличение затрат общественного труда, которого потребует выполнение данной работы.

Такой подход соответствует и реальным условиям, в которых приходится решать вопросы общественной экономии труда при экономическом расчете и планировании. Так, при возможности замены в плане одной работы другой, например, постройки металлического моста вместо каменного, существенна экономия общественного труда, которая получится в результате снятия первой работы и затраты, которых потребует включение второй. И именно правильный подсчет общественно-необходимого труда должен дать средство для решения подобных вопросов в соответствии с общегосударственными интересами.

При этом указанное применение и проявление стоимости является важнейшим ее проявлением в условиях социалистического общества и проверкой ее значения.

---

<sup>6)</sup> Таким образом, всюду в дальнейшем труд рассматривается одинаковой квалификации и равной степени интенсивности.

В товарно-капиталистическом обществе общественно-необходимый труд возникает и определяется в процессе производства, но проявляется в процессе обмена, где проявляется и закон стоимости, и цен производства. «Товары суть непосредственно продукты обособленных независимых работ, которые через свое отчуждение в процессе частного обмена должны доказать свой характер всеобщего общественного труда». (Маркс и Энгельс, Сочинения, т. 12, ч. 1, стр. 70).

*В социалистическом обществе стоимость также возникает в процессе производства, но проявляется главным образом в процессе сознательного распределения общественного труда.* И проверяется правильность ее определения тем, позволяет ли она правильно решать вопросы использования общественного труда. Этот момент является важным средством исследования количественных соотношений, определяющих общественно-необходимое время<sup>7)</sup>.

В соответствии с этим примерами и моделями для исследования будут служить у нас вопросы использования и экономии общественного труда на социалистическом предприятии. При этом, конечно, в этих примерах задачу определения общественно-необходимого времени и приведения конкретного труда к абстрактному (среднему) можно разрешить только частично. Именно, приведение производится к среднему труду для данного участка социалистического хозяйства. Однако подобно тому, как в товарном хозяйстве всеобщая и денежная форма стоимости имеют источником более простые формы стоимости, и у нас стоимость и общественно-необходимое время для общества в целом имеют источником производственные условия и план на отдельных участках социалистического хозяйства. Поэтому отсюда и следует начинать исследование.

В § 3 и 4 мы рассматриваем простейшие случаи определения общественно-необходимого времени, успешно разрешаемые обычными приемами. В § 5 и последующих рассматриваются более сложные случаи, требующие более специальных методов.

### **§ 3. Первый простейший случай определения общественно-необходимого времени (отсутствие препятствий для применения наилучшего из возможных способов производства для каждого вида продукции)**

Мы рассмотрим тот простейший случай определения общественно-необходимого времени, когда для каждого вида продукции отсутствуют препятствия (постоянные или временные) для применения наилучшего из возможных способов производства — способа, требующего минимальных затрат труда. Мы остановимся на этом случае, хотя исчисление общественно-необходимого времени здесь совершенно очевидно и бесспорно, только для того, чтобы отметить некоторые важные свойства измерения продукции через общественно-необходимое время, а также роль и применение этих оценок в условиях социалистического хозяйства.

---

<sup>7)</sup>Поясним эту мысль таким примером. Режим температуры при термообработке может быть назначен и осуществлен любой. Однако законы и правила назначения этого режима определяются тем, чтобы термообработка оказалась успешной. Подобно этому и цены в советском хозяйстве хотя и назначаются, но их назначение управляется определенными объективными законами.

Итак, мы рассматриваем случай, когда те благоприятные условия труда, которые вообще есть в данной обстановке, все имеются в достаточном размере. Таким образом, по отношению ко всему объему каждого вида продукции может быть применен тот из возможных в данных условиях способ ее изготовления, который требует наименьших затрат труда на единицу продукции. В этом случае названные количества труда и представляют общественно-необходимое время для каждого вида продукции.

В данном случае способ производства одного вида продукции не влияет на выбор способов производства другого ее вида. Поэтому общественно-необходимое время для каждого вида продукции может определяться изолированно подсчетом прямых затрат на ее производство. Необходимо оговориться, что под прямыми затратами мы разумеем не только затраты, произведенные при изготовлении самой данной продукции, но и затраты на сырье, инструменты и оборудование, исчисленные на единицу продукции. Отметим также, что мы всюду имеем в виду простой, неквалифицированный труд.

Таким образом, в данном случае, по существу, отсутствует проблема приведения, если ее рассматривать для данного участка — количество абстрактного труда совпадает с конкретным.

Отметим важное свойство исчисленного значения о. н. времени и связанного с ним измерения продукции в труде. Это время реально, а построенное на нем измерение продукции реализуемо. Иначе говоря, увеличение выпуска продукции возможно и потребует на единицу продукции дополнительной затраты труда именно в указанном размере. Наоборот, снятие с производства каждой единицы продукции дает экономию труда также в размере, соответствующем ее измерению. Действительно, как для дополнительно произведенной, так и для снятой с производства единицы продукции, применяется именно тот способ производства, по которому определено общественно-необходимое время (а на затратах труда на другие виды продукции изменение объема ее выпуска не сказывается). Таким же образом возможна замена в плане выпуска одной продукции другой, в соотношении, определяемом общественно-необходимыми затратами труда, так как труд, высвобожденный при снятии одной продукции, может быть направлен на выпуск другой.

Наконец, ясно, что, благодаря этим свойствам, измерение продукции, данное в труде, может быть использовано для решения следующих вопросов:

1) О возможном изменении в составе и объеме программы. Необходимое увеличение или уменьшение затрат труда подсчитывается путем сравнения суммарных затрат труда на все виды продукции.

2) В вопросах изменения способов производства. Достаточно сравнить затрату труда по вновь предлагаемому способу с действующей общественно-необходимой затратой труда. Если она меньше — новый способ целесообразен, в противном случае — нет.

3) В вопросах использования продукции. Если при использовании возможна замена одной продукции другой, то вопрос о целесообразности замены решается сравнением необходимых затрат труда на ту и на другую продукцию.

Поясним сказанное рассмотрением примера:

ПРИМЕР 1. В мастерской работают слесари одной квалификации. Инструментом они обеспечены. Производится три детали: на 1-ю деталь требуется 2 часа, на 2-ю — 4 часа, на 3-ю — 6 часов при наилучшем способе. Например, обработка 1 детали возможна на станке А — требует 3 часа, на станке Б — требует 2 часа. Нет причин, не позволяющих применять второй способ, поэтому и принято время на ее обработку, равное 2 часам. Эти числа и дают общественно-необходимое время и измерение продукции в данных условиях. Приведем примеры применения этих оценок.

а) Прежняя программа была: 1-х деталей — 100, 2-х — 50, 3-х — 20 в день и она была реализуема.

Новое задание: 1-х деталей — 200, 2-х — 10, 3-х — 10, выполнимо ли оно?

Прежнее задание требовало  $100 \times 2 + 50 \times 4 + 20 \times 6 = 520$  часов, новое:

$$200 \times 2 + 10 \times 4 + 10 \times 6 = 500 \text{ часов.}$$

Следовательно, последнее задание может быть перевыполнено на 4%.

б) Предложен способ одновременной обработки 2-й и 3-й детали. На обе детали требуется 8 часов. Целесообразно ли его применение?

Измерение продукции двух деталей 2 и 3, равное  $4 + 6 = 10$  часов, выше затрат труда в предлагаемом способе, следовательно, применение его, по крайней мере к части выпуска продукции, оправданно.

в) При использовании возможно в некоторых случаях три 2-х детали заменить одной 3-й и двумя 1-ми. Целесообразна ли такая замена? Затраты труда в первом случае  $3 \times 4 = 12$  часов. Во втором случае  $2 \times 2 + 6 = 10$  часов. Замена целесообразна.

Следует в заключение сказать, что те простейшие условия, которые мы рассматриваем в данном параграфе, фактически почти никогда не встречаются. Наиболее благоприятные возможные условия для работы имеются обычно на данный момент в ограниченном количестве. Поэтому часто приходится отказываться от использования наиболее подходящего станка, так как он занят под другую продукцию, отказываться от использования наилучшей земли, так как она нужна для другой культуры и т. д. Также нет независимости в необходимых затратах труда на разные виды продукции. Высвобождая станки для данной работы, мы увеличиваем затраты труда на другую и т. п. Взаимозависимость условий производства различных видов продукции в особенности велика в современной индустрии, благодаря общим балансам топлива, энергии, транспортных средств, многообразному использованию сырья и оборудования, комплексному выпуску продукции.

Игнорировать это реальное положение вещей недопустимо. В этих же реальных условиях простейший прием подсчета общественно-необходимого времени не оправдан. Поэтому этот прием почти не имеет реального применения, и требуются более сложные приемы подсчета. Мы остановились на нем по методическим соображениям, так как рассмотрение этого идеального простейшего случая показывает, каковы свойства получаемых оценок продукции и их применения и чего нужно добиваться в более сложных случаях.

#### § 4. Второй простейший случай исчисления общественно-необходимого труда. Один вид продукции

Другой простейший случай, к рассмотрению которого мы переходим, это когда имеется всего один вид продукции. Для выпуска его, однако, приходится использовать несколько способов производства, так как мы не можем обеспечить весь выпуск продукции условиями, соответствующими наилучшему способу, связанному с минимальными затратами труда. Так может быть, например, вследствие загруженности наиболее совершенного оборудования, ограниченности природных источников.

В этом случае плановые затраты труда необходимы и воплощены в произведенной продукции, если частичное применение менее совершенных способов работы вынуждено обстановкой. Поэтому количество труда, отнесенное к единице продукции, и дает для данных условий общественно-необходимое время. Иначе говоря, последнее определяется в данном случае средними затратами труда на единицу продукции.

Затраты труда в конкретных условиях не соответствуют этим средним затратам — ниже их при особо благоприятных условиях, и выше — в случае неблагоприятных условий. Сравнение этих затрат труда со средними позволяет определить для данных условий коэффициент приведения конкретного труда к абстрактному (среднему). Этот коэффициент больше единицы в первом из упомянутых случаев и меньше единицы во втором.

Таким образом, уже в этом случае оказывается, что при необходимости использования различных условий и способов производства, лишь в среднем затраты труда соответствуют произведенной стоимости. Конкретно, в одних случаях (при особо благоприятных условиях) произведенная стоимость выше производственной затраты труда, в других случаях — ниже.

Надлежит считать, что в первом случае произведенная стоимость создана частью за счет произведенных в данном месте (видимых) затрат труда, частью за счет затрат труда, произведенных в других местах и обеспечивших (косвенно) для данного места условия труда, более благоприятные, чем средние. Во втором случае, что лишь частью труд идет на продукцию, создаваемую в данном месте, а частью на создание благоприятных условий в других местах.

В этом можно усмотреть некоторую аналогию с тем положением марксистской политэкономии капиталистического общества, что прибавочная стоимость, созданная в данном месте, вообще говоря, не соответствует той прибавочной стоимости, которая присваивается в данном месте (прибыли), а такое соответствие имеет место лишь в среднем.

Поясним сказанное рассмотрением примера<sup>8)</sup>.

**ПРИМЕР 2.** Под рожь может быть отведено 100 га хорошей земли и более 200 га обыкновенной. Урожайность ржи на хорошей земле 100 пудов с 1 га, на обыкновенной — 50 пудов. На обработку одного га требуется 100 дней. Ресурсы труда, предназначенные для этой культуры по плану, — 30 000 дней. Каково в этих условиях общественно-необходимое время для производства пуда ржи?

---

<sup>8)</sup>Во всех приведенных ниже примерах мы рассматриваем задачу приведения конкретного труда к абстрактному (среднему) не по отношению ко всему обществу, а только по отношению к рассматриваемой хозяйственной единице или их комплексу.

Всего может быть обработано в соответствии с плановыми ресурсами труда 300 га земли — 100 га хорошей и 200 га обыкновенной. Следовательно, может быть произведено всего 20 000 пудов.

Относя произведенные затраты труда к объему продукции, получим, что средние затраты труда на один пуд составят:  $30\,000 : 20\,000 = 1,5$  дня.

Полученная величина 1,5 дня и представляет общественно-необходимые (средние) затраты труда. Затраты труда в конкретных условиях разнятся от этой средней цифры. На участке хорошей земли они составляют 1,0 дня на пуд, что отвечает 1,5 дням среднего труда. Следовательно, в данном случае коэффициент приведения 1,5. На участке обыкновенной земли 2,0 дня на пуд, т. е. 3 дня соответствует 1,5 дням среднего труда. Следовательно, здесь коэффициент приведения —  $1,5 : 2 = 0,75$ . На втором участке 1 день конкретного труда = 0,75 дня среднего (абстрактного) труда.

На первом участке произведенная за день труда стоимость, равная 1,5 единицы (дней среднего труда), лишь на две трети (в размере 1 ед.) создана за счет общественного труда на этом участке и на 1/3 за счет труда на втором участке — труда, обеспечившего благоприятные условия. На втором участке за день производится стоимость в три четверти единицы. Таким образом, следует считать, что лишь три четверти затраченного на этом участке труда воплощается в произведенный на нем продукт, а одна четверть идет на обеспечение благоприятных условий труда на первом участке и воплощается в продукт, созданный на последнем участке.

Такое толкование является бесспорным, ибо совокупный продукт есть продукт совокупного труда, и равному, правильно примененному труду должна быть отнесена равная доля продукта<sup>9)</sup>.

Выше говорилось о том, что общественно-необходимое время не есть нечто постоянное, а изменяется с изменением условий.

Поясним это положение на рассматриваемом примере.

**ПРИМЕР 3.** Предположим, что в примере 2 изменились бы условия труда — количество предоставленной для ржи хорошей земли увеличилось со 100 до 200 га.

В этом случае при тех же затратах труда (30 000 дней) было бы произведено 25 000 пудов ржи. Отсюда затраты труда на пуд составят 1,2 дня, т. е. меньше, чем прежде.

### **§ 5. Несколько видов продукции. Основной метод определения общественно-необходимого времени**

Рассмотренные в предыдущих параграфах простейшие приемы определения общественно-необходимого труда непригодны в общем случае, когда имеется несколько видов продукции и когда выбор способа производства одного на них может влиять на способы производства других. Именно, применение первого приема определения общественно-необходимого времени — прямыми затратами труда на

<sup>9)</sup>Поясним эту мысль таким примером. Если некто, встав другому на плечи, сорвал 20 орехов, то бессмысленно будет считать, что продукт труда первого есть 20 орехов, а продукт труда второго — ничто или собственные натертые плечи.



единицу продукции в способах, для которых они минимальны, не оправданно, так как указанные способы не реализуемы для всех видов продукции одновременно.

Применение второго приема — распределения совокупных плановых затрат на произведенную общую продукцию — неосуществимо, так как неизвестно, какую часть времени к какой продукции нужно отнести. Отнести к данной продукции то время, которое затрачивается по плану именно на ее производство, т. е. определять общественно-необходимое время плановыми затратами труда, будет неверно по соображениям, приведенным выше (§ 1).

Подкрепим это рассмотрением двух примеров<sup>10)</sup>.

ПРИМЕР 4. В примере 2, рассмотренном в § 4, предположим, что данная площадь 100 га хорошей земли и 200 га обыкновенной отведена для двух культур: ржи и пшеницы. Их урожайность указана в табл. 1.

Таблица 1

## План посева ржи и пшеницы

Злак	Земля	Урожайность (пудов/га)	Площадь посева (га)	Сбор (пудов)	Затраты труда
Пшеница	Хорошая	75	50	3750	5000
	Обыкновенная	25	—	—	—
Рожь	Хорошая	100	50	5000	5000
	Обыкновенная	50	200	10 000	20 000

По плановому заданию пшеницы должно быть произведено 3750 пудов, остальное возможное количество — рожь.

Так как для пшеницы использование хорошей земли дает больший эффект — увеличение урожая в 3 раза, в то время как для ржи — в 2 раза, то следует под пшеницу отвести именно хорошую землю. Для получения 3750 пудов пшеницы нужно 50 га хорошей земли. Отводя остальные 50 га хорошей и 200 га обыкновенной земли под рожь, получим ее 15 000 пудов (см. табл. 1).

Итак, с затратой 30 000 дней труда производится 3750 пудов пшеницы и 15 000 пудов ржи. Как произвести распределение затрат? Попытаемся сделать это по отдельности для каждого вида продукции. Для пшеницы получаем затраты на пуд:

$$5000 : 3750 = 1\frac{1}{3} \text{ дня} = 1,33 \text{ дня.}$$

<sup>10)</sup>Мы в качестве иллюстрации берем примеры максимально-примитивного характера для сокращения места и для того, чтобы не отвлекать деталями читателя от некоторых принципиальных моментов, которые могут быть выявлены на этих простых примерах. Излагаемые ниже методы с успехом применимы и к анализу гораздо более сложных случаев, однако вопросы техники применения данных методов выходят за рамки этой работы.

Таким же образом среднее время на производство пуда ржи:

$$25\,000 : 15\,000 = 1\frac{2}{3} \text{ дня} = 1,67 \text{ дня.}$$

Однако принять эти цифры за общественно-необходимое время, конечно, никак нельзя — получим явно нелепый результат. Для пшеницы, производство которой во всех случаях — и на хорошей и на обыкновенной земле — требует большего времени, получается меньшее общественно-необходимое время, чем для ржи: 1,33 дня, вместо 1,67 дня. Такой результат явно нереален, а в вопросах производства и использования продукции может только дезориентировать. Как найти правильное распределение, будет указано ниже.

**ПРИМЕР 5.** В цехе имеется 40 рабочих, из которых 10 работают на высокопроизводительных станках-автоматах, остальные 30 на обычных станках для механической обработки (универсальных). Последние имеются в достаточном количестве. Цех производит детали А и Б в одинаковом количестве. На автомате за день можно обработать три детали каждого вида, на обыкновенном станке — одну. В этих условиях цех может давать 30 деталей А и 80 деталей Б. Фактически работа распределена так, что детали А производятся на автоматах, детали Б на обыкновенных станках (см. табл. 2).

**Таблица 2**

**План производства двух деталей**

	Станок	Производительность	Отведено станков, шт.	Продукция, шт.	Затраты труда
Деталь А	Автомат	3	10	30	10
	Универсальный	1	—	—	—
Деталь Б	Автомат	3	—	—	—
	Универсальный	1	30	30	30

При эмпирическом подходе получается, что раз деталь А производится на автомате, о. н. время для нее  $1/3$  дня, для детали Б, которая обрабатывается на обычных станках, о. н. время — 1 день.

Такой результат весьма случаен и неправилен. Если работа была бы распределена иначе — детали А производились на обычных станках, а детали Б на автоматах, что в данном случае также вполне рационально, то получили бы, наоборот, для детали Б —  $1/3$  дня, т. е. соотношение оценок изменилось бы в 9 раз. Наконец, если бы мы объединили при учете оба вида продукции, принимая во внимание, что по трудности работы между ними нет существенной разницы, то получили бы, что за 40 дней производится 60 деталей. О. н. время должно быть для каждой детали  $40 : 60 = 2/3$  дня. Опять иное решение (последнее решение, впрочем, правильно).

Этот пример особенно наглядно показывает, насколько резко может меняться от незначительных случайных обстоятельств величина о. н. времени, если ее подсчитывать эмпирически, насколько его определение, следовательно, неубедительно и ненаучно.

Таким образом, при эмпирическом подходе задача нахождения о. н. времени не получает удовлетворительного решения. Требуется дать иные методы исчисления, которые приводили бы к правильным, а не к случайным и противоречивым результатам. Мы рассматриваем в этой работе два таких метода. Эти методы дают совпадающие между собой результаты и для тех простейших случаев, которые разобраны в § 3 и 4, с результатами указанных там примеров.

Мы не ограничиваемся одним методом, а приводим второй (ему посвящен § 7) не только потому, что он облегчает фактическое определение величины о. н. времени, но и потому, что в связи с ним в анализ входят некоторые важные понятия и величины.

Первый из этих методов исходит непосредственно из определения понятия общественно-необходимого времени для социалистического общества в том виде, как оно детализировано в § 2. Именно, время, определяемое подсчетом полных рациональных затрат общественного труда, которые требуются для производства единицы продукции с учетом общего плана и при сохранении средних условий труда. Метод состоит в следующем.

Рассматриваем некоторое увеличение ресурсов труда с сохранением средних условий его, т. е. при соответствующем увеличении факторов, повышающих производительную силу труда. Затем определяем, какое количество продукции данного вида может быть получено благодаря этому увеличению ресурсов, если правильно использовать его. Тогда затраты труда, отнесенные к единице продукции, и дают количество среднего труда, необходимого для производства единицы продукции или для данной работы в условиях общего плана, т. е. общественно-необходимое время.

Применения этого метода поясним на приведенных выше примерах.

**ПРИМЕР 6.** Рассмотрим сначала уже разобранный в § 4 случай (пример 2), когда имеется один вид продукции — рожь, и покажем, что в этом случае получается для о. н. времени прежнее значение.

Пусть ресурсы труда увеличатся на 1% — на 300 дней. Так как средние условия труда должны сохраняться, нужно считать, что и благоприятствующие ресурсы изменились таким же образом, т. е. считаем, что прибавилось 2 га хорошей земли (как и выше, считаем, что обыкновенной земли достаточно). Мы можем дополнительно обрабатывать 1 га хорошей и 2 га обыкновенной земли, получим:  $100 + 2 \times 50 = 200$  пудов ржи. Затрата труда —  $11\frac{1}{2}$  дня на пуд ржи, т. е. действительно получаем то же значение, что и раньше.

Пусть теперь мы имеем две культуры — рожь и пшеницу, т. е. находимся в условиях примера 4. При том же увеличении ресурсов на 1% можем получить ржи на 1 га хорошей земли — 100 пудов и на 2 га обыкновенной земли  $2 \times 50 = 100$ , всего 200 пудов. Отсюда о. н. время для пуда ржи  $300 : 200 = 1,5$  дня.

Для пшеницы таким же образом получим, что увеличение ее продукции в соответствии с ее урожайностью будет  $75 + 2 \times 25 = 125$  пудов. Однако из этой

величины исходить нельзя, так как это будет не наиболее рациональная затрата труда. Именно, как мы отмечали выше, при данных условиях более рационально пшеницу сеять на хорошей земле. Поэтому правильно будет 2 га обыкновенной земли отвести под рожь, что позволит высвободить из-под нее (в плане) 1 га хорошей земли. В результате продукция ржи останется неизменной, а на 2 га хорошей земли можно получить  $2 \times 75 = 150$  пудов пшеницы. В соответствии с этим о. н. время для производства пуда пшеницы  $300 : 150 = 2$  дня. (План распределения дан в табл. 3.)

**Таблица 3**  
**Измененный план посева**

Злак	Земля	Урожайность (пудов/га)	Площадь посева (га)	Сбор (пудов)	Затраты труда
Пшеница	Хорошая	75	52	3900	5200
	Обыкновенная	25	—	—	—
Рожь	Хорошая	100	49	4900	4900
	Обыкновенная	50	202	10 100	20 200

**Таблица 4**  
**Общественно-необходимое время**

		Выражено в среднем труде				
		Урожайность (пудов/га)	Стоимость пуда зерна	Стоимость зерна с га	Затраты труда на га	Коэффициент приведения
Рожь	Хорошая земля	100	1,5	150	100	1,5
	Обыкновенная земля	50		75		0,75
Пшеница	Хорошая земля	75	2,0	150	100	1,5
	Обыкновенная земля	(25)		(50)		(0,50)

Исходя из найденных значений общественно-необходимого времени, нетрудно получить и коэффициенты приведения конкретного труда к абстрактному (среднему), см. табл. 4.

Так для ржи на обыкновенной земле имеем: затраты труда — 100 дней, произведенная стоимость  $50 \times 1,5 = 75$  дней (среднего труда), коэффициент приведения — 0,75.

Если мы сравним коэффициенты приведения для ржи и для пшеницы на хорошей земле, мы получим одно и то же значение — 1,5. Это и естественно — труд и условия труда — обеспеченность его в обоих случаях были одинаковыми, отличался только вид производимой продукции. Таким образом, коэффициент приведения конкретного труда к абстрактному определяется именно условиями его. Необходимо сказать, что это верно только в условиях правильного, рационального плана и нарушается при нерациональном использовании ресурсов. Так, если бы мы частично отвели под пшеницу обыкновенную землю, что в данных условиях нерационально, то при затрате труда на 1 га 100 дней произведенная стоимость была бы  $25 \times 2 = 50$  и коэффициент приведения был бы 0,5 вместо нужного значения 0,75. Эти данные для нереализуемого в правильном плане способа изготовления продукции, как ненужные, взяты в табл. 4 в скобки.

**ПРИМЕР 7.** Приведем определение о. н. времени в условиях примера 5 (цех).

Пусть ресурсы труда увеличатся на 10% — на 4 дня, так как средние условия труда должны остаться неизменными, следует считать, что и благоприятствующие условия изменялись таким же образом, т. е. прибавился и один станок-автомат (обыкновенных станков, как сказано, достаточно для обеспечения всех рабочих). На трех обыкновенных станках и одном автомате за день может быть изготовлено 6 деталей А. Поэтому о. н. время для изготовления детали А есть  $4 : 6 = 2/3$  дня. Точно то же самое получим и для детали Б. В соответствии с этим коэффициенты приведения к среднему труду будут равны:  $2/3 = 0,67$  для обыкновенного станка и 2 — для автомата.

## **§ 6. Свойства и применения оценок продукции, определяемых общественно-необходимым временем**

Общественно-необходимое время определяет оценки для единицы каждой продукции в данных условиях. Мы покажем, что для оценок, которые определяются указанным выше методом, сохраняются в основном те свойства и применения, которые были отмечены для простейшего случая (§ 3). Это лишний раз будет свидетельствовать о правильности и полезности такого метода их исчисления.

Оценки продукции через о. н. время конкретны и динамичны. Будучи построены для определенной обстановки и условий, они могут изменить свои абсолютные и относительные значения с изменением в этих условиях: при изменении производительности простого труда, при изменении ресурсов — условий, благоприятствующих производительной силе труда (производственной базы), и тем самым при изменении производительной силы среднего труда, при изменении применяемых способов производства. В частности, необходимость такого изменения может оказаться связанной с изменением состава продукции в плане.

Пример изменения оценки при изменении ресурсов мы приводили в § 4 — увеличение количества отведенной хорошей земли со 100 до 200 га (улучшение условий труда) снизило о. н. время для пшеницы с 1,5 дней до 1,2. Зависимость от изменения способов производства, с которыми непременно связано изменение затрат труда, настолько понятна, что не нуждается в иллюстрации примером. Приведем пример влияния состава продукции.

ПРИМЕР 8. Пусть на том же участке (пример 4 — колхоз) задание по пшенице не 3750 пудов, а 9000 пудов. В таком случае недостаточно даже всю хорошую землю отвести под пшеницу — это даст 7500 пудов, а остальные 1500 пудов придется получить с 60 га обыкновенной земли ( $60 \times 25 = 1500$ ).

На остальных 140 га обыкновенной земли получим  $140 \times 50 = 7000$  пудов ржи (табл. 5).

Таблица 5  
План посева при другом задании

Злак	Земля	Урожайность (пудов/га)	Площадь посева (га)	Сбор (пудов)	Затраты труда
Пшеница	Хорошая	75	100	7500	10 000
	Обыкновенная	25	60	1500	6000
Всего				9000	16 000
Рожь	Хорошая	100	—	—	—
	Обыкновенная	50	140	7000	14 000
Всего				7000	14 000

Пользуясь тем же способом, что и выше, можем найти о. н. время и в данном случае. Для пшеницы при увеличении на 300 дней ресурсов труда и на 1 га хорошей земли получим ее  $75 + 2 \times 25 = 125$  пудов. Отсюда о. н. время для пуда пшеницы  $300 : 125 = 2,4$  дня. Для ржи, отводя 1 га хорошей земли под пшеницу и высвобождая за счет этого 3 га обыкновенной земли, а также на 2 га добавляемой обыкновенной земли, получим  $5 \times 50 = 250$  пудов ржи, откуда о. н. время для пуда ржи  $800 : 250 = 1,2$  дня.

Таким образом, о. н. время для пшеницы возросло и абсолютно и по сравнению с соответствующим временем для ржи. Это и естественно — увеличение программы по пшенице заставило использовать для ее производства и обыкновенную землю, где условия не только абсолютно, но и относительно менее благоприятны. Коэффициенты приведения в этом случае также другие: для труда на хорошей земле — 1,8, на обыкновенной — 0,6 (подсчет произведен, как и выше).

Отметим теперь другое свойство этих оценок.

При небольших изменениях в условиях и обстановке абсолютные значения оценок, определяемых о. н. временем, и их соотношения, как правило, меняются незначительно, т. е. эти оценки обладают известной стабильностью (устойчивостью).

Благодаря этому, при сравнительно небольших изменениях в плане, не меняющих его коренным образом, оказывается возможным использовать прежние зна-

чения этих оценок и не учитывать тех вариаций в соотношении оценок, которые будут связаны с упомянутыми изменениями в плане.

Наконец, очень важное свойство — реальность соотношений, определяемых оценками через о. н. труд. Именно, одна продукция может заменяться в плане другой в соотношении, определяемом этими оценками. Это верно, по крайней мере, по отношению к небольшим по сравнению с общим объемом количества продукции каждого вида, таким, что указанное изменение программы не меняет условий его коренным образом и не вызывает тем самым существенного изменения в соотношениях оценок. Данное положение вытекает из того, что снятие с плана некоторого количества единиц одной продукции позволит высвободить количество среднего труда, определяемое через о. н. время для данной продукции, а с затратой этого труда может быть произведена другая продукция также в количестве, исчисленном через о. н. время.

Проиллюстрируем реальность оценок на примере.

ПРИМЕР 9. Вернемся к условиям примеров 2 и 4 (колхоз). Мы имели для пшеницы и ржи оценки, соответственно равные 2 дням и 1,5 дням — соотношение 4 : 3. И действительно, в соответствии с этим можно в плане заменить, скажем, 300 пудов пшеницы на 400 пудов ржи или наоборот. В самом деле, достаточно в плане перевести под рожь 4 га хорошей земли, высвободив ее из-под пшеницы, и мы получим уменьшение урожая пшеницы на  $4 \times 75 = 300$  пудов и увеличение урожая ржи на  $4 \times 100 = 400$ . Напротив, по отношению к большим количествам эти соотношения могут оказаться и нереализуемыми. Так, если бы мы пожелали уменьшить план с 15 000 до 7000 пудов ржи, то вместо 8000 пудов ржи мы уже не можем получить 6000 пудов пшеницы, а только  $9000 - 3750 = 5250$  пудов, как показывает рассмотренный выше пример 8. Это вызвано тем, что хорошей земли, на которой соотношение 3 : 4 реализуется, оказалось недостаточно.

Переходим к применениям оценок продукции, определяемых через о. н. время. Эта возможность применения существенно базируется на перечисленных выше свойствах этих оценок. В различных вопросах распределения и использования общественного труда, требующих экономического расчета — изменение плановой программы, замена одной продукции другой при использовании, сравнение способов производства — приходится сопоставлять количества различных видов продукции, а также количества труда, примененного в различных условиях.

В этих вопросах реальность оценок, определяемых о. н. временем, дает возможность их применения, как средства приведения к единому эквиваленту — затратам среднего труда. При этом если в указанных вопросах изменения невелики по сравнению с общим планом, то, благодаря свойству стабильности оценок, можно не учитывать в этих расчетах тех изменений в соотношении оценок, которые происходят в результате производимых изменений в плане. Однако если речь идет о больших изменениях, коренным образом меняющих план, то так поступать уже нельзя. Необходимо принимать во внимание эти изменения, строить расчет, исходя из соотношений оценок, соответствующих этой новой конкретной обстановке.

Таким образом, экономический расчет, основанный на оценках, построенных на действующем плане, применим по отношению к небольшим по сравнению с общим планом изменениям. Именно в таких условиях мы находимся, когда решаются

вопросы, относящиеся к отдельным предприятиям или работам, и они рассматриваются в плане целого района, отрасли или общегосударственном, причем оценки построены применительно к общему плану. Напротив, расчет в указанном виде не применим по отношению к вопросам, от выбора решения которых коренным образом меняется вся экономическая обстановка (как вопрос о строительстве Днепрогэса).

В частности, значение оценок продукции через о. н. время строится для данного момента. Поэтому они непосредственно могут использоваться для решения вопросов ближайшего периода, вопросов, связанных с использованием наличной производственной базы. При решении вопросов, затрагивающих длительные периоды времени — вопросы расширения производственной базы, пользоваться оценками данного момента уже нельзя, а необходимо учитывать динамику этих оценок, связанную с изменением обстановки, и ряд других моментов.

Для пояснения применения оценок о. н. времени приведем примеры подобных расчетов в наших элементарных схемах.

**Изменение программы.** ПРИМЕР 10. В условиях примера 4 (колхоз) первоначальная программа для участка: 3750 пудов пшеницы и 15 000 пудов ржи, заменяется на следующую: 6000 пудов пшеницы и 11 000 пудов ржи. Выполнима ли эта программа?

Первоначальная программа соответствовала 30 000 дням среднего труда. Объем новой программы можем подсчитать, пользуясь прежними оценками, так как изменения сравнительно невелики. Получим:

$$6000 \times 2 + 1,5 \times 11\,000 = 285\,000 \text{ дней.}$$

Отсюда ясно, что программа может быть перевыполнена примерно на 5%. Действительно, отводя 84 га хорошей земли под пшеницу и 6 га хорошей и 200 га обыкновенной под рожь, получим 6300 пудов пшеницы и 11 600 пудов ржи.

**Использование продукции.** ПРИМЕР 11. Колхоз выделяет некоторое количество зерновых культур на откорм птицы. Что целесообразнее, выделить рожь или пшеницу, если пшеница на 20% эффективнее?

10 пудов пшеницы заменяет в качестве корма 12 пудов ржи. Но оценка 10 пудов пшеницы составляет  $10 \times 2 = 20$  дней, а ржи  $12 \times 1,5 = 18$  дней. Это показывает, что применение пшеницы для откорма нецелесообразно.

**Выбор способа производства новой продукция.** ПРИМЕР 12. Рассматривая наш пример 2 из § 4 (колхоз), когда земля отведена только под рожь, мы установили о. н. время для пуда ржи 1,5 дня и коэффициент приведения конкретного труда к абстрактному 1,5 для хорошей земли и 0,75 обыкновенной. Пусть дано дополнительно задание по пшенице в 3750 пудов взамен некоторого количества ржи. Нужно выбрать правильный способ производства пшеницы и определить о. н. время для нее. На хорошей земле урожайность 75 пудов, время 100 дней, приведенное рабочее время (среднего труда) —  $100 \times 1,5 = 150$ , откуда затраты времени для пуда пшеницы —  $150 : 75 = 2$  дня среднего труда. На обыкновенной земле урожайность 25 пудов, приведенное время  $100 \times 0,75 = 75$  дней, отсюда необходимые



затраты на пуд пшеницы на обыкновенной земле  $75 : 25 = 3$  дня (среднего труда). Таким образом, правильно пшеницу посеять на хорошей земле, а оценка для нее равна наименьшей возможной затрате времени — 2 дня. Получили ту же цифру, что при рассмотрении примера 6 в § 5. Прежними коэффициентами приведения могли воспользоваться, благодаря свойству «стабильности».

ПРИМЕР 12. В примере 5 (цех) с дневного плана снимается 12 деталей Б и вместо этого требуется произвести детали В. Для деталей В нормы времени: на обыкновенных станках — 2 дня, на автомате — 0,5 дня. Требуется выяснить: а) каким способом обрабатывать детали В, б) каково о. н. время для изготовления детали В, в) сколько деталей В можно включить в план вместо 12 деталей Б.

**Таблица 6**  
**План распределения деталей**

	Станок	Производительность	Отведено станков, шт.	Продукция, шт.
Деталь А	Автомат	3	6	18
	Универсальный	1	12	12
Всего				30
Деталь Б	Автомат	3	—	—
	Универсальный	1	18	18
Всего				18
Деталь В	Автомат	2	4	8
	Универсальный	0,5	—	—
Всего				8

Подсчитаем затраты времени, воспользовавшись ранее найденными в этом примере коэффициентами приведения (см. § 5, пример 7): 2 — для работы на автомате и  $2/3$  — для работы на обыкновенных станках. Тогда затраты труда для детали В при работе на автомате оцениваются в  $0,5 \times 2 = 1$  день среднего труда, при работе на обычном станке  $2 \times 2/3 = 4/3$  дня среднего труда. Следовательно, правильный способ выполнения работы — на автомате, им определяется и о. н. время на изготовление детали В — 1 день. Снятие 12 деталей Б высвобождает  $12 \times 2/3 = 8$  дней среднего труда. Следовательно, в план можно включить 8 деталей В. Распределение работы дано в табл. 8.

Посмотрим, могли ли бы мы получить решение подобных вопросов, если бы определяли о. н. время средними затратами труда. По вопросу а) трудно дать ответ. По времени выгоднее на автоматах, но все автоматы заняты под детали А и не высвобождаются.

б) Каково о. н. время для изготовления детали В? Если бы деталь В изготовлялась на обычных станках, то было бы 2 дня, если на автомате — 0,5 дня. Так как способ не выбран, неизвестно что принять.

в) Сколько деталей В можно изготовить? Время, затрачиваемое на 12 деталей В — 12 дней. Если исходить из первого значения о. н. времени для детали В, то можно включить в план 6 деталей В, если из второго, то 24.

Таким образом, на первый вопрос мы не получили ответа, а на два других по два ответа и оба неверных, как показывает сравнение с приведенным выше правильным анализом вопроса. Также дезориентируют средние затраты труда и в других вопросах. Так мы получили в примере 4, что средние затраты труда составляют для пуда ржи  $5/8$  дня и для пуда пшеницы  $4/8$  дня. Исходя из таких цифр, могло бы показаться, скажем, более правильным пустить на корм пшеницу, чем рожь (в примере 11).

Таким образом, попытка определить о. н. время по средним затратам труда дает цифры, на которых базироваться экономический расчет не может — цифры, приводящие к неверным и нереальным результатам.

Возможность использования оценки через о. н. время в вопросах о выборе способа производства и тем самым в вопросах построения правильного плана является весьма показательной. В этом выявляется двойственная, диалектическая природа и роль этих оценок.

Оценки продукции, которые построены на основе анализа, соответствующего данной обстановке производственного плана, сами становятся средством дальнейшего улучшения, детализации и регулирования плана!

Изложенный сейчас первый метод определения о. н. времени и приведения конкретного труда к абстрактному с успехом применяется в тех случаях, когда мы имеем определенные, более или менее постоянные условия труда, определенную степень обеспеченности его факторами, повышающими производительную силу труда. Однако в ряде случаев приходится встречаться с положением, когда меняются и требуемые условия труда и общая обеспеченность средствами и условиями, повышающими производительную силу труда. В этих случаях применение изложенного метода оказывается сложным, ненаглядным и неудобным. В таких случаях оказывается нужным более детальный анализ и количественный учет отдельных факторов, определяющих условия труда и о. н. время. Этому анализу и посвящаем следующие параграфы.

### **§ 7. Трудовая оценка эффективности факторов, повышающих производительную силу труда, II метод исчисления общественно-необходимого времени**

Для дальнейшего более полного анализа проблемы исчисления о. н. времени и приведения конкретного труда к абстрактному необходимо подвергнуть более

детальному рассмотрению и оценке использование отдельных факторов, повышающих производительную силу труда.

Постоянно в практике советской экономики при решении вопросов о выборе способов производства и об использовании продукции приходится учитывать, наряду с необходимыми затратами труда или себестоимостью, также и то, в какой мере оказываются нужными в процессе производства факторы, повышающие производительную силу труда, в которых обычно испытывается недостаток: транспортные средства, сложные виды оборудования, средства для капиталовложений. Учет этого момента часто заставляет отказываться от способа производства, дающего меньшую себестоимость, чтобы избежать увеличения загрузки транспорта, привлечения — «задавливания» — дефицитного оборудования и т. д. Точно так же и при использовании продукции в производстве приходится часто заменять данный ее вид на более дорогой, но не требующий для производства дефицитных средств.

Однако учет этих моментов производится обычно только качественно, что отрицательно сказывается на объективности и точности экономического анализа. Между тем изучение условий, определяющих о. н. время, открывает принципиальную возможность объективно-количественного учета этих моментов.

Рассматривая вопрос об оценке значения данного фактора, повышающего производительную силу труда, необходимо решать его конкретно, в соответствии с данной обстановкой и планом. Прежде всего существенен анализ затрат только факторов и условий, неизбежных в данной обстановке, т. е. таких, что и дальнейшее увеличение их количеств могло бы способствовать экономии труда, а даже некоторое уменьшение последних заставило бы повысить трудовые затраты.

При таком условии применение этих благоприятных факторов в данном месте для выполнения данной работы связано со своеобразной (косвенной) затратой общественного труда.

Именно, использование этих условий в данном месте заставляет отказаться от возможности их применения в некотором другом месте и тем самым увеличивает общественные затраты труда там.

Для учета размера этих косвенных затрат труда поступаем следующим образом. Подсчитываем, какая экономия в труде может быть получена за счет каждой единицы фактора, повышающего производительную силу труда. При этом подсчет производится в условиях данной обстановки в соответствии с планом, при данных ресурсах, в частности, данной степени насыщения указанным фактором, в предположении, что эти ресурсы использованы рационально. Таким образом для неизбежных производственных факторов получаем трудовые оценки, характеризующие эффективность их применения в данной обстановке.

Сравнивая суммарную оценку их эффективности с общими ресурсами труда, получаем нормальное соотношение между трудом и обеспечивающими его условиями, соответствующее среднему благоприятным условиям труда — среднему труду. В результате, по соотношению количества труда и оценки примененных благоприятствующих факторов, оказывается возможным судить количественно об обеспеченности благоприятными условиями и факторами, о степени отклонения конкретно условий труда от средних.

Если указанное соотношение совпадает со средним, то имеем нормальные условия труда, т. е. конкретный труд в этих условиях соответствует абстрактному (среднему). Если соотношение выше нормального, то это означает, что условия труда более благоприятные, чем средние, причем то, во сколько раз они благоприятнее, определит значение коэффициента приведения (больше единицы). Наконец, если это соотношение ниже нормального, коэффициент приведения окажется меньше единицы.

Таким образом, оценка эффективности факторов, благоприятствующих труду, дает средство приведения конкретных условий труда к средним, а тем самым и средство исчисления о. н. времени — 2-й метод исчисления. Поясним его применение на примере.

**ПРИМЕР 14.** Возьмем уже рассматривавшийся пример 4 (колхоз). Там благоприятные условия, избыточный производственный фактор, — хорошая земля. Какова эффективность этого фактора?

Использование каждого га хорошей земли дает возможность заменить им 2 га обыкновенной земли, т. е. его добавление позволяет сохранить прежний объем продукции, отказавшись от обработки 1 га земли, иначе говоря, сэкономить 100 дней труда. Это и характеризует эффективность данного фактора. Общие ресурсы труда в данном примере 30 000 дней, оценка благоприятствующих факторов — 100 га хорошей земли — составляет  $100 \times 100 = 10\,000$  дней, т. е. нормальное соотношение труда и благоприятствующих факторов  $30\,000 + 10\,000$  или  $100\% + 33,3\% = 133,3\%$ .

В условиях работы на обыкновенной земле благоприятствующие факторы не используются, поэтому их можно охарактеризовать равенством  $100\% + 0\% = 100\%$ . Отсюда коэффициент приведения к среднему труду  $100 : 133,3 = 3/4$ .

На хорошей земле: на 100 дней затрат труда — 100 дней (оценка благоприятствующих факторов), равенство  $100\% + 100\% = 200\%$ , откуда коэффициент приведения к средним условиям  $200 : 133,3 = 3/2$ . Как видим, для коэффициентов приведения получили прежние значения (пример 6), откуда ясно, что то же самое будет и по отношению к о. н. времени.

Как мы видели, общественно-необходимое время или полные затраты общественного труда на данную работу или продукцию зависят не только от фактически произведенных затрат труда при выполнении данной работы, но и от условий, в которых они произведены. Фактические затраты на одну работу могут быть те же, что и на другую, но о. н. время будет большим, если будет большая затрата факторов, повышающих производительную силу труда. Таким образом, о. н. время определяется, наряду с непосредственными, «видимыми» затратами труда, косвенными общественными затратами. Если первые видны и могут быть оценены при непосредственном анализе данного производственного процесса, то вторые определяются условиями труда, предоставленными обществом или всей хозяйственной единицей для данного процесса, и могут быть правильно оценены при общем анализе всего комплекса работ. Существенно выделить в каждом процессе долю и объем тех и других затрат. Первые — видимые — пропорциональны количеству используемого труда, вторые — косвенные — общей оценке эффективности примененных факторов, повышающих производительную силу труда. Если их привести к среднему труду, то, учитывая, что последний составляется из дня труда, сопро-

вожденного некоторым (средним) количеством указанных факторов, обе эти цифры должны быть разделены на полученную таким подсчетом оценку дня среднего труда или помножены на обратную его величину — коэффициент, меньший единицы.

В частности, если труд вовсе не сопровождается избыточными факторами, повышающими производительную силу труда, то при таком расчете второе слагаемое — косвенные затраты труда — будут отсутствовать, и при приведении этого конкретного труда к среднему придется просто его умножить на указанный коэффициент. Таким образом, этот коэффициент есть не что иное, как коэффициент приведения труда, не обеспеченного условиями, повышающими производительную силу труда, к среднему. Такой труд будем называть необеспеченным или невооруженным трудом. Таким образом, при приведении конкретного труда к среднему, прежде всего (первое слагаемое), непосредственные затраты труда приводятся к среднему как невооруженный труд. Далее сюда добавляются оценки эффективности применения факторов, повышающих производительную силу труда, помноженные на этот коэффициент. Удобно это умножение произвести раз и навсегда, т. е. выразить их через средний труд (первоначальные их оценки, следовательно, были выражены через невооруженный труд). Тогда можем просто сказать, что затраты труда при каком-либо производственном процессе, выраженные через средний труд, получаются сложением фактически затрачиваемого труда, приведенного к среднему как невооруженный («видимые» затраты), и суммарных оценок эффективности используемых факторов, повышающих производительную силу труда, также выраженных через средний труд («косвенные» затраты).

При этом, если данный способ выполнения работы рационален в данных условиях, то указанный подсчет дает о. н. время для этой работы, так как при нем полно учтены рациональные затраты труда в соответствии с конкретными условиями, выраженные через средний труд.

Таким образом, благодаря раздельному учету видимых и косвенных затрат труда, получается возможность в правильном плане определить о. н. время для продукции непосредственным подсчетом элементов произведенных затрат в данном конкретном процессе. Именно, выразив невооруженный труд и эффективность факторов через средний труд в общем производственном плане, можно после этого для каждой конкретной работы производить подсчет, исходя из этих оценок и не анализируя распределение труда в обществе (или хозяйственном комплексе) в целом. Это представляет большое преимущество данного метода по сравнению с первоначальной его формой и 1-м методом. Это преимущество в частности, сказывается при применении подсчета о. н. времени в уже упоминавшихся важнейших вопросах экономического расчета: об изменениях в программе, об использовании продукции и ресурсов, об оценке и сравнении способов производства. В особенности оно сказывается, когда мы имеем дело с изменением в ресурсах и в соотношениях между трудом и факторами, повышающими производительную силу труда. Отметим далее, что если для данной продукции является рациональным применение нескольких способов производства, то полные общественные затраты труда (видимые и косвенные) на единицу продукции в каждом из этих способов должны быть одними и теми же и равны о. н. времени для данной продукции. В противном случае применение одного из этих способов было бы нерационально — можно бы-

ло получить сокращение затрат общественного труда переходом на другой способ. Поясним сказанное на примерах.

**ПРИМЕР 15.** В рассмотренном примере (колхоз) мы уже произвели оценку эффективности фактора, повышающего производительную силу труда. Именно, мы установили, что 1 га хорошей земли позволяет сэкономить 100 дней труда. Так как экономия получается только в труде, но не в производственных факторах, то, как об этом уже шла речь, эти оценки эффективности выражены в днях невооруженного труда.

Сопоставляя общие затраты труда 30 000 дней с суммарной эффективностью благоприятствующих факторов — 100 га хорошей земли ( $100 \times 100 = 10\,000$  дней), находим, что доля видимых затрат есть  $3/4 = 0,75$ , что является переводным коэффициентом невооруженного труда в средний. В частности, из всего общественного фонда 30 000 дней среднего труда на долю видимых затрат должно быть отнесено  $30\,000 \times 0,75 = 22\,500$  дней среднего труда и на долю косвенных затрат 7300 дней. Также и в каждом конкретном производственном процессе день затрат труда должен учитываться как 0,75 дня среднего труда, что дает видимую часть затрат, а использование 1 га хорошей земли в соответствии с эффективностью, приведенной к среднему труду, как  $100 \times 0,75 = 75$  дней среднего труда. В случае использования обыкновенной земли, имеющейся в избытке, косвенные затраты отсутствуют. Рассчитанное, исходя отсюда о. н. время для продукции, приведено в табл. 7.

**Таблица 7**  
**Подсчет общественно-необходимого времени (2-й способ)**

Злак	Земля	Затраты на 1 га в днях среднего труда			Сбор	О. н. время на 1 пуд
		Видимые	Косвенные	Полные		
Пшеница	Хорошая	75	75	150	75	2,0
Рожь	Обыкновенная	75	—	75	50	1,5
	Хорошая	75	75	150	100	1,5

Как видим, для о. н. времени получили те же значения, что и в первом методе, при этом для ржи в обоих случаях полные общественные затраты труда на единицу продукции одинаковы.

**ПРИМЕР 16** (цех, см. примеры 5 и 7). Лишний станок-автомат позволяет одному рабочему заменить труд трех (три детали Б вместо одной), поэтому его использование в течение дня дает экономию в 2 дня труда (невооруженного). Следовательно, оценка эффективности дня использования машины — 2 дня невооруженного труда. Общая оценка ресурсов  $40 + 10 \times 2 = 60$  дней. Следовательно, доля видимых затрат  $2/3$ . В соответствии с этим день труда должен учитываться с коэффициентом  $2/3$ , а занятость машины в течение дня (приведенная эффективность) равна

$2 \times 2/3 = 4/3$  дня среднего труда. Отсюда о. н. время для изготовления детали Б на обыкновенном станке оценивается как  $1 \times 2/3 = 2/3$  дня (только видимые затраты); о. н. время для изготовления детали А (на автомате) требует  $1/3$  рабочего дня и занятости машины в течение  $1/3$  дня, поэтому сумма затрат, выраженная через средний труд, составит:  $1/3 \times 2/3 + 4/3 \times 1/3 = 2/3$  дня, т. е. и тут получили прежние значения для о. н. времени.

Далее, следует отметить, что трудовые оценки эффективности производственных факторов, так же как оценки продукции, конкретны, стабильны и реальны. Так, скажем, в условиях примера 8 эффективность 1 га хорошей земли составила бы уже не 75 дней, а, как нетрудно подсчитать, 100 дней среднего труда. Приведем теперь несколько примеров применения оценок эффективности производственных факторов в экономическом расчете. И здесь допустимо пользоваться этими оценками при расчетах, не связанных с коренным изменением плана, когда они могут резко изменить значение.

**ПРИМЕР 17.** Одновременное изменение программы и ресурсов. Пусть в условиях примера 4 увеличены ресурсы труда на 6000 дней и выделено дополнительно 10 га хорошей земли. Насколько может быть увеличена программа по пшенице, если по ржи ее оставить прежней?

Увеличение ресурсов, приведенное к среднему труду, можно оценить цифрой (пользуясь оценками, данными в примере 15):  $6000 \times 0,75 + 10 \times 75 = 5250$  дней среднего труда.

На пуд пшеницы требуется 2 дня среднего труда (см. пример 6). Следовательно, программу можно увеличить на  $5250 : 2 = 2625$  пудов пшеницы.

**ПРИМЕР 18.** Оценка целесообразности нового способа производства. За счет более тщательной обработки почвы с затратой 130 дней труда на 1 га вместо 100 дней можно увеличить урожай пшеницы на хорошей земле на 20%. Целесообразно ли это?

Увеличение затрат труда на 30 дней без затрат производственных факторов, приведенное к среднему труду, составит  $30 \times 0,75 = 22,5$  дня.

Увеличение продукции на 20% составит  $75 \times 0,20 = 15$  пудов, что имеет оценку  $15 \times 2 = 30$  дней среднего труда. Применение данного способа целесообразно.

**ПРИМЕР 19.** В условиях того же примера 4 требуется отвести некоторое количество земли под клевер. Задание 8000 пудов. Обработка 1 га под клевер требует 40 дней, урожайность на обыкновенной земле — 100 пудов, на хорошей земле — 800 пудов. Какую землю правильнее отвести под клевер?

Подсчитываем затраты на пуд клевера в обоих случаях, пользуясь оценками примера 15, находим:

на обыкновенной земле — на один га:  $40 \times 0,75 = 30$  дней,

— на один пуд:  $30 : 100 = 0,3$  дня;

на хорошей земле — на один га:  $40 \times 0,75 + 75 = 105$  дней,

— на один пуд:  $105 : 300 = 0,35$  дней.

Таким образом, правильнее отвести под клевер обыкновенную землю. Как видим, правильное решение можно было получить, только рассматривая полные затраты труда, а не только видимые. При этом недостаточен анализ использования

природных источников самих по себе. С этой точки зрения могло бы показаться более правильным использование хорошей земли под клевер, где оно даст утроение урожая, чем под рожь, где урожай только удваивается. Итак, существенен анализ влияния использования этих источников на затраты труда, т. е. в конечном счете анализ полных затрат общественного труда.

Если бы вместо полных затрат труда мы ограничивались учетом видимых затрат, то получили бы неверные, искаженные результаты. Так, мы нашли бы при рассмотрении примера 4, что видимые затраты труда составляют  $4/3$  дня для пуда пшеницы и  $5/3$  дня для пуда ржи. То есть вопреки здравому смыслу и данным условиям, рожь оказывается более ценным продуктом, чем пшеница, требующая больше труда. Так же и в рассмотренных сейчас применениях расчет, исходящий из средних видимых затрат труда, приводит к неверным выводам. Так, в примере 17 кажется, что увеличение ресурсов труда на 6000 дней, раз на пуд пшеницы требуется  $4/3$  дня, позволяет получить  $6000 : 4/3 = 4500$  пудов. В действительности, как мы видели, в данных условиях возможно получение только 2625 пудов. Таким образом, расчет, основанный на учете только видимых затрат труда, оказался порочным, дал преувеличенные результаты, в другом случае, наоборот, может дать преуменьшенные результаты.

Так же обстоит дело и при оценке нового способа производства (пример 18). Мы нашли выше, что повышение урожайности за счет более интенсивной обработки целесообразно в данных условиях. В то же время, если судить по видимым затратам труда, то оказывается, что увеличение затрат труда на 30% дает увеличение продукции только на 20%. Следовательно, затраты труда на единицу продукции возрастают — производительность труда падает, и применение такого способа обработки представляется нецелесообразным. Таким образом, расчет по видимым затратам труда может дезориентировать в вопросах правильного использования производственных факторов, послужит тормозом для их интенсивного использования, когда оно целесообразно.

Приведем еще один пример такого же рода.

**ПРИМЕР 20.** В энергосистеме работает ТЭЦ мощностью 100 000 кВт и заводские станции суммарной мощностью также 100 000 кВт. На ТЭЦ расходуется 0,5 кг условного топлива на выработанный киловатт-час, на заводских станциях — 1 кг. Стоимость одной тонны условного топлива — 6 дней труда. Прочие затраты на производство электроэнергии, которые невелики по сравнению с затратой на топливо, отбрасываем.

Требуется определить о. н. время для тысячи киловатт-часов (мегаватт-часа). Далее, требуется установить, целесообразна ли технически допустимая интенсификация использования ТЭЦ с увеличением выработки на 20%, требующая увеличения затрат топлива на 30%.

Прежде всего определяем эффективность ТЭЦ.

За час она дает на выработанные 100 мегаватт-часов энергии экономию 50 тонн топлива, что соответствует 300 дням простого труда. Общая затрата труда (затрата 150 тонн топлива на всех станциях и производственных факторов за час) составляет  $150 \times 6 + 300 = 1200$  дней труда. Доля видимых затрат труда и коэффициент приведения невооруженного труда к среднему —  $3/4$ . Отсюда определяется также



эффективность часа работы ТЭЦ, выраженная через средний труд —  $300 \times 0,75 = 225$  дней среднего труда.

В соответствии с этим затраты на 1 мегаватт-час составят на заводских станциях:  $6 \times 3/4 = 4,5$  дней среднего труда и столько же на ТЭЦ (с учетом косвенных затрат).

Для дополнительно произведенных на ТЭЦ 20 мегаватт-часов потребовалось бы 15 тонн топлива или  $6 \times 15 \times 0,75 = 67,5$  дней среднего труда, 3,37 дня на один мегаватт-час. Косвенные же затраты труда отсутствуют, так как электроэнергия производится с использованием того же оборудования. Итак, дополнительно выработанная на ТЭЦ электроэнергия требует меньшего времени, чем общественно-необходимое, следовательно, ее производство целесообразно. Изолированное рассмотрение экономики ТЭЦ без полного учета общественных затрат труда показало бы, что на ТЭЦ удельный расход топлива возрастает с 0,50 до  $65 : 120 = 0,54$  кг условного топлива на киловатт, и такое мероприятие могло показаться нерациональным.

Необходимо оговориться, что приведение к среднему труду проведено у нас не полно, а лишь в пределах данного комплекса электростанций. При приведении к единому среднему труду абсолютное значение всех полученных цифр изменится. Однако полученные соотношения между ними сохранятся.

Ниже мы постараемся выяснить экономический смысл введенных оценок производственных факторов.

### § 8. Связь косвенных затрат с некоторыми другими экономическими категориями

В предыдущем параграфе мы установили, что для подсчета полных затрат общественного труда для данной работы нужно к видимым затратам труда присоединить косвенные, исчисленные в соответствии с оценкой эффективности используемых в данной работе благоприятствующих труду средств и условий. В частности, в примере 15 мы видели, что к затратам труда на 1 га нужно присоединить оценку эффективности годового использования 1 га хорошей земли, равную 75 дням среднего труда. Необходимость включения в число затрат какой-то величины, связанной с использованием природных факторов, говорит о наличии в социалистическом обществе экономической категории, подобной дифференциальной ренте. Ее и естественно называть социалистической дифференциальной рентой. В чем ее смысл и значение?

Как мы видели, только присоединение этого вида затрат (косвенных) к видимым затратам труда позволяет учесть условия труда при подсчете о. н. времени, произвести приведение к единым нормальным условиям и получить в результате полные общественные затраты труда на данную продукцию и правильную ее оценку.

Далее, учет ренты позволяет решать вопрос о правильном использовании благоприятных природных источников (хорошей земли). Без учета ренты использование этих благоприятных источников может показаться целесообразным во всех случаях. Между тем такой вывод игнорирует фактические возможности, связанные

с ограниченностью данного источника. При учете ренты, определенной в соответствии с обстановкой, использование этих источников оказывается целесообразным по расчету лишь в тех случаях, где оно наиболее эффективно. Это устраняет возможность случайного, неполного использования указанных источников (см. пример 10). Следует указать, что кроме земли этими источниками могут быть: вода для орошения, местные леса, водоемы для рыбной ловли, богатые нефтяные залежи, горнорудные разработки, когда они не избыточны.

Наконец, учет ренты в продукции создает более высокую оценку для тех видов продукции, производство которых связано с недостаточными благоприятными природными условиями, например, технические культуры, требующие хорошей земли и орошения. Это в свою очередь способствует правильному, не случайному применению этих, неизбежно дефицитных видов продукции, их экономии и замене другими.

Из сказанного совершенно ясна иная социальная природа и роль социалистической ренты по сравнению с капиталистической.

Капиталистическая рента есть форма эксплуататорского дохода — часть прибавочной стоимости, присваиваемая определенным классом, которая противопоставляется другим частям стоимости.

В социалистическом обществе рента есть часть общественных затрат труда и часть общественного продукта, принадлежащая так же, как и прочие, обществу в целом, которая не противопоставляется другим частям, а выделяется из целого, как особая форма, которую целесообразно учитывать отдельно (подобно тому, как в калькуляции себестоимости выделяется зарплата производственных рабочих и затраты цеховые и общезаводские).

В капиталистическом обществе частная собственность на природные источники и рента являются во многих случаях тормозом для правильного и эффективного использования природных источников, например, в форме абсолютной ренты. В социалистическом обществе, благодаря государственной и общественной собственности на природные источники, имеется возможность наиболее правильного и эффективного использования природных источников, и учет ренты в экономическом расчете является средством, обеспечивающим такое использование этих источников.

Напротив, неучет ренты может оказаться причиной растраты природных источников, случайного, не наилучшего их использования.

Величина капиталистической ренты определяется стихийно на рынке. Социалистическая рента должна определяться и учитываться сознательно в процессе планирования хозяйства. Ее размер должен назначаться так, чтобы он обеспечивал наиболее полноценное использование природных источников.

Далее, в других примерах мы имели определенную оценку эффективности для недостаточных орудий труда, через которую также определялись косвенные затраты труда. При установлении о. н. времени для данной работы учитывалась в числе затрат занятость на ней этих орудий по их оценке. Так, для станка-автомата день его занятости оценивался  $4/3$  дня среднего труда. Для ТЭЦ эта оценка — 225 дней среднего труда за час использования. Таким образом, эта оценка эффективности применения оборудования, включаемая в число затрат, может рассматриваться также как своеобразная рента или прокатная цена для данного орудия труда.

Насколько необходимо и оправданно введение такой категории?

Уже из предыдущего изложения ясно, что только при введении в расчет этого вида затрат удастся правильно оценить полные общественные затраты труда на некоторые работы или продукцию. Далее, только учет этих оценок позволяет наилучшим образом решать вопрос о правильном использовании отдельных видов оборудования, целесообразной интенсивности его.

Следует сказать, что учет этого фактора в экономическом анализе довольно обычен. При решении вопроса о выборе способа производства работы учитывается момент «задавливания» оборудования, т. е. стремятся при выборе способа выполнения работы сократить по возможности применение сложных и дефицитных видов оборудования. Точно так же продукция, произведенная с помощью такого оборудования, рассматривается как дефицитная. Такая продукция ценится выше чем другая, требующая таких же видимых затрат труда, но без применения дефицитного оборудования. Однако названные моменты учитываются обычно в экономическом анализе только качественно. Но раз с этими моментами считаться приходится, как показывает многолетний опыт советской экономики, то нельзя возражать и против того, чтобы они учитывались объективно — количественно.

Далее высказывается то соображение, что средства труда, в отличие от природных источников, воспроизводимы с помощью определенных затрат труда и что поэтому общественные затраты труда, связанные с их использованием, будут полностью учтены, если принять во внимание амортизацию на единицу продукции.

Конечно, это в корне неверно. Такое рассуждение было бы правильным, если бы все необходимые орудия производства имелись в избыточном количестве или могли бы быть мгновенно произведены в случае надобности, а средства для капиталовложений также были бы неограниченны. Однако такие гипотетические условия совершенно не соответствуют реальной действительности, опыту советской экономики. Исходить из них, значит подходить метафизически к данному вопросу.

Реально, при недостатке каких-либо машин, электростанций, перегрузке железнодорожного транспорта мы получаем возможность устранить этот недостаток только через несколько лет, да притом не всегда, учитывая постоянную ограниченность средств для капиталовложений. Поэтому дефицит (лучше сказать, ограниченность) определенных видов оборудования (фактически большинства) — является длительным фактом, с которым необходимо постоянно считаться при экономическом расчете. И в данном вопросе отрыв от реальных условий, ни на чем не основанное забегание вперед, в действительности вредит делу, а потому реакционно, так же как и в других вопросах, например, о типе сельскохозяйственной артели или о принципе распределения продукта в социалистическом обществе.

Необходимо сказать, что и теоретически сходная роль, которую играют в приведенном методе расчета орудия производства и природные источники, позволяет нам говорить о ренте на них, не является неожиданной. Маркс прямо указывает: «Только в крупной промышленности человек научается заставлять продукт своего прошлого, уже овеществленного труда, действовать в крупном масштабе даром, подобно силам природы» («Капитал», т. 1, стр. 315). Существенная разница та, во-первых, что машины переносят на продукт часть своей стоимости при изнашивании, но она учтена тем, что амортизация включается у нас в прямые — видимые

затраты труда. Во-вторых в том, что машина может быть всегда воспроизведена с затратой определенного труда. Однако этот момент, как уже указывалось, не имеет решающего значения при определении о. н. времени для данного момента, когда приходится исходить из наличной производственной базы. Он играет роль в вопросах перспективных изменений о. н. времени, но этих вопросов мы не будем касаться здесь, впрочем, их анализ подтвердил бы, что общественные затраты, связанные с применением такого оборудования, не исчерпываются учетом амортизации.

Нужно сказать, что и количественно вес амортизации в себестоимости продукции, очевидным образом не отражает действительной роли занятости оборудования и его влияния на эффективность труда в процессе производства — ее общественной оценки.

Наконец, необходимо подчеркнуть, что положение о влиянии на образование стоимости, наряду с видимыми затратами труда, степени использования природных условий и основных средств, не имеет ничего общего с буржуазными вульгарными теориями о трех равноправных источниках стоимости: земле, труде и капитале, с которой связана апологетика капитализма.

Прежде всего единственным источником стоимости является труд. Общая произведенная стоимость, будучи оценена в среднем труде, в точности совпадает с суммарной целесообразной затратой труда. Указанные факторы могут влиять только, и то лишь при определенных условиях (недостатке их), на распределение определенной доли общественных затрат труда (косвенных), на оценки отдельных видов продукции.

Самый факт возможности влияния используемых природных источников и основных средств на производительную силу труда является бесспорным и несвязанным именно с капитализмом фактом. Влияние природных источников играло большую роль и в экономике в докапиталистические эпохи, влияние использования средств производства особенно возросло с появлением машинного производства. Сущность и чудовищная несправедливость капиталистического общества заключается не в том, что при нем роль этих факторов в общественном производстве особенно велика (эта роль также велика и при социализме), а в том, что эти средства производства находятся в частной собственности и служат средством эксплуатации. Именно это дает капиталистам и земельным собственникам возможность присвоения большей части продукта общественного труда.

Напротив, в социалистическом обществе эти средства производства являются общественной собственностью. Благодаря этому не люди являются рабами этих средств, вернее рабами и издольщиками кучки эксплуататоров, захвативших эти средства в свои руки, а природные источники и машины сознательно используются для облегчения труда и лучшего удовлетворения потребностей.

Однако из того факта, что средства производства являются общественной собственностью, нельзя скороспело делать вывод, что не нужно считаться с их затратой. Глубоко неправильны и вредны имеющиеся хождение взгляды, что если для капиталиста выгодно лишь такое применение машин (или источника), которое приносит определенную прибыль, то у нас нет никаких ограничений — оправданно всякое полезное применение машины, дающее хоть какую-то экономию труда. Авторы этих взглядов, видимо, не до конца понимают значение правильного использования социалистической собственности.

В действительности, у нас оправданно не всякое использование средств производства, а наиболее полезное, там, где оно дает наибольший эффект, наибольшую экономию труда. И этот достижимый уровень эффективности весьма высок у нас, ибо бескризисное социалистическое хозяйство позволяет использовать средства производства правильнее и полнее, чем при капитализме. Мы используем мощность электростанций в СССР в два раза интенсивнее, чем в буржуазных странах. Километр железнодорожного пути используется у нас в два с лишним раза интенсивнее, чем, скажем, в США (В. Молотов, доклад на XVIII съезде партии). В то же время такое максимально возможное использование средств достигнуто у нас далеко не во всех случаях. Как указывалось в докладах тов. Вознесенского и Маленкова на 18 Партконференции, немало станков у нас не используется или используется малоэффективно. Характерный пример приведен в докладе тов. Маленкова: «На таком дефицитном, квалифицированном оборудовании выполняют простые операции или обрабатывают мелкие детали, которые было бы разумнее делать на более простом и мелком оборудовании. Нередко бывает и так, что на огромном карусельном станке обрабатывается деталь с чайное блюдце величиной».

Именно рента и прокатная стоимость должны определить ту меру общественной экономии труда, с которой возможно использование соответствующих средств в данной обстановке. Учет их при экономическом расчете, а возможно, также в хозрасчете и показателях работы предприятий предохранит данное средство производства от случайного, малоэффективного использования. Позволит решить вопрос о целесообразности его конкретного применения не изолированно, а с учетом общей экономической обстановки. Учет ренты и прокатной стоимости в затратах на продукцию и оценке ее будет способствовать более правильному решению вопросов о расходовании последней.

### **Заключение. Исчисление стоимости в советском хозяйстве. Значение правильного ее определения в вопросах экономического анализа**

В данной работе мы не ставили задачей исчерпать вопросы методологии исчисления стоимости в условиях социалистического общества, а желали лишь обратить внимание на определенные моменты этой методологии, которые обычно недооцениваются, и выявить их значение и роль. Именно, при учете затрат труда принимается во внимание различие в условиях труда только в отношении квалификации рабочего и интенсивности его труда, что находит отражение в оплате последнего, а через это в себестоимости и цене<sup>11)</sup>. Напротив, различие в других важнейших условиях труда — природные условия, обеспеченность оборудованием — не учитываются количественно и не отражаются в калькуляции себестоимости, на основе которой строится цена. Между тем эти моменты имеют не меньшее значение, и уравниловка в их учете недопустима в такой же мере, как уравниловка в вопросах оплаты и учета труда.

---

<sup>11)</sup>Так как этот момент не остается неучтенным при практическом исчислении стоимости, мы нашли возможным не касаться методов этого учета, хотя и они не всегда правильны.

Мы выяснили на элементарных планово-хозяйственных вопросах принцип учета этих условий при исчислении о. н. времени. В этом процессе определения о. н. времени в данной хозяйственной ячейке для определения продукции или работы происходит первоначальное проявление и определение стоимости. Для такой первоначальной, простейшей формы стоимости мы могли в качестве единицы принимать сам средний труд для той хозяйственной ячейки.

В дальнейшем, имея источником первоначальные проявления стоимости, в элементарных планово-хозяйственных актах, через экономические взаимосвязи отдельных хозяйственных единиц, в процессе хозрасчета и планирования для всех видов продукции и услуг устанавливаются единые общественные стоимостные отношения, определяемые производственными связями.

При такой единой общественной форме стоимости, соответствующей всеобщей и денежной формам ее в товарно-капиталистическом хозяйстве, непосредственный учет ее в труде, по-видимому, невозможен. Стоимость должна принять денежную форму и только в такой форме делается осуществимым одновременный учет затрат труда непосредственно в данном производстве и в связанных с ним сырье, амортизации и пр. различий в них: по квалификации и интенсивности, различий в других условиях труда путем учета косвенных затрат (рента, прокатная цена).

Определяемые в процессе анализа и построения рационального общегосударственного производственного плана стоимостные отношения сами являются одним из средств для этого построения.

Следует, наконец, сопоставить стоимость социалистическую с товарнокапиталистической, подчеркнуть некоторые из наиболее существенных отличий в ее определении и в методологии исследования.

Так как социалистическое народное хозяйство является единым, о. н. время в нем определяется полными затратами труда на данную продукцию в рациональном производственном плане.

Капиталистическое производство, являясь общественным, не является единым и рациональным<sup>12)</sup>.

Поэтому в нем нельзя говорить о полных общественных затратах труда, а лишь о затратах на отдельном предприятии, поэтому о. н. время в нем есть устанавливаемое в общественном процессе необходимое время на производство единицы продукции на предприятиях данной отрасли. Именно отсюда исходил Маркс в определении стоимости. В дальнейшем цены, стихийно устанавливаемые в процессе обращения, в силу условий распределения прибавочной стоимости, должны, как известно, систематически отклоняться от стоимостей. Напротив, в социалистическом обществе, так как стоимости устанавливаются анализом затрат труда общества в целом, а цены определяются сознательными планово-экономическими актами, нет причин для систематического отклонения соотношений цен от правиль-

---

<sup>12)</sup> Апологетические утверждения многих буржуазных школ политэкономии о том, что капиталистический строй обеспечивает максимальное развитие производительных сил, опровергается марксистской политэкономией, доказывающей неизбежность кризисов и безработицы при капитализме, опытом капиталистических стран, который показывает постоянное наличие безработицы, малого использования оборудования, прямого уничтожения готового продукта; опытом советской экономики, показавшей возможность роста производительных сил, невиданного при капитализме.

но исчисленных стоимостей (мы имеем в виду планово-производственные цены, а не розничные, заготовительные и т. д.).

Другое основное различие состоит в следующем.

Открытое Марксом разделение рабочего времени на необходимое и прибавочное является основным методом творческого анализа экономических законов капиталистического общества и, в частности, законов ценообразования. Иногда сопоставляют с этим разделение у нас рабочего времени на две части, продукт которых идет соответственно на личное и на общественное потребление. Нам такая аналогия представляется довольно поверхностной. В социалистическом обществе нет причин противопоставлять эти части продукта труда одну другой, и это противопоставление не может быть взято за основу исследования экономических законов ценообразования.

Переходим к вопросу о значении принципов исчисления общественно-необходимого времени в том виде, как они рассматриваются в данной работе, в вопросах экономического расчета и планирования. Необходимо сказать, прежде всего, что так как мы рассматривали только вопрос об определении о. н. времени, а через него и других экономических показателей для данного момента, то получаемые результаты применимы непосредственно в вопросах экономического анализа, связанных с данным периодом, т. е. в вопросах использования наличной производственной базы. Мы имеем в виду, в частности, следующие вопросы: о распределении программы, о сравнении и выборе способов производства, возможных на наличной производственной базе, об использовании оборудования, вопросы экономии и замены одних видов продукции или одних производственных факторов другими, вопрос о построении системы показателей работы предприятий, обеспечивающей наилучшее согласование интересов отдельного предприятия с общегосударственными. В то же время мы вовсе не касались здесь вопросов, при решении которых необходимо учитывать изменение о. н. времени, затрагивающих различные периоды времени, в частности, проблемы капиталовложений.

Мы не имели возможности в данной работе подвергнуть детальному исследованию фактический порядок применения методов исчисления о. н. времени в экономическом анализе и построении экономических показателей. Отметим лишь те моменты в этих вопросах, в которых должно особенно сказаться устранение неправомерностей в применении закона стоимости, о которых шла речь в тексте работы. Особенное значение имеют два момента, во-первых, определение о. н. времени в соответствии с обстановкой данного периода, во-вторых, учет, наряду с видимыми, косвенных затрат труда. Наиболее существенны именно следующие вопросы:

1. Исчисление общественно-необходимого времени в соответствии с конкретной обстановкой и с отражением полных общественных затрат труда, включая и косвенные, позволит в экономическом расчете учесть объективно ряд обстоятельств, которые обычно принимают во внимание лишь качественно: потребность в данной продукции, дефицит тех или иных производственных факторов, перегруженность транспорта и т. п. Это сделает выводы расчета более правильными и реальными.

2. Введение в экономический анализ, а также, возможно, и в хозрасчет и показатели работы предприятий количественного учета задалживания оборудования

в виде прокатной цены оборудования заставит полностью и правильно использовать оборудование, там, где его использование наиболее эффективно, и позволит расчетом выявить эти виды работ. Оно воспрепятствует простому оборудованию и необоснованным заявкам на него.

3. Учет косвенных затрат в оценке продукции существенно изменит соотношение оценок для многих видов продукции и услуг. Значительно более высокую оценку, чем теперь (по сравнению с другими), получают те виды продукции и услуг, производство которых связано с использованием особенно большого и недостаточного оборудования: уголь, металл, нефть, железнодорожные перевозки, электроэнергия. Такое повышение оценок этих важнейших и дефицитных видов продукции не только не воспрепятствует использованию всего возможного объема их производства, а наоборот, будет способствовать наиболее целесообразному его направлению и полному использованию, а также создаст стимул и экономические возможности для еще большего роста их производства и максимальной их экономии и замене менее дефицитными.

4. Отсутствие искажений в оценке продукции, связанных с неправильным учетом косвенных затрат, а также построение оценок продукции в соответствии с конкретной обстановкой обеспечивает реальность получаемых соотношений оценок для различных видов продукции и услуг. Это должно создать гораздо более полное, чем в настоящее время, соответствие между материальными и денежными балансами, должно повысить роль рубля в планировании, в экономических показателях, в хозрасчете.

5. Включение косвенных общественных затрат в оценку продукции, а также объективное, количественное отражение в экономических показателях ряда важных элементов, характеризующих общую экономическую обстановку, обеспечит возможность более полного согласования экономических решений отдельных предприятий с народнохозяйственными задачами. При этом оно дает эффективную возможность известной децентрализации в планово-экономических решениях с сохранением правильности их с общегосударственной точки зрения.

В заключение нужно подчеркнуть, что правильное применение закона стоимости, в частности, подсчет общественно-необходимого времени в соответствии с конкретной обстановкой, имеет особенно большое значение в условиях военного времени, когда постоянное изменение экономики требует гибкого анализа, непрерывно отражающего эти изменения.

(1943 г.)



## Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков<sup>\*)</sup>

Предметом данной статьи является изложение новых, более совершенных и универсальных методов решения некоторых вопросов математического характера, связанных с рационализацией грузопотоков. Несмотря на большую работу, проведенную работниками железнодорожного транспорта по ликвидации нерациональных перевозок, проблема рационализации грузопотоков продолжает оставаться актуальной.

В одних случаях (встречные перевозки) возможности уменьшения затрат на транспорт видны непосредственно, в других случаях возможность уменьшения затрат связана с довольно сложным и сразу неочевидным перемещением грузопотоков, а потому может остаться незамеченной и неиспользованной.

Первая задача (задача А), которая рассматривается ниже, — организация наиболее рациональной перевозки однородного груза от пунктов производства к пунктам потребления. При этом объемы производства и потребления в каждом пункте считают заданными; также заданы затраты, связанные с передвижением вагона груза из одного пункта в другой. Требуется узнать, как следует прикрепить пункты потребления к пунктам производства (учитывая заданные объемы производства и потребления), чтобы получить наилучший с точки зрения народного хозяйства вариант перевозки данного груза. Под таким вариантом мы разумеем тот, для которого общая сумма затрат по передвижению данного груза будет минимальной<sup>1)</sup>.

Сначала мы излагаем общие соображения, на которых основаны развиваемые нами методы, затем показываем на нескольких примерах процесс решения поставленной задачи. Предлагаемый способ является эффективным; даже в весьма сложных случаях решение задачи может быть найдено в короткий срок.

Далее мы рассматриваем более сложную задачу (задача В), когда имеется несколько различных однородных грузов, а также ряд грузов с точно определенными пунктами назначения и отправления; в данном случае при планировании перевозок имеет важное значение вопрос о питании порожняком. Решение этого вопроса приводит к решению нескольких задач типа задачи А и потому может быть осуществлено теми же методами.

Ниже рассматривается задача В, отличающаяся от задачи А некоторым усложнением условий, а именно: некоторые магистрали имеют пропускную способность

---

<sup>\*)</sup>Совместно с М. К. Гауриным. Впервые направлено в печать (в журнал «Железнодорожный транспорт») в декабре 1940 г. Опубликовано в 1949 г. в сборнике «Проблемы повышения эффективности работы транспорта» — Изд-во АН СССР. — С. 110-138.

<sup>1)</sup>Задача А рассматривается в статье А. Толстого («Социалистический транспорт». — 1939. — № 9. — С. 28-51); однако в ней не дано законченного общего метода ее решения. См. также его брошюру «Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов». — Трансжелдориздат. — 1941. — С. 101; здесь подробно рассмотрены виды нерациональных перевозок и существующие методы анализа вопроса.

меньшую, чем мощность грузопотоков, для которых кратчайший путь проходит через данную магистраль. В этом случае приходится часть груза направлять круговым путем, и нужно добиться того, чтобы связанное с этим увеличение затрат оказалось минимальным. Решать задачи подобного типа возможно при помощи тех же методов.

Наконец, в заключение мы указываем на некоторые дополнительные обстоятельства, которые надо учитывать и на основании которых следует корректировать полученную схему перевозок.

### Задача А. Общие принципы

Рассмотрим задачу о наиболее целесообразном прикреплении пунктов потребления однородного груза к пунктам производства.

Суточный размер производства или потребления в вагонах (или тоннах) будем считать указанным<sup>2)</sup>; на схемах мы будем писать число вагонов (тонн) в скобках около данного пункта — со знаком плюс у пунктов производства и со знаком минус у пунктов потребления. Затраты по передвижению вагона груза из одного пункта в другой будем считать заданными и на схемах будем отмечать их цифрой посередине участка, соединяющего данные пункты. Решение задачи заключается в том, чтобы найти такое приращение пунктов потребления к пунктам производства, при котором сумма затрат на транспорт была бы наименьшей. Казалось бы, что решение вопроса должен давать принцип кратчайших расстояний — приращение пунктов потребления к ближайшим, т. е. дающим минимальные затраты по доставке, пунктам производства. Однако проведение этого принципа в чистом виде оказывается невыполнимым даже в простейших случаях; частичное же выполнение его может привести к неправильному решению. Поясним это на двух весьма простых схемах.

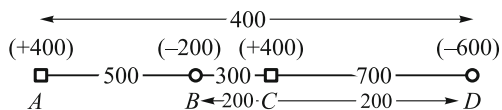


Рис. 1

Для случая, изображенного на рис. 1, ближайшим к пункту  $B$  пунктом производства является  $C$ . Однако если мы отправим 200 вагонов из  $C$  в  $B$ , то в пункт  $D$ , кроме остающихся 200 вагонов из  $C$ , нужно будет направить 400 вагонов из  $A$ . В результате получится явно нерациональный план перевозок, так как имеются встречные перевозки<sup>3)</sup>.

<sup>2)</sup>Предполагаем, что пункты погрузки и выгрузки указаны точно (железнодорожные станции). Если же погрузка или выгрузка указана по экономическим или административным районам, то такие районы можно заменять условно определенными станциями.

<sup>3)</sup>Между прочим, на подобный нерациональный план перевозок может натолкнуть единая цена франко-станция отправления. При такой цене предприятию пункта  $B$  выгоднее получать снабжение из  $C$ , чем из  $A$ , и оно может добиться приращения к пункту  $C$ ; тогда встречные перевозки окажутся неизбежными.

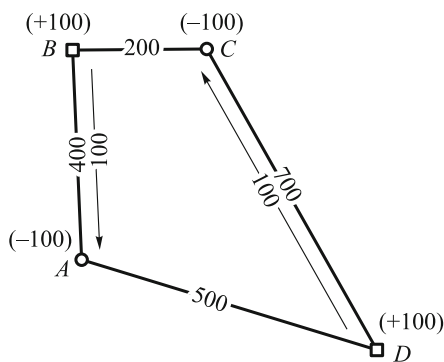


Рис. 2

В схеме, изображенной на рис. 2, прикрепляя  $A$  к  $B$ , мы также берем ближайший пункт производства. Однако данный план нерационален, так как сумма затрат для него составит  $400 \times 100 + 700 \times 100 = 1100 \times 100$ , тогда как, прикрепляя  $A$  к  $D$  и  $C$  к  $B$ , мы получили бы сумму затрат, равную

$$500 \times 100 + 200 \times 100 = 700 \times 100.$$

В последнем примере встречных перевозок не имеется, и нерациональность плана становится ясной только путем сравнения с другим вариантом. В данном случае вариантов два; од-

нако в более сложном, реальном случае число их может быть велико и потому непосредственное сравнение всех вариантов может оказаться практически неосуществимым.

Перейдем к изложению нашего метода, который позволяет избежать такого сравнения многих вариантов и даст возможность кратким путем проверить, является ли данный план наилучшим, и в том случае, если это не так, указать способ его исправления. Основным для этого метода является понятие особой величины, которую мы будем называть потенциалом перевозок.

Обозначим через  $A, B, C, \dots$  все пункты, между которыми мы планируем перевозки, и пусть  $\overline{AB}$  означает затраты на перевозку единицы груза из пункта  $A$  в пункт  $B$ . Пусть дан некоторый план перевозок из пунктов производства в пункты потребления. Мы будем называть план потенциальным, если с каждым из пунктов  $A, B, C, \dots$  можно связать некоторую величину  $U$ :  $U_A, U_B, U_C, \dots$ , таким образом, чтобы удовлетворялись два следующих условия:

**I условие.** Разность значений величины  $U$  для любого пункта потребления  $B$  и пункта производства  $A$  не превосходит затраты (на единицу груза) по перевозке из  $A$  в  $B$ :

$$U_B - U_A \leq \overline{AB}.$$

**II условие.** Если при данном плане предусмотрена перевозка из  $A$  в  $B$ , то разность значений  $U$  совпадает с этой затратой:

$$U_B - U_A = \overline{AB}.$$

Такую величину  $U$  будем называть потенциалом перевозок, отвечающим данному плану.

Это название становится понятным, если привести следующую аналогию. Пусть запланирована перевозка из пункта  $A$  в пункт  $B$  и для перехода из  $A$  в  $B$  нужно преодолеть подъем  $A$ . Тогда высота (потенциал) пункта  $B$  будет превосходить на  $A$  высоту (потенциал) пункта  $A$ , т. е. разность потенциалов в этих пунктах будет равняться подъему  $h$ . Поэтому, если затраты на перевозку представить себе именно так, как подъем, то это будет соответствовать условию II. Очевидно, что если имеется некоторый другой путь, соединяющий пункты  $A$  и  $B$ , то подъем  $\overline{AB}$  при

нем должен быть не меньше разности высот этих пунктов — разности потенциалов. Это соответствует условию I.

Пусть нам дан некоторый план перевозок. Как узнать, будет ли он потенциальным, и как построить потенциал в том случае, если он существует?

Для построения потенциала мы должны использовать те пары пунктов, между которыми предусмотрены перевозки, так как для таких пар пунктов мы знаем разность значений потенциала (равную, согласно условию II, затратам на перевозку единицы груза из одного пункта в другой). По этим разностям нам и надлежит определить потенциал во всех пунктах. Поскольку нам заданы только разности значений потенциала, потенциал сохранит свои свойства, если мы изменим его значения во всех пунктах на одну и ту же постоянную величину. Таким образом, мы можем принять значение потенциала в одном пункте произвольным. Пусть, например, этот выбранный нами пункт есть пункт производства  $A$ . Тогда мы сможем определить значение потенциала в тех пунктах потребления, в которые, согласно плану, этот пункт отправляет свой груз. Пусть это будут пункты  $B_1, B_2, \dots$ . Затем мы сможем определить значение потенциала в тех пунктах производства, которые также направляют свой груз в один из пунктов  $B_1, B_2, \dots$ .

Таким путем, переходя от одного пункта к другому, мы сможем последовательно пытаться определять потенциал во всех пунктах. Однако не всегда можно это сделать, не приходя в противоречие с условием I. Чтобы уяснить себе этот вопрос, начнем с примеров.

Правильный план перевозок для задачи, данной на рис. 1, очевиден: надлежит отправить из  $A$  в  $B$  200 вагонов и 200 вагонов в  $D$ , сверх того 400 вагонов из  $C$  в  $D$ . Определим потенциал для этого плана. Примем, например,  $U_A = 0$ . Так как из  $A$  совершается перевозка в  $B$  с затратой 500, то  $U_B - U_A$  должно быть равно 500, т. е.  $U_B = 500$ . Так как для перевозки из  $A$  в  $D$  требуются затраты 1500, то  $U_D = 1500$ . Наконец, так как происходит перевозка из  $C$  в  $D$  с затратой в 700, то  $U_D - U_C = 700$ , или  $U_C = U_D - 700 = 1500 - 700 = 800$ .

Напротив, если бы мы попытались строить потенциал для первоначального плана, приведенного на рис. 1, то эта попытка не удалась бы. Действительно, полагая опять  $U_A = 0$ , мы должны были бы принять  $U_D = 1500$ , так как совершается перевозка из  $A$  в  $D$ , и далее  $U_C = 800$ ,  $U_B = 1100$ . Тогда для пунктов  $A$  и  $B$  оказывается нарушенным условие I, а именно, получаем  $U_B - U_A = 1100 > \overline{AB} = 500$ , т. е. в противоречии с условием.

В качестве третьего примера рассмотрим схему и план перевозок, приведенные на рис. 2. Примем  $U_B = 0$ ; тогда по условию II должны иметь:  $U_A = 400$ . Так как точка  $D$  не связана грузопотоками с  $A$  и  $B$ , значение потенциала в ней не определено. Обозначим это неизвестное значение через  $\alpha$ :  $U_D = \alpha$ . В таком случае мы должны иметь:  $U_C = \alpha + 700$ . Посмотрим, возможно ли хотя бы при каком-либо значении  $\alpha$  выполнить условие I.

Применяя его к пунктам  $B$  и  $C$ , получаем:

$$U_C - U_B = \alpha + 700 \leq 200,$$

а применяя к пунктам  $A$  и  $D$ , получим:

$$U_A - U_D = 400 - \alpha \leq 500.$$

Таким образом, с одной стороны, должно быть  $\alpha \leq -500$ , с другой,  $\alpha \geq -100$ . Отсюда ясно, что такого  $\alpha$  не существует, а потому для данного плана нельзя построить потенциал, удовлетворяющий обоим условиям (I и II). Следовательно, план непотенциальный.

В первом примере был взят наивыгоднейший исходный план, и он оказался потенциальным, в последних двух — план не был наивыгоднейшим и оказался непотенциальным. Всегда потенциальный план есть и наивыгоднейший, и наоборот. Точнее говоря, справедливы следующие два положения.

**Положение 1.** Если для данного плана имеется потенциал перевозок, то этот план является наивыгоднейшим, т. е. всякий другой план дает не меньшие суммарные затраты.

Через  $A_1, A_2, \dots, A_m$  обозначим пункты производства, соответственно через  $a_1, a_2, \dots, a_m$  — объем производства (в вагонах) в этих пунктах; через  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — пункты потребления и через  $b_1, b_2, \dots, b_n$  — объемы потребления в них. Очевидно, должно быть  $\sum_i a_i = \sum_k b_k$ . Через  $r_{ik} = \overline{A_i B_k}$  обозначим затраты по перевозке вагона груза из пункта  $A_i$  в  $B_k$ . Через  $h_{ik}$  обозначим число вагонов, направляемых из пункта  $A_i$  в  $B_k$  согласно данному плану перевозок (если перевозка не совершается, то  $h_{ik} = 0$ ). По смыслу величин  $h_{ik}$  должно быть  $\sum_k h_{ik} = a_i$  и  $\sum_i h_{ik} = b_k$ .

Согласно предположению, для данного плана имеется потенциал перевозок — величина  $U$ , удовлетворяющая условиям I и II, которые при введенных обозначениях можно записать так:

$$I. U_{B_k} - U_{A_i} \leq r_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n).$$

II. Если перевозка из  $A_i$  в  $B_k$  фактически осуществляется, т. е.  $h_{ik} \neq 0$ , то  $U_{B_k} - U_{A_i} = r_{ik}$ .

Подсчитаем сумму затрат по перевозкам при данном плане. Она равна

$$W = \sum_i \sum_k h_{ik} r_{ik} = \sum_i \sum_k (U_{B_k} - U_{A_i}) h_{ik}.$$

Действительно, если  $h_{ik} \neq 0$ , то соответственные произведения, стоящие в обеих частях равенства, равны между собой в силу условия II; если же  $h_{ik} = 0$ , то они оба равны нулю и равны между собой. Преобразуя дальше, получаем:

$$W = \sum_k U_{B_k} \sum_i h_{ik} - \sum_i U_{A_i} \sum_k h_{ik} = \sum_k U_{B_k} b_k - \sum_i U_{A_i} a_i.$$

Пусть теперь дан некоторый другой план перевозок. Число вагонов, направляемых из  $A_i$  в  $B_k$  по этому плану, обозначим через  $h'_{ik}$ . Подсчитаем и оценим суммарные затраты по этому плану. Используя условие I, имеем:

$$\begin{aligned} W' &= \sum_i \sum_k h'_{ik} r_{ik} \geq \sum_i \sum_k (U_{B_k} - U_{A_i}) h'_{ik} = \sum_k U_{B_k} \sum_i h'_{ik} - \sum_i U_{A_i} \sum_k h'_{ik} = \\ &= \sum_k U_{B_k} b_k - \sum_i U_{A_i} a_i = W. \end{aligned}$$

Итак,  $W' \geq W$ , т. е. действительно план, для которого имеется потенциал, дает наименьшие суммарные затраты.

Установленное предложение показывает, что если некоторый план дается в сопровождении потенциала перевозок (конечно, с выполнением условий I и II), то это служит гарантией того, что он наивыгоднейший. Верно также положение, обратное первому:

**Положение 2.** *Всякий наивыгоднейший план является и потенциальным, т. е. для него существует потенциал перевозок, удовлетворяющий условиям I и II.*

Полного доказательства этого положения приводить не будем, покажем лишь его идею, которая сводится к тому, что если для данного плана попытка построить потенциал не удастся, то это объясняется нерациональностью плана. Следовательно, имея наивыгоднейший план, потенциал перевозок всегда можно построить. Покажем это на примере. На рис. 3 показан сплошными линиями заданный план перевозок (кроме изображенных на схеме станций и грузопотоков могут быть еще и другие, здесь не приведенные).

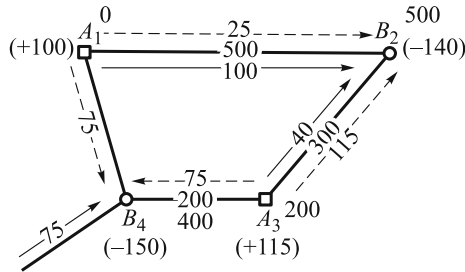


Рис. 3

Начнем определение потенциала с пункта  $A_1$  и положим, например,  $U_{A_1} = 0$  (значение потенциала в точке мы записываем рядом с ней). Из  $A_1$  совершается перевозка в  $B_2$ , так что мы должны принять, по условию II,

$$U_{B_2} - U_{A_1} = \overline{A_1 B_2} = 500,$$

откуда  $U_{B_2} = 500$ . Далее, в  $B_2$  производится перевозка из  $A_3$ , так что  $U_{A_3}$  мы должны определить из условия

$$U_{B_2} - U_{A_3} = \overline{A_3 B_2} = 300.$$

Отсюда  $U_{A_3} = 500 - 300 = 200$ . Таким же образом  $U_{B_4}$  мы должны определить из условия

$$U_{B_4} - U_{A_3} = 200.$$

Следовательно,  $U_{B_4} = 200 + 200 = 400$ .

Допустим, что здесь мы обнаружили нарушение условия I и что затраты на перевозку из  $A_1$  в  $B_4$  по прямому пути будут меньше, чем разность потенциалов в этих точках:

$$\overline{A_1 B_4} < U_{B_4} - U_{A_1} = 400.$$

Это сразу показывает, что данный план можно улучшить, снизив общий объем перевозок. Для этого нужно направить 75 вагонов груза из  $A_1$  непосредственно в  $B_4$ , и соответствующим образом изменить остальные перевозки. Получим схему перевозок, изображенную пунктирными линиями. Сравним затраты на перевозки (в пределах данной части схемы) при обоих вариантах. При первом варианте они равны

$$W_1 = 100 \times 500 + 40 \times 300 + 75 \times 200,$$

при втором

$$W_2 = 25 \times 500 + 115 \times 300 + 75 \times \overline{A_1 B_4} = 100 \times 500 + 40 \times 300 + 75 \times (500 - 300 + 200 - \overline{A_1 B_4}) = W_1 - 75 \times (400 - \overline{A_1 B_4}).$$

Так как разность  $400 - \overline{A_1 B_4}$ , по предположению, положительна, то  $W_2 < W_1$  и исправленный план экономичнее первоначального.

Таким же образом всякий раз, когда мы, пытаясь построить на основании условия II потенциал перевозок для данного плана, нарушим условие I, это укажет на некоторую нерациональность плана и на способ, которым его можно улучшить.

Сделаем следующее замечание. Мы в нашем примере провели операцию исправления плана, которую будем называть снятием с кругного пути некоторого числа вагонов и направлением их по прямому пути. В рассмотренном примере мы сняли с кругного пути ( $A_1-B_2-A_3-B_4$ ) 75 вагонов, т. е. уменьшили перевозки на тех участках этого пути, по которым перевозки производятся в направлении от  $A_1$  к  $B_4$  и для сохранения баланса в промежуточных пунктах увеличили на 75 вагонов перевозки на участках пути, по которым перевозки производятся в обратном направлении. При этом баланс нарушился только в крайних пунктах  $A_1$  и  $B_4$ , а затраты на перевозку уменьшились на величину

$$75(U_{B_4} - U_{A_1}).$$

Для сведения баланса и в этих пунктах мы должны были направить 75 вагонов груза по прямому пути из  $A_1$  в  $B_4$ , что вызвало увеличение затрат на  $75 \times \overline{A_1 B_4}$ . Общая экономия, таким образом, выражается величиной

$$75(U_{B_4} - U_{A_1} - \overline{A_1 B_4}).$$

Таким же образом и вообще, если в двух пунктах,  $A$  и  $B$ , потенциал определен, то с кругного пути, соединяющего эти пункты (составленного из участков, вдоль которых определяется потенциал), можно снять некоторое число  $m$  вагонов (наименьшее число, которое встречается на стрелках, идущих в направлении от  $A$  к  $B$ ), так что баланс перевозок сохранится во всех пунктах этого пути, кроме крайних  $A$  и  $B$ . Затраты при этом уменьшатся на величину

$$m(U_B - U_A).$$

Иными словами, разность потенциалов всегда, так сказать, «реализуема».

Сформулированные выше два положения служат базой для всех излагаемых ниже методов нахождения наивыгоднейшего плана.

Пусть дан какой-нибудь план. Определяем последовательно от пункта к пункту потенциал. Если его удастся определить (с соблюдением условий I и II), то это будет служить гарантией того, что план наивыгоднейший. Обычно, если данный план взят на глаз, это будет не так, и при определении потенциала мы встретим противоречия (нарушение условий I и II); план будет заведомо не наивыгоднейший. При этом рассуждения, проведенные при рассмотрении положения 2, показывают, при помощи какого исправления можно уменьшить затраты. На этом и основан метод решения задачи А, изложенный в следующем разделе.

### Задача А

Здесь изложен метод нахождения наивыгоднейшего плана перевозок, который опирается на основные предложения, доказанные выше. При этом мы будем различать две задачи. Задача проверки того, является ли данный план наивыгоднейшим, и задача нахождения наивыгоднейшего плана прикрепления пунктов производства к пунктам потребления. Далее мы рассмотрим последовательно два случая — когда все пункты в плане связаны между собой и когда пункты разбиваются на несколько групп, не связанных грузопотоками одна с другой.

При рассмотрении примеров, не имея других данных о затратах по перевозкам (например, о себестоимости), мы берем в качестве меры затрат вагоно-километры или, что то же самое, тонно-километры, как это обычно принимается на транспорте. Следовательно, наивыгоднейшим мы считаем план, дающий при соблюдении прочих условий минимальный вагоно-километраж. В этом случае затраты по перевозке на один вагон (выраженные в вагоно-километрах) равны расстоянию между пунктами. Следует сказать, что это является совершенно несущественным — метод решения не зависит от принятого способа измерения затрат, и так же точно приведет к результату, если затраты будут измерены более совершенным образом.

Отметим еще, что, говоря выше о потенциале, мы определяли его только в пунктах погрузки и назначения. Однако при решении примеров иногда бывает выгодно определять его и в других пунктах (узлах); это всегда возможно в случае наивыгоднейшего плана без нарушения основных условий для потенциала. Наконец, обратим внимание на то очевидное обстоятельство, что если условия I и II для потенциала будут выполняться для любой пары соседних пунктов, т. е. связанных каким-то участком железнодорожного пути непосредственно, без захода в другие рассматриваемые пункты, то эти условия будут соблюдаться и всегда. Это замечание существенно облегчит проверку выполнения основных свойств потенциала<sup>4)</sup>.

Покажем, прежде всего, на примерах, как проверить то, что план прикрепления является наивыгоднейшим. В этом случае нет необходимости иметь полный план перевозок с указанием их объема, а достаточно иметь схему грузопотоков. Рассмотрим схему, представленную на рис. 4. На схеме приведены расстояния между пунктами, а стрелками показаны направления грузопотоков. Как и выше,

---

<sup>4)</sup> Отметим, что когда речь идет не о вагоно-километрах, а о другом измерении, то последние два упрощающих соображения будут верны, если измеритель такой, что всегда  $AB + BC = AC$ , если кратчайший путь из  $A$  к  $C$  проходит через  $B$ .



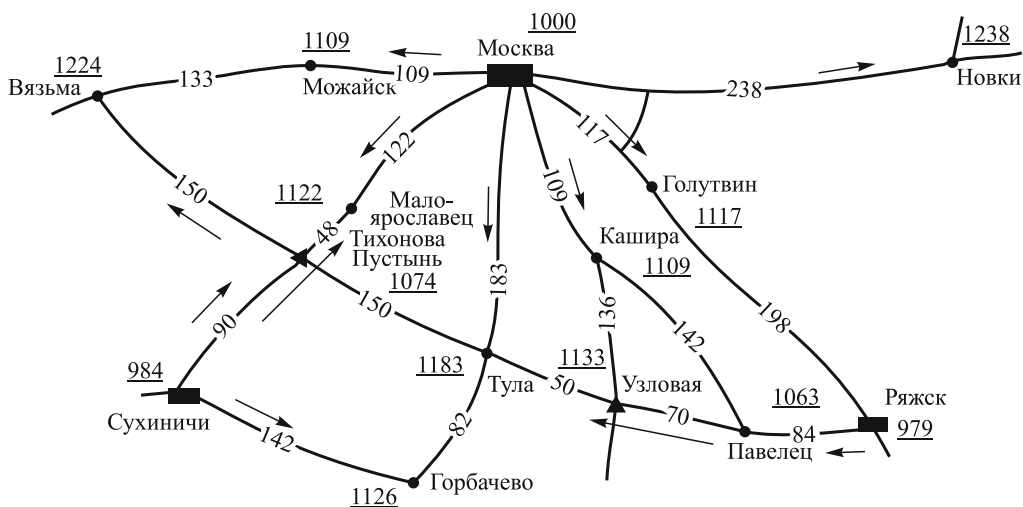


Рис. 4

пункты производства (погрузки) изображены прямоугольниками, пункты потребления — кружками, остальные (узловые) станции — треугольниками.

Для проверки правильности плана строим потенциал. Для Москвы принимаем его равным 1000. Так как из Москвы производится перевозка в Новки, значение потенциала для Новки (по условию II) равно  $1000 + 238 = 1238$ . Таким же образом для Голутвина это значение равно 1117, для Каширы 1109, для Тулы 1183.

Далее, в Тулу производится перевозка из Рязьска, поэтому в Рязьске потенциал должен быть меньше на величину, равную расстоянию между ними:  $50 + 70 + 84 = 204$ , т. е. потенциал для Рязьска равен  $1183 - 204 = 979$ . Попутно определяется потенциал для Павельца:  $979 + 84 = 1063$  и Узловой: 1133. Затем определяется потенциал для Малоярославца:  $1000 + 122 = 1122$ , для Сухинич:  $1122 - (90 + 48) = 984$ , Тихоновой Пустыни:  $984 + 90 = 1074$ , Горбачева:  $984 + 142 = 1126$ , Вязьмы:  $1074 + 150 = 1224$ , Можайска:  $1000 + 109 = 1109$ .

Итак, потенциал определен во всех случаях. Проверим, будет ли выполнено условие I. Достаточно сравнить значение потенциала в тех соседних пунктах, для которых оно получено разным путем. Рассмотрим следующие пары пунктов:

Голутвин — Рязьск.....	$1117 - 979 = 138 < 198$
Кашира — Павелец.....	$1409 - 1063 = 46 < 142$
Узловая — Кашира.....	$1133 - 1109 = 24 < 136$
Тула — Горбачево.....	$1183 - 1126 = 57 < 82$
Тула — Тихонова Пустынь	$1183 - 1074 = 109 < 150$
Вязьма — Можайск.....	$1224 - 1109 = 115 < 133$

Во всех случаях разность потенциалов меньше расстояния, т. е. условие I соблюдено. Это доказывает, что план не содержит нерациональных перевозок (в отношении правильности прикрепления).

Заметим, что при анализе плана нет надобности составлять потенциал для всех пунктов: его можно не находить для тех пунктов, где рациональность плана не вызывает сомнений (например, для станции Новки на рис. 4). Для таких пунктов можно не определять их расстояний.

Полезно также проверять правильность плана параллельно с определением потенциала. Тогда, если план содержит нерациональные перевозки, это можно обнаружить, не находя потенциала для всех точек.

Проверка правильности плана прикрепления может быть с таким же удобством осуществлена вместо схемы путей по таблице расстояний и грузопотоков — «шахматке». Подобная таблица расстояний дана ниже (см. таблицу расстояний).

Таблица расстояний

Пункты назначения	Пункты отправления				
	<i>A</i> (500)	<i>B</i> (363)	<i>B</i> (247)	<i>Г</i> (438)	<i>Д</i> (35)
	Расстояния, км				
<i>a</i> (980)	567	617	1004	957	2099
<i>б</i> (1265)	765	1090	1018	835	1819
<i>в</i> (705)	658	955	458	267	1182
<i>г</i> (722)	222	552	690	616	1733
<i>д</i> (540)	508	808	293	120	1170
<i>e</i> (222)	1691	2017	1575	1335	187
<i>жс</i> (898)	398	725	837	765	1907
<i>з</i> (634)	617	924	439	226	1107
<i>и</i> (558)	375	434	311	427	1601
<i>к</i> (898)	842	1168	682	460	863
<i>л</i> (1224)	724	861	1157	1114	2255
<i>м</i> (838)	538	866	639	400	1072

В таблице указаны попарные расстояния между каждым из пяти пунктов отправления *A*, *B*, *B*, *Г*, *Д* и каждым из 12 пунктов назначения *a*, *б*, ..., *м*. Далее указывается, какой пункт из какого снабжается по плану; для этого соответствующее расстояние набрано курсивом. Например, то, что цифра 1018 в строке *б* против *B* выделяется, показывает, что в данном плане предусмотрено снабжение пункта *б* из *B*.

Для проверки того, что план наивыгоднейший, строим потенциал. Начинаем с пункта *A*, берем для него значение потенциала равным, например, 500. Так как из пункта *A* совершаются перевозки в пункты *б*, *г*, *жс*, *л*, то определяем потенциал для них; например, для *б* потенциал равен  $500 + 765 = 1265$  и т. д. (эти связи нанесены на рис. 5).

Далее, в пункт *б* перевозится груз также из *B* при расстоянии в 1018. Отсюда значение потенциала в пункте *B* должно быть принято равным  $1265 - 1018 = 247$ . После этого определяем потенциал в пунктах *в*, *д*, *и*, которые снабжаются из *B*. Продолжая таким же образом, определим значение потенциала во всех пунктах. Эти значения потенциалов приведены в таблице против обозначений соответствующих пунктов в скобках.

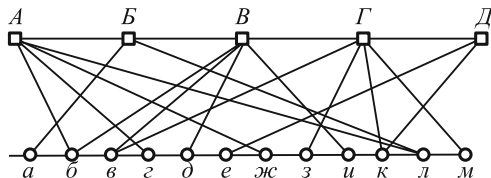


Рис. 5

Теперь проверим, выполнено ли для найденных значений потенциала условие I. Расстояние между каждым двумя пунктами должно быть не больше разности потенциалов в пунктах отправления и в пунктах назначения. Иначе говоря, потенциал в пункте назначения должен быть не больше суммы потенциала в пункте отправления и расстояния. Произведем, например, проверку для пункта *a*. Потенциал в нем равен  $U_a = 980$ , а указанные суммы равны соответственно:

для <i>a</i> и <i>A</i>	$500 + 567 = 1067 > 980$
для <i>a</i> и <i>Б</i>	$363 + 617 = 980 = 980$
для <i>a</i> и <i>В</i>	$247 + 1004 = 1251 > 980$
для <i>a</i> и <i>Г</i>	$438 + 957 = 1395 > 980$
для <i>a</i> и <i>Д</i>	$35 + 2099 = 2134 > 980$

т. е. во всех случаях «больше» за исключением пары *a* и *Б*, где стоит знак равенства, но это находится в соответствии с тем, что из *Б* в *a* перевозка действительно совершается. К такому же результату приводит и проверка для остальных пунктов (*б*, *в*, ..., *м*). Итак, для плана установлено наличие потенциала; следовательно, он невыгоднейший.

При выполнении этой проверки, как правило, нет надобности все указанные суммы выписывать и точно подсчитывать, так как за немногими исключениями знак неравенства виден сразу, на глаз. Также вообще нет нужды производить проверку для тех пар пунктов, относительно которых заведомо ясно, что перевозка из одного в другой не может быть рациональной и можно даже расстояния между этими пунктами в «шахматку» не включать.

Приведем теперь примеры такого рода, когда при построении потенциала обнаруживается нерациональность плана, и покажем, как он может быть в таком случае исправлен. Отметим, что для исправления плана уже недостаточно только указать направление грузопотоков, а необходимо иметь полный план перевозок.

Рассмотрим в качестве примера план, приведенный на рис. 6. На нем, кроме расстояний, указан объем производства или потребления в каждом пункте и объем перевозок (на стрелках). К Рязьску прикреплены ближайшие к нему пункты Павелец и частично Голутвин, к Сухиничам — Вязьма, Горбачево и частично Малоярославец; остальные пункты прикреплены к Москве. Составляем потенциал. Принимаем его для Москвы равным 1000 и определяем последовательно для пунктов: Новки —  $1000 + 238 = 1238$ , Голутвин —  $1000 + 117 = 1117$ , Рязьск —  $1117 - 198 = 919$ , Павелец —  $919 + 84 = 1003$ , Кашира —  $1000 + 109 = 1109$  (рис. 6). Делаем проверку для пунктов Кашира — Павелец:  $1109 - 1003 = 106 < 142$ , невязки нет. Далее составляем потенциал для Тулы:  $1000 + 183 = 1183$ . Сравниваем

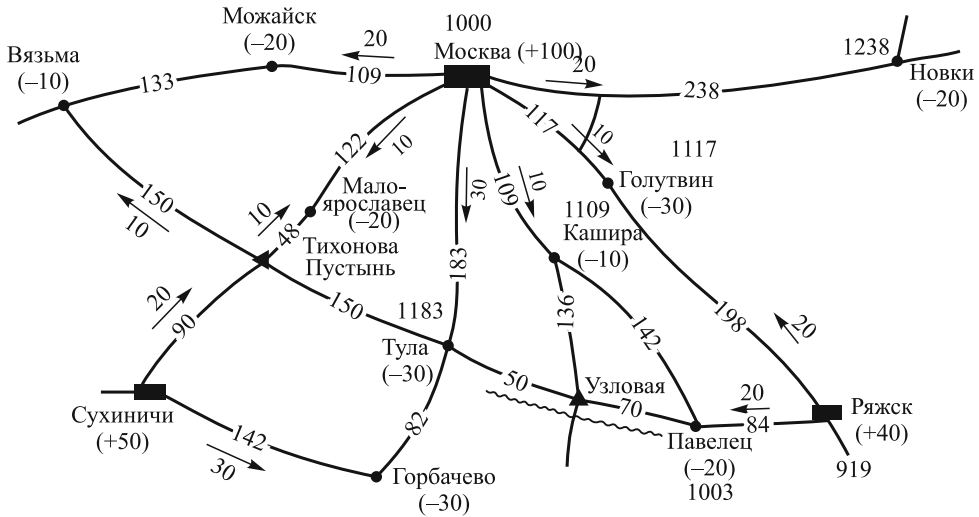


Рис. 6

пункты Тула — Павелец, находим:  $1183 - 1003 = 180 > 120$ . Разность потенциалов оказалась больше расстояния — невязка (нарушено условие I).

Каким путем получилась невязка? Соединяем пункты Тула и Павелец (от меньшего потенциала к большему) незамкнутым кольцом, составленным из пунктов, где потенциал определен: Павелец — Рязжск — Голутвин — Москва — Тула. Наименьшее число вагонов, идущих в этом направлении, 20 (участок Рязжск — Голутвин). Поэтому снимаем 20 вагонов в этом направлении, а именно: число вагонов на стрелках, идущих в этом направлении, уменьшаем на 20, а число вагонов на стрелках, идущих в противоположном направлении, на 20 увеличиваем, т. е. на стрелке на участке Павелец — Рязжск ставим 40, на участке Рязжск — Голутвин 0 (снимаем стрелку), на участке Москва — Голутвин 30, на участке Москва — Тула 10, на участке Павелец — Тула 20 (вместо 0). Иначе говоря, вносим следующие изменения: из Рязжска направляем 20 вагонов в Тулу, Голутвин из Рязжска больше не снабжаем, зато в Голутвин направляем 30 вагонов вместо 10 из Москвы, но из Москвы в Тулу вместо 30 направляем только 10 вагонов.

Полученную за счет исправления экономию в вагоно-километраже можем подсчитать непосредственно, учитывая добавленные и снятые перевозки. Получим:

$$20 \times 198 + 20 \times 183 - 20 \times 120 - 20 \times 84 - 20 \times 117 = 1200 \text{ вагоно-км.}$$

Это можно подсчитать и по упрощенному правилу, исходя из того, что сокращение вагоно-километража равно произведению величины устраненной невязки на число вагонов. В данном случае

$$20(1183 - 1003 - 120) = 1200 \text{ вагоно-км.}$$

Получающийся в результате указанного исправления план имеет схему направлений грузопотоков, которая приведена на рис. 4. Ее мы уже проверили; она соответствует наивыгоднейшему плану.

Вообще, если нам нужно не проверить план, а составить его по данным условиям, то поступаем таким образом. Составляем на глаз простейший план прикреплений; при этом только стараемся избежать явно нерациональных перевозок: встречных перевозок, пересекающихся грузопотоков. После этого проверяем план при помощи построения потенциала. Обнаружив невязки в потенциале, вносим исправления подобно проведенным в предыдущем примере. После нескольких исправлений приходим к наивыгоднейшему плану<sup>5)</sup>.

Приведем пример с несколькими такими исправлениями. Для ясности мы будем изображать последовательные приближения на отдельных чертежах. На практике в этом, конечно, нет нужды, и все решение проводится на одном чертеже. Исправления вносятся при помощи карандаша и резинки.

Задача изображена на рис. 7. На ней приведены пункты производства и потребления с указанием объема их при наших обычных обозначениях, а также составленный упрощенным путем исходный план.

Для проверки правильности составления плана строим потенциал. Принимаем его для Великих Лук равным 1000. Далее определяем его последовательно, как выше, для пунктов Невель, Новосокольники, Дно, Старая Русса, Валдай, Бологое, Лихославль, а также для Соблаго, Торжок. Для пунктов Лихославль и Торжок обнаруживается невязка:  $1322 - 1042 > 34$ . Для устранения ее по соединяющему круглому пути — пути определения потенциала: Лихославль — Бологое — Валдай — Старая Русса — Дно — Новосокольники — Невель — Великие Луки — Соблаго — Торжок, снимаем наименьшее встречающееся число вагонов, идущих в этом направлении, 65 (участок Великие Луки — Соблаго — Торжок), т. е. уменьшаем на 65 число вагонов на стрелках, идущих в этом направлении, и увеличиваем на противоположных. В результате приходим к плану, приведенному на рис. 8.

Экономию подсчитываем по указанному выше упрощенному правилу:

$$65(1322 - 1042 - 34) = 65 \times 246 = 15\,990 \text{ вагоно-км.}$$

Для этого плана опять строим потенциал (также начиная с Великих Лук), исправляя его значение в затронутых произведенным перемещением пунктах (в данном случае только в Торжке, а в Соблаго потенциал более не определен). Составляем далее потенциал для Ржева и обнаруживаем невязку для пунктов Торжок — Ржев. Для исправления ее снимаем 15 вагонов с пути Торжок — Лихославль — Бологое — Валдай — Старая Русса — Новосокольники — Невель — Великие Луки — Ржев. Уменьшение вагоно-километража составляет:

$$15 \times (1241 - 1076 - 102) = 15 \times 63 = 945 \text{ вагоно-км.}$$

Исправленный план приведен на рис. 9. На нем исправлен в соответствии с этим и потенциал в Ржеве. После этого продолжаем определение потенциала для пунктов Вязьма, а также для Батецкая, Новгород, Чудово, Луга. Для пунктов Чудово и Бологое невязки нет. Невязка обнаруживается для участка Луга — Псков:  $932 - 769 > 137$ .

---

<sup>5)</sup>Подчеркнем еще раз, что, говоря «наивыгоднейший план», мы имеем в виду план, наивыгоднейший в соответствии с принятой постановкой, т. е., что план дает нам наименьшие суммарные затраты при принятом способе их измерения среди всех планов, удовлетворяющих данным условиям.

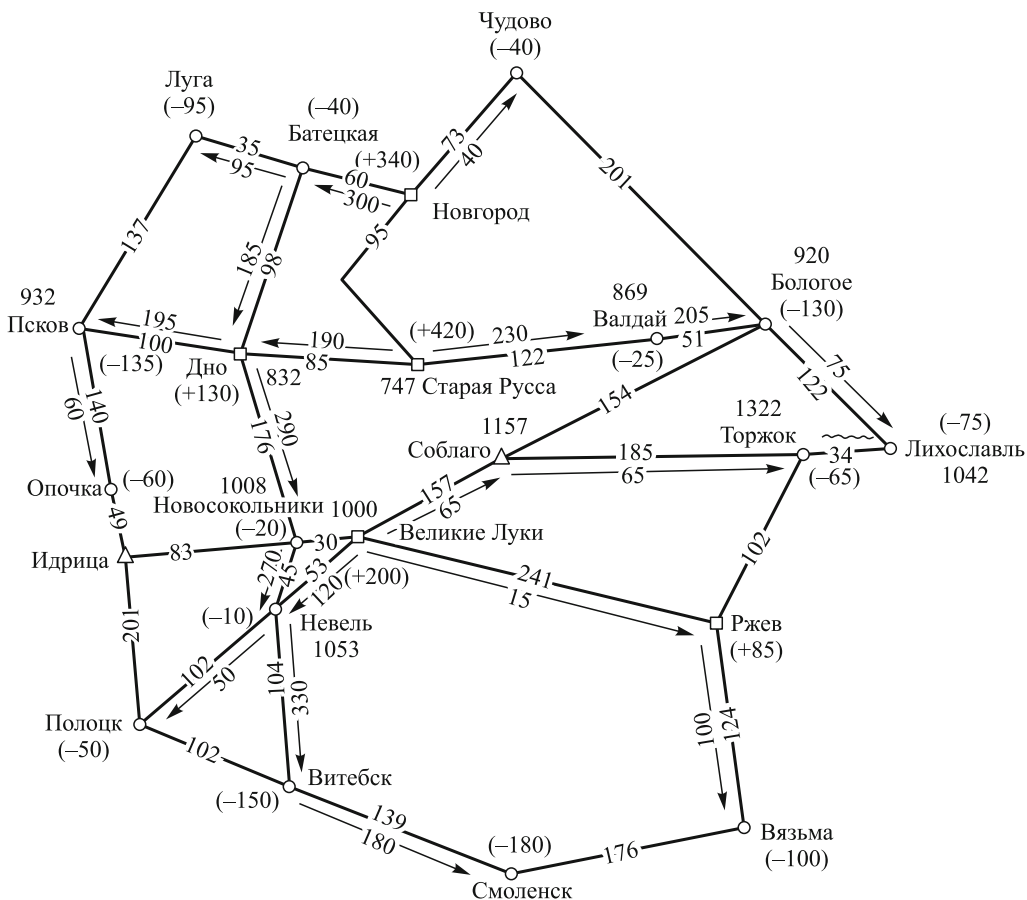


Рис. 7

Снимаем 165 вагонов на соединяющем их пути Луга — Батецкая — Дно — Псков. Выигрыш составляет:

$$165(932 - 769 - 137) = 165 \cdot 26 = 4290 \text{ вагоно-км.}$$

Исправленный план приведен на рис. 10. Исправляем в нем значение потенциала в пунктах Луга, Батецкая, Новгород, Чудово и продолжаем построение его для пунктов Опочка, Полоцк, Витебск, Смоленск. В этом плане никаких невязок более не обнаруживается, и он оказывается наиболее выгодным — дающим минимальный вагоно-километраж.

Всего при переходе от первоначальной схемы (рис. 7) к окончательной (рис. 10) получим уменьшение вагоно-километража в размере

$$15\,990 + 945 + 4290 = 21\,225 \text{ вагоно-км,}$$

что составляет примерно 7% от первоначального объема перевозок.

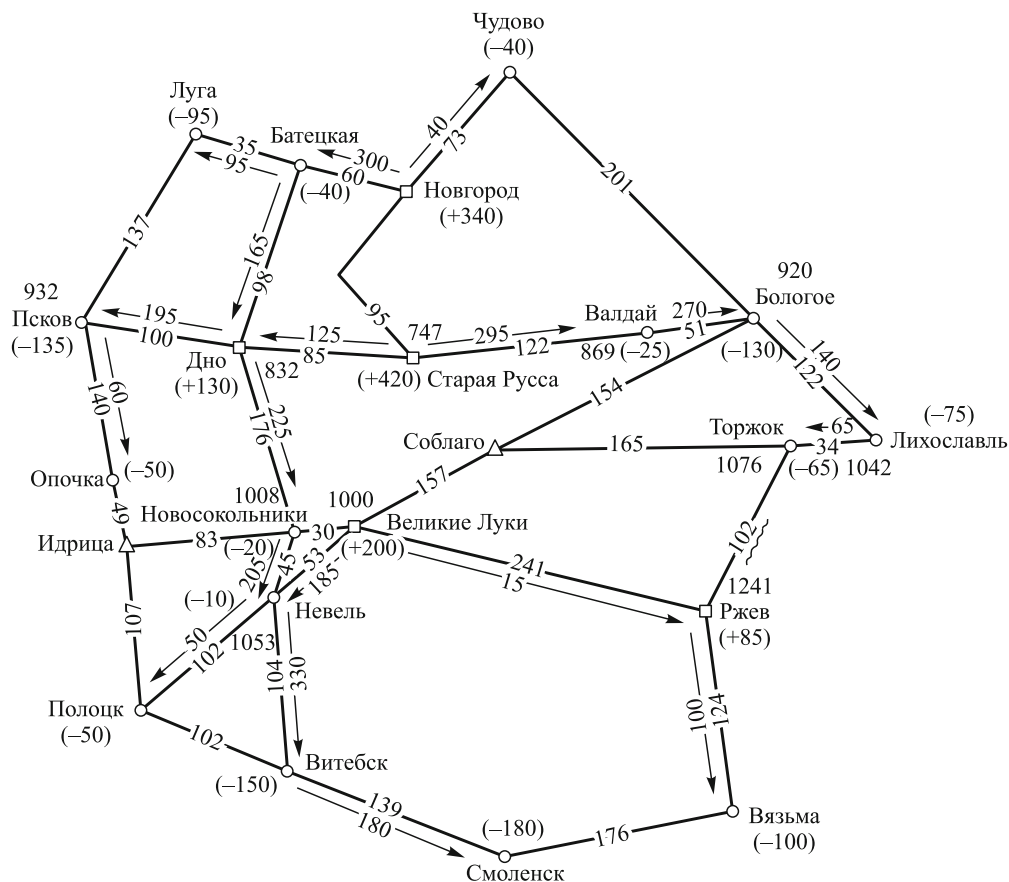


Рис. 8

Отметим попутно еще некоторые возможности применения потенциала перевозок. Предположим, что в составленный план, для которого построен потенциал, вносятся некоторые изменения в связи с изменением объема производства и потребления, однако настолько небольшие, что схема грузопотоков остается неизменной. В таком случае изменение в затратах на перевозки, как легко проверить, можно подсчитывать по формуле:

$$\Delta W = \sum_k U_{B_k} \Delta b_k - \sum_i U_{A_i} \Delta a_i,$$

где  $\Delta a_i$  и  $\Delta b_k$  — изменения в объемах погрузки и выгрузки. Если изменение коснулось лишь небольшого числа пунктов, то подсчет по этой формуле очень удобен.

В отдельных случаях желательно по тем или иным причинам отступать от плана, дающего минимальные затраты (в частности, вагоно-километраж). Так, например, при нежелании нарушить установившуюся связь между предприятиями, или для сохранения возможности маршрутизации и пр.

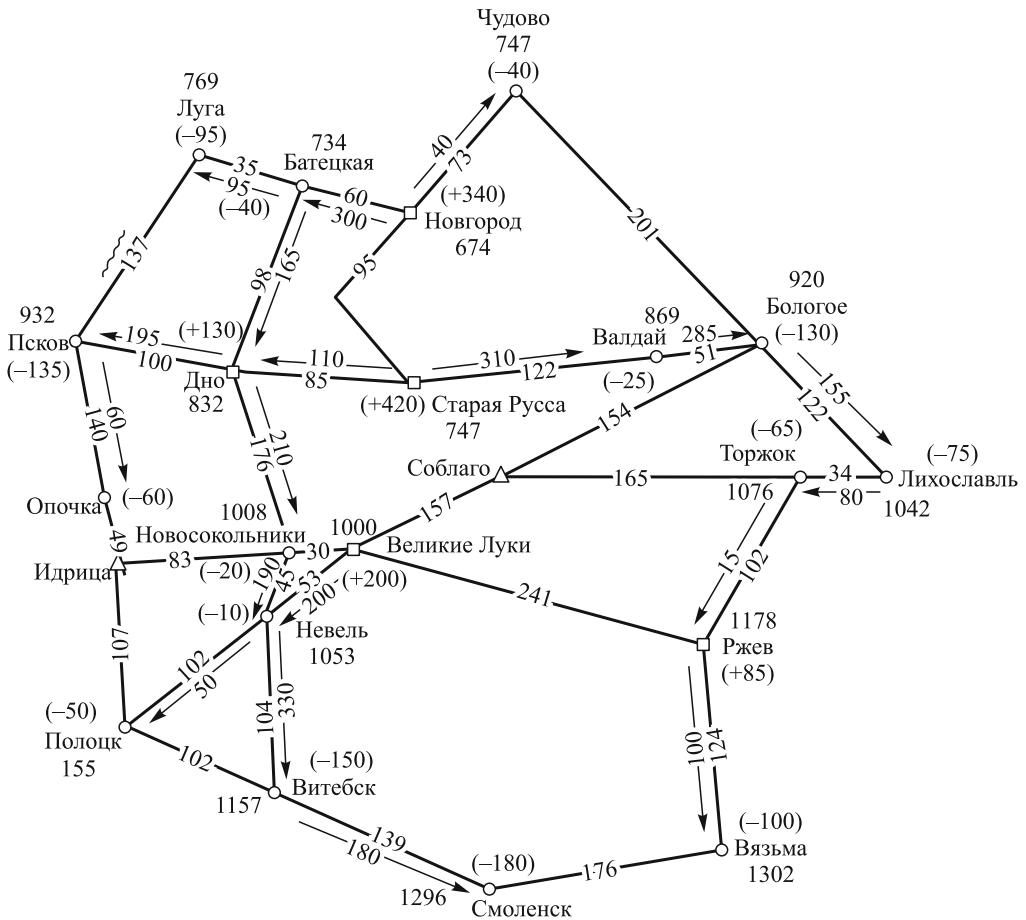


Рис. 9

Пользуясь потенциалом, легко (если отступление касается небольшого числа вагонов) подсчитать связанные с этим потери. Именно, если мы введем перевозку из пункта  $A$  в  $B$ , которая не предусмотрена наивыгоднейшим планом, то связанные с этим потери в суммарном тонно-километраже на один «неправильно направленный» вагон будут равняться

$$\overline{AB} - (U_B - U_A).$$

Так, если направить некоторое число вагонов из Новгорода через Старую Руссу в Болгое, сохранив баланс вагонов во всех пунктах, то потери на каждый вагон составят

$$268 - (920 - 700) = 48 \text{ вагоно-км.}$$

Рассмотрим теперь случай, когда грузопотоки разбиваются на несколько несвязанных между собой систем, и покажем, как в этом случае проверяется и исправляется план.



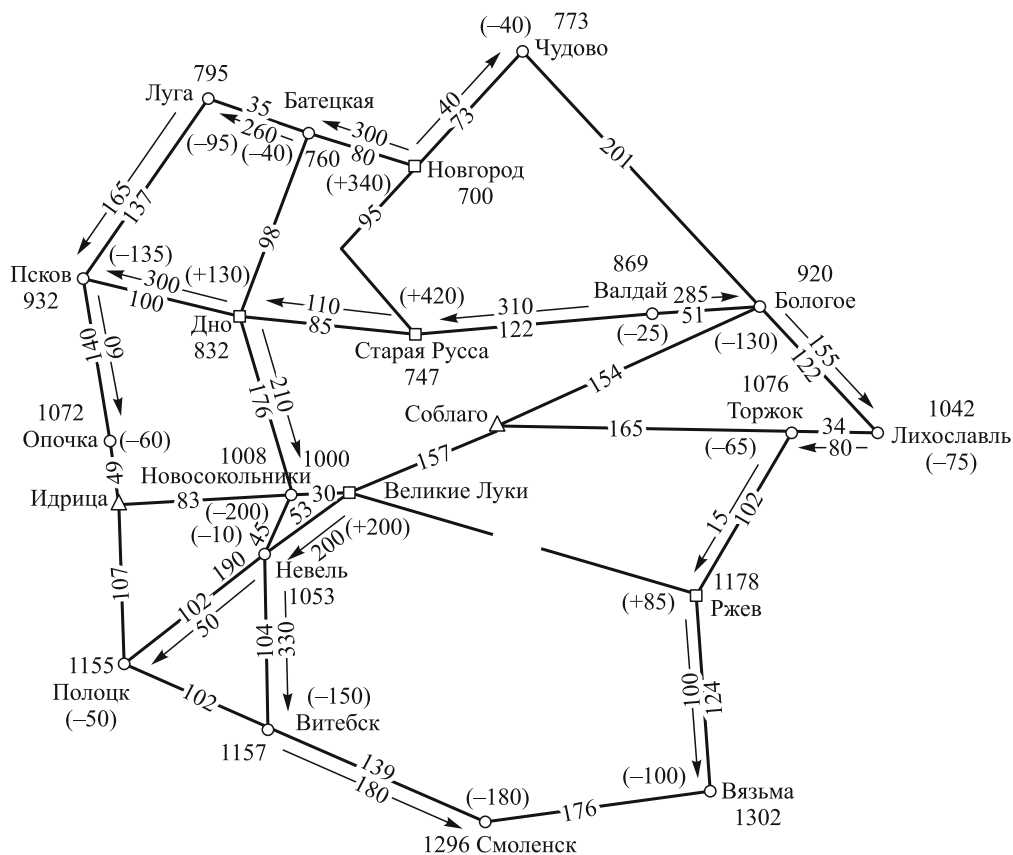


Рис. 10

План перевозок приведен на рис. 11. Строим потенциал для него. Приняв его для Москвы равным 1000, находим его значение для Можайска и Тулы. Остальные пункты не связаны перевозками с теми, для которых определен потенциал. Тогда применяем следующий прием. Вводим условную перевозку  $m$  вагонов на связывающем участке. Например, направляем  $m$  вагонов из Можайска в Вязьму (на рис. 11 показано пунктирной стрелкой).

Тогда получаем возможность определить значение потенциалов в пунктах Вязьма, Тихонова Пустынь, Малоярославец, Сухиничи, Горбачево. Производим проверку для пунктов Москва — Малоярославец, обнаруживаем невязку  $1140 - 1000 > 122$ . Однако в данном случае наличие невязки не свидетельствует еще о том, что имеются нерациональные перевозки. Именно, с пути Москва — Можайск — Вязьма — Тихонова Пустынь — Малоярославец мы можем снять со стрелок только  $m$  вагонов, так как в этом направлении встречается условная связь (пунктирная стрелка).

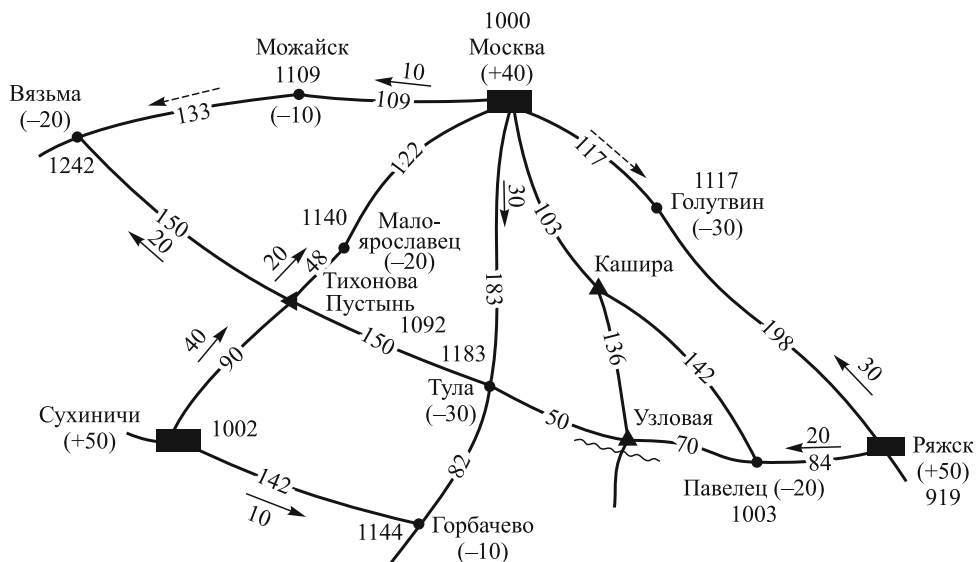


Рис. 11

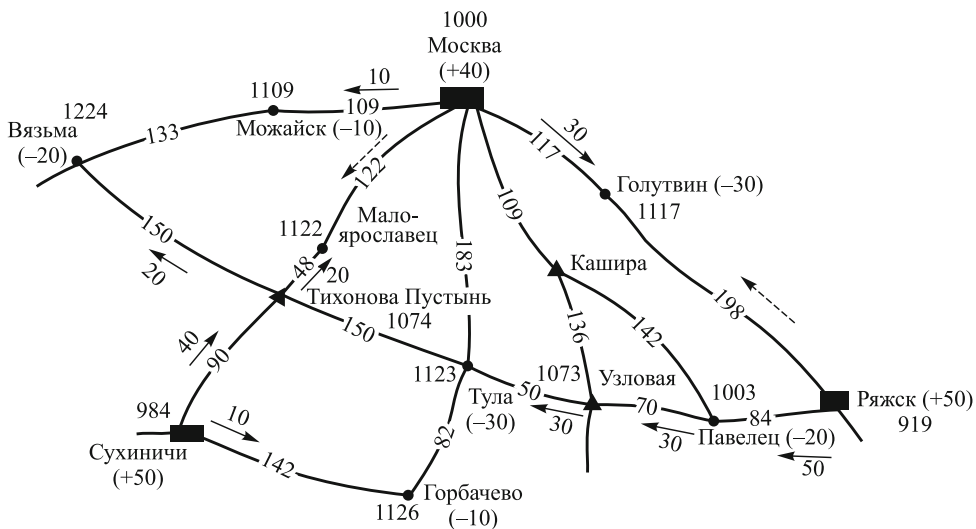


Рис. 12

Осуществление этого (снятия вагонов) приводит, таким образом, не к реальному изменению плана, а к введению условной связи Москва — Малоярославец вместо Можайск — Вязьма. В связи с этим уже иначе определяются потенциалы в пунктах: Малоярославец, Тихонова Пустынь, Вязьма, Сухиничи, Горба-

чево; именно, они должны быть уменьшены на величину исправленной невязки  $(1140 - 1000) - 122 = 18$ .

Эти изменения нанесены в левой части рис. 12. Таким образом, план прикрепления в этой части был правилен, и нам потребовалось только исправить значения потенциала. После этого возвращаемся к построению потенциала, который у нас еще не определен для ряда пунктов, так как они не связаны с прочими. Вводим новую условную связь на участке Москва — Голутвин, направляя  $m$  вагонов. После этого значение потенциала определяется последовательно в пунктах: Голутвин, Рязск, Павелец, как это показано на рис. 11.

При проверке пунктов Тула — Павелец обнаруживается невязка в  $1183 - 1003 > 120$ . На пути Павелец — Рязск — Голутвин — Москва — Тула наименьшее число вагонов, идущее в указанном направлении, 30. Снимаем по 30 вагонов со стрелок, идущих в противоположную сторону. Получаем изменение грузопотоков, в связи с чем также изменяется значение потенциала в пункте Тула. Изменения даны на правой части рис. 12. В данном случае невязка привела к действительному изменению плана и к сокращению вагоно-километража на

$$(1183 - 1003 - 120) \times 30 = 1800 \text{ вагоно-км.}$$

После указанных исправлений в плане, приведенном на рис. 12, для потенциала оказываются выполненными условия I и II. Следовательно, этот план наивыгоднейший.

Из этого примера ясно, что распадение грузопотоков на несвязанные части не вносит существенных затруднений в проверку и исправление плана перевозок. В такой же мере этот прием осуществим и в том случае, когда план дан не в виде схемы, а в виде таблицы. В этом случае нужно только устанавливать условные связи по схеме рис. 5.

## Задача Б

В этом разделе речь идет о планировании перевозок нескольких грузов. Пусть даны пункты  $C_1, C_2, \dots, C_n$  и связывающая их железнодорожная сеть, и пусть каждый из нескольких различных грузов грузится в некоторых из этих пунктов и в некоторых других разгружается. При этом может случиться, что отдельные пункты будут участвовать в распределении не всех из рассматриваемых грузов. Требуется составить план перевозок всех этих грузов и образующегося порожняка так, чтобы затраты на всю массу перевозок были минимальными.

Предполагаем, что объемы погрузки и выгрузки по каждому грузу сбалансированы.

Эта задача распадается на несколько задач типа задачи А. В самом деле, для каждого груза в отдельности надо выбрать наивыгоднейший план независимо от перевозок других грузов. Что касается порожняка (мы считаем, что порожняк однородный)<sup>6)</sup>, то его можно считать за особый вид груза. По условиям задачи известно, сколько в каждый из пунктов прибывает груза и сколько вагонов груза

---

<sup>6)</sup>Если видов порожняка несколько (платформы, крытые вагоны и пр.), дальнейшее относится к каждому из них в отдельности.

из него отправляется. Это позволяет подсчитать, сколько вагонов порожняка требуется для любого из пунктов или сколько вагонов в нем высвобождается. Дело сводится, таким образом, к тому, чтобы подсчитать, из каких пунктов в какие целесообразно направлять порожняк с тем, чтобы сумма затрат на его перевозку была минимальной, т. е. к решению задачи А.

Не осложняется задача и тогда, когда задан некоторый «фон» перевозок, т. е. известно, что в некоторых пунктах освобождается порожняк от других перевозок, нами сейчас не планируемых, или требуется порожняк для таких перевозок. Нужно лишь учитывать эти количества порожняка при составлении баланса порожняка для каждой станции.

Таким образом, решение разбивается на следующие части: решается задача А для каждого груза в отдельности; для каждого пункта подсчитывается число высвобождающихся или требуемых вагонов порожняка (по видам его). Для каждого вида порожняка решается задача о его наивыгоднейшем распределении, т. е. опять задача А.

### Задача В

Эта задача отличается от задачи А тем, что пропускная способность железнодорожной сети предполагается ограниченной или, во всяком случае, для некоторых магистралей указана максимальная допустимая загрузка их грузом данного вида. Требуется составить план перевозок, который учитывал бы такое ограничение и был бы наивыгоднейшим по сравнению с другими (также его учитывающими).

Метод решения задачи, по существу, совпадает с первым методом, предложенным нами для решения задачи А. Здесь также вводится потенциал, и наивыгоднейший план находится одновременно с нахождением потенциала. Сама техника решения задачи остается прежней, с малыми изменениями.

Итак, пусть для каждого участка сети, соединяющего любые соседние пункты А и В, заданы величины  $l(A, B)$  и  $l(B, A)$ , представляющие пропускную способность этого участка в направлениях от А к В и соответственно от В к А. Эти пропускные способности могут быть различными вследствие различной технической оснащённости дорог, а также если имеется некоторый «фон», т. е. если по сети уже перевозятся какие-то другие грузы, которые мы считаем заданными и не планируем в настоящий момент. Требуется составить наивыгоднейший (т. е. связанный с наименьшими затратами) план перевозок, при котором объем перевозок  $h(A, B)$  по любому участку АВ в направлении от А к В не превосходит  $l(A, B)$ .

Мы утверждаем, что некоторый план будет наивыгоднейшим только тогда, когда с ним можно связать такой потенциал  $U$ , при котором для любых двух «соседних» точек будут выполнены следующие условия:

I. Если  $h(A, B) = 0$ , то  $U_B - U_A \leq \overline{AB}$ .

II. Если  $0 < h(A, B) < l(A, B)$ , то  $U_B - U_A = \overline{AB}$ .

III. Если  $h(A, B) = l(A, B)$ , то  $U_B - U_A \geq \overline{AB}$ .

Здесь, как всегда,  $\overline{AB}$  — затраты на перевозку одного вагона груза из А в В по участку АВ. Такой потенциал отличается от рассмотренного нами ранее лишь тем, что для участков, используемых при наилучшем плане с полной загрузкой, условия I и II раздела 1 заменяются условием III.

Доказательство этого предложения представляет лишь некоторое усложнение доказательства, приведенного в разделе 1, и мы не будем его воспроизводить.

Покажем технику решения задачи В на примере.

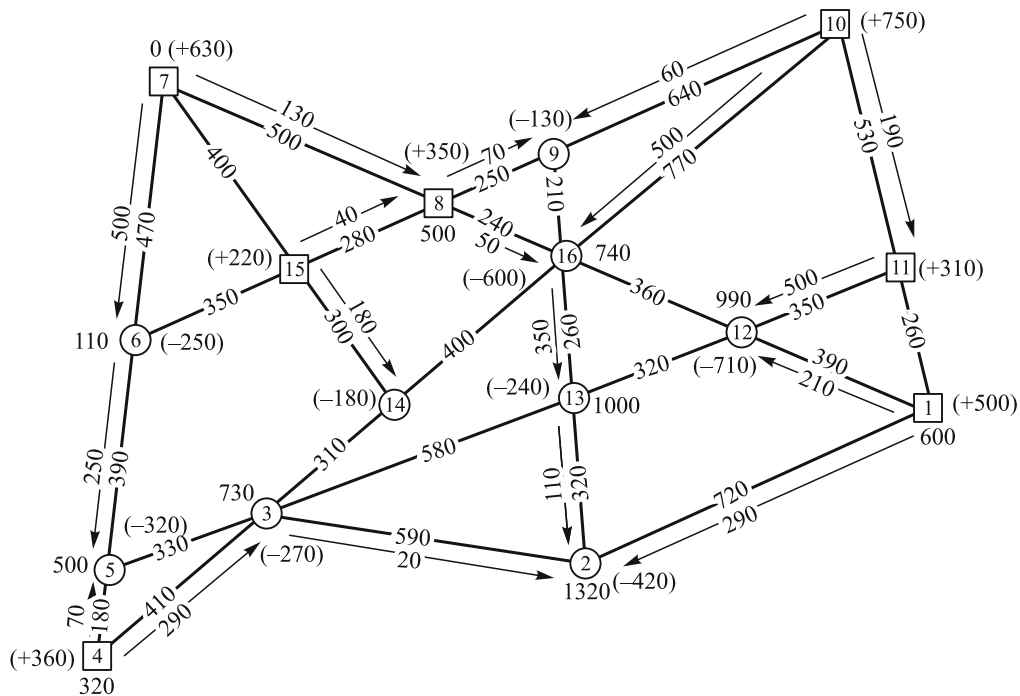


Рис. 13

ПРИМЕР. Пусть дана задача, изображенная на рис. 13, и пусть для любого участка сети пропускная способность (в каждом направлении) равна 500 вагонам. На этом же рисунке изображен некоторый, взятый на глаз, план перевозок, при котором перевозки по любому участку не превосходят 500 вагонов.

Пробуем строить для этого плана потенциал, пользуясь условием II. Примем его равным нулю в пункте 7. Тогда он последовательно определится, как это показано, в пунктах 8, 16, 13, 2, 1, 12, а также в пунктах 3, 4, 5, 6. При этом мы пользуемся стрелками, идущими вдоль участков, где перевозки по плану предусмотрены в объеме, меньшем 500 вагонов. Поэтому разность потенциалов на концах таких участков равна длине этих участков.

Обнаруживается невязка между пунктами 6 и 7, так как условие III оказывается нарушенным. Способ уничтожения невязки, связанный с улучшением плана, очевиден. Добавим некоторое число  $n$  вагонов на кругный путь из пункта 7 в пункт 6 (через пункты 8, 16, 13, 2, 3, 4, 5). Затраты на каждый добавляемый вагон будут равны разности потенциалов в пунктах 6 и 7, т. е.  $110 - 0 = 110$ . Одновременно снимем с прямого пути из 7 в 6 тоже  $m$  вагонов, экономия на каждом снимаемом

вагоне 470. В результате мы выгадаем на каждом вагоне  $470 - 110 = 360$ . Добавляя вагоны на кругном пути, мы уменьшаем перевозки по участкам 6-5, 4-3, 3-2. Минимальное число вагонов, перевозимое по этим участкам, равно 20 (участок 3-2). Поэтому принимаем  $m = 20$  и переходим к плану, который изображен на рис. 14 и выгоднее предыдущего на  $20 \times 360 = 7200$  вагоно-км.

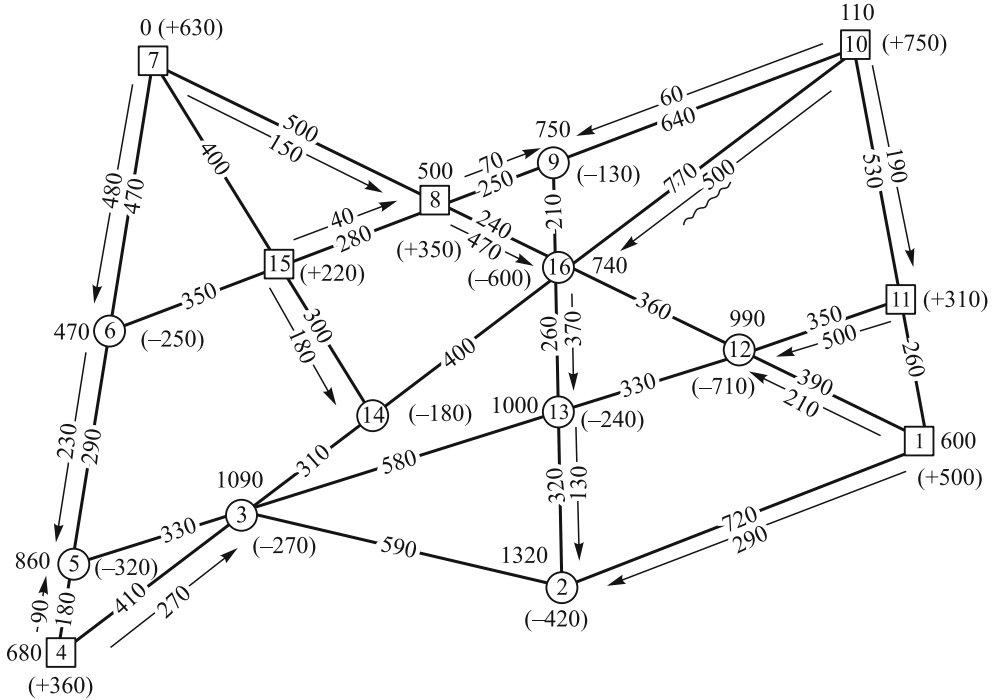


Рис. 14

В этом плане потенциал в пунктах 7, 8, 16, 13, 2, 1, 12 остался прежним, в пунктах 6, 5, 4, 3 он изменил свое значение. Кроме того, определен потенциал в пунктах 9 и 10. Между пунктами 10 и 16 обнаруживается невязка, имеющая такой же, как и в предыдущем случае, характер. Для ее исправления нужно добавить грузопоток по кругному пути, соединяющему пункты 10 и 16 (через пункты 9 и 8), сняв равное число вагонов с прямого пути. Величина добавляемого грузопотока определяется на этот раз из условия, что по участку 8-16 нельзя провозить более 500 вагонов.

Мы приходим к плану, изображенному на рис. 15, который дает по сравнению с предыдущим экономию в  $30 \times [770 - (740 - 110)] = 30 \times 140 = 4200$  вагоно-км. Здесь 30 — число вагонов, пускаемых по кругному пути, 770 — расстояние между пунктами 10 и 16, 740 — 110 — разность потенциалов в них при плане рис. 14.

Поскольку дальнейшие исправления носят обычный для задачи А характер и не связаны с перегруженными участками, мы их не рассматриваем. Заметим

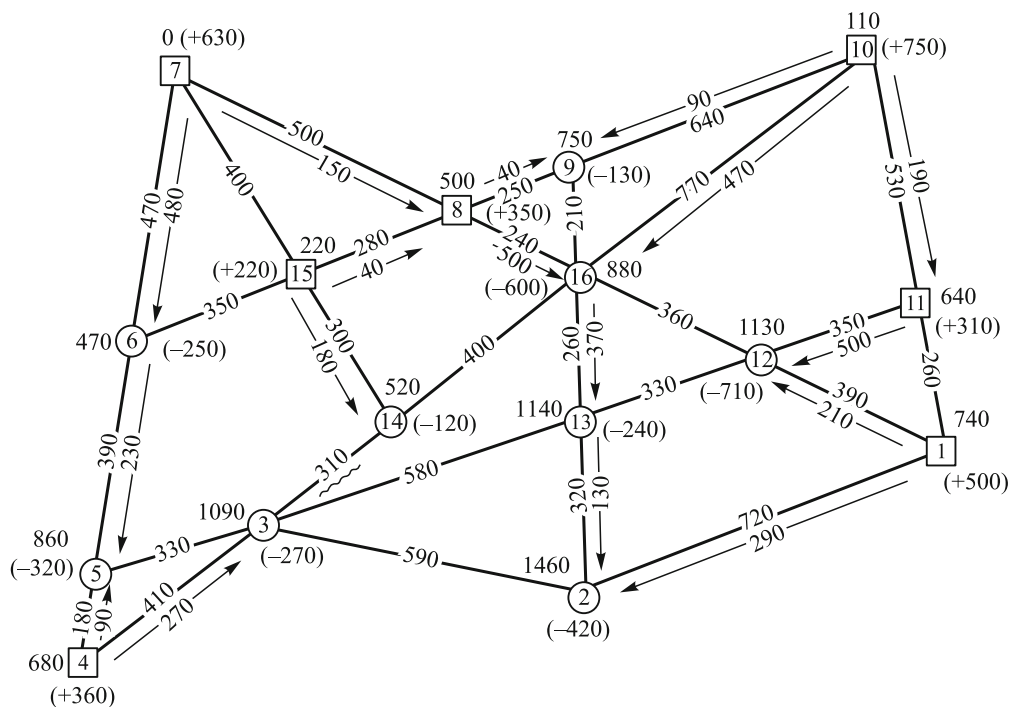


Рис. 15

только еще раз, что потенциал всюду определяется из условия II, т. е. при помощи стрелок, идущих вдоль участков, пропускная способность которых использована не полностью.

В заключение остановимся на вопросе о возможности практического использования разобранных выше методов.

Решение задачи А, которое позволяет установить наиболее рациональную схему перевозок для данного однородного груза, может быть использовано при составлении плана перевозок важнейших массовых грузов: цемента, строительного леса, угля (для энергетических целей)<sup>7)</sup>, сахара, соли, зерна и др. Кроме того, с помощью описанного выше способа, как мы упоминали, решается вопрос о рациональном обороте порожняка.

Решение задач Б и В может быть применено при одновременном планировании перевозок нескольких массовых грузов с учетом загрузки магистралей и оборота порожняка.

Конечно, при составлении реального плана перевозок должны быть учтены и некоторые дополнительные обстоятельства, которые не были приняты во внимание в рассмотренной, в известной мере отвлеченной схеме. Однако это не может слу-

<sup>7)</sup>Когда речь идет об углях разной калорийности, решение вопроса не подходит прямо под задачу А, но может быть к ней сведено.

жить серьезным препятствием к применению предлагаемого метода. Во-первых, наиболее важные из этих дополнительных обстоятельств (использование водного транспорта, учет загрузки некоторых железнодорожных узлов, учет угловых заездов и др.) могут быть также учтены при помощи приемов, основанных на использовании того же основного метода. Во-вторых, другие обстоятельства, значительно реже оказывающие влияние (скорость и надежность данного пути и др.), могут быть учтены после того, как будет найдено решение задачи. Имея основную, правильную и рациональную схему перевозок, нетрудно внести в нее отдельные коррективы, тем более что данный метод позволяет оценить, насколько данные коррективы отклоняют план от наивыгоднейшего и потому дает возможность внести их наилучшим образом.

Как мы уже говорили, решение задачи А, а также задач Б и В вполне осуществимо при помощи указанных методов даже в весьма сложных случаях. Трудности и расходы, связанные с составлением такой рациональной схемы, совершенно незначительны и не могут идти ни в какое сравнение с теми результатами, которые могли бы дать ее использование. Сокращение даже на один процент среднего пробега ряда массовых грузов имеет общегосударственное значение.

В настоящей работе мы рассматривали вопрос о планировании перевозок, предполагая объемы производства и потребления продукта (в отдельных пунктах) заданными. Не входя в подробности, отметим, что предлагаемые методы могут быть использованы также при учете транспортных вопросов, связанных с планированием объема производства и потребления в различных пунктах. Однако последний вопрос не может решаться только с точки зрения транспорта, а для решения его требуется одновременно полный анализ условий производства и потребления в каждом пункте.

Для автоматического решения задач А и В могла бы быть предложена гидравлическая или электрическая модель. Мы не приводим их описаний, так как изложенный расчетный метод настолько прост, что изготовление этих моделей вряд ли целесообразно.



# Комментарии к статье «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков»

Вышедшая в 1949 г. в сборнике «Проблемы повышения эффективности работы транспорта» тиражом в 2,5 тыс. экземпляров совместная статья Канторовича и Гавурина «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков» никогда не переводилась и не переиздавалась. Между тем и сама работа, написанная в 1940 г., где впервые полно, включая детальное описание метода решения, рассмотрена одна из наиболее красивых и показательных задач линейного программирования, и десятилетняя история ее публикации заслуживают, на наш взгляд, внимания.

Тьяллинг Купманс, получивший в 1957 г. от Л. В. Канторовича вместе с брошюрой «Математические методы организации и планирования производства» и экземпляр этой работы, в предисловии к публикации перевода брошюры в "Management Science"<sup>1)</sup> так оценивал их значимость:

*Обе статьи являются исключительными документами в истории науки управления, линейного программирования и экономической теории вообще. В статье 1949 г. обсуждаются однопродуктовая и многопродуктовая транспортные модели (в том числе с пустыми вагонами), модель с сетью ограниченной пропускной способности, а также приложение этих моделей к железнодорожной сети вокруг Москвы.*

Интересно, что Купманс, несмотря на объяснение такой задержки публикации статьи с Гавуриным «трудностями военного времени», данное в письме Канторовича, прозорливо подозревал иную причину. У. Х. Марлоу, описывая свой телефонный разговор с Купмансом, состоявшийся в октябре 1958 г., по поводу предстоящей публикации брошюры 1939 г., отмечает, что основной его темой было опасение «каких-либо редакторских действий, которые могли бы как-то отразиться на Канторовиче», особенно, учитывая «текущие события, связанные с Нобелевской премией по литературе»<sup>2)</sup>. «Видимо, Купманс чувствует, что это позор для советских экономистов» — пишет он — «что советские экономисты-плановики не смогли использовать эти методы во время Второй мировой войны». Далее в разговоре Купманс, повторяя еще раз свое беспокойство и требование о том, чтобы не было никаких редакторских изменений и замечаний относительно «экономической доктрины», настаивает, что «этот вывод читатель должен сделать самостоятельно»<sup>3)</sup>.

Транспортная задача и по своей постановке и по методу решения является наиболее простой и естественной из оптимизационных задач. Неудивительно, что первые ее постановки появились раньше, чем общая концепция линейного программирования<sup>4)</sup>, а ее непрерывный вариант — задача Монжа — еще в 1781 г. Поэтому вызывают недоумение трудности с публикацией этой работы, возникшие у Леонида Витальевича, если учесть еще, что автор был одним из наиболее известных в стране математиков. Ведь в статье обсуждались вполне понятные и чисто технические проблемы, она была написана исключительно ясно и, главное, никак не затрагивала идеологию —

---

<sup>1)</sup> Koopmans T. C. A note about Kantorovich's paper "Mathematical methods of organizing and planning production". — Management Sci. — July 1960. — N 4.

<sup>2)</sup> Имеется в виду травля Б. Л. Пастернака за публикацию «Доктора Живаго» за границей и присуждение ему (а не Шолохову!) Нобелевской премии 1958 г.

<sup>3)</sup> Из переписки американских экономистов — участников подготовки публикации перевода «Математических методов организации и планирования производства» в "Management Science", присланной Л. В. Канторовичу в 1958 г.

<sup>4)</sup> Работы Толстого (1930) в СССР и Хичкока (1941) в США.

причина, по которой не мог быть опубликован «Экономический расчет . . . » и ряд других экономических работ, написанных Л. В. Канторовичем в 1940-е годы<sup>5)</sup>. Кроме того, сама тема статьи не была новой — уже имелось несколько публикаций, посвященных методам сокращения затрат при планировании перевозок<sup>6)</sup>.

Обратимся к документам. В аннотации к работам, направлявшимся Ленинградским университетом в Совмин СССР в 1954 г., относительно статьи с М. К. Гавуриным написано следующее:

*«Работа фактически выполнена в 1940 г. и впервые направлена в печать в 1941 г.<sup>7)</sup> Однако редакциями различных журналов ее опубликование задержалось до 1949 г., несмотря на положительные отзывы акад. В. Н. Образцова и акад. А. Н. Колмогорова<sup>8)</sup>, по-видимому, из соображений перестраховки. Математическая теорема в абстрактной форме опубликована в 1942 г. в ДАН. В 1950–1953 гг. появился целый цикл американских работ по данному вопросу, где методы, предложенные в работе, переоткрыты (не полностью). Работа направлялась в 1941 и 1943 гг. в Министерство железнодорожного транспорта, но не получила никакого отзыва. В 1948–1949 гг. она была проверена в Центральном институте железнодорожного транспорта».*

Десятилетняя задержка с публикацией тем более обидна, что за то время, пока статья моталась по редакциям, ее содержание во многом было переоткрыто. Правда, американские работы еще не были доступны — исследования по линейному программированию, начавшиеся с 1947 г., оформлялись, как правило, в виде внутренних отчетов Rand Corporation (Американские ВВС). Так что первой развернутой публикацией стал появившийся только в 1951 г. сборник статей под редакцией Т. Купманса "Activity analysis of production and allocation". Установлению приоритета Л. В. Канторовича отчасти способствовала короткая заметка в Докладах АН «О перемещении масс» 1942 г., в которой Леонид Витальевич, помимо более общего и математически важного содержания, сформулировал квинтэссенцию и этой работы (теорему о потенциалах и указание на метод решения), а, кроме того, там была и ссылка на нее, как на находившуюся в то время в печати.

В этой статье детально, включая и вырожденный случай, изложен метод потенциалов для решения транспортной задачи и ряда ее модификаций. Надо заметить, что в зарубежной литературе неоднократно повторялся упрек Л. В. Канторовичу в том, что он якобы не дал полного описания предлагаемых методов решения, а ограничился лишь общими указаниями, в отличие от Дж. Данцига, который подробно расписал симплекс-метод, доведя его вплоть до машинной реализации.

Между тем объяснение того, почему Леонид Витальевич ограничился именно таким описанием методов решения соответствующих экстремальных задач, лежит на поверхности — в 1939 г. вычислительных машин еще не было, а для решения реальных задач вручную был необходим не всегда стандартный подход к ним, учитывающий специфику задачи. И именно такой подход приводил к результату. Например, В. А. Залгаллер, занимавшийся в 1948–1949 гг. расчетами наилучшего раскроя материалов в реальных производственных условиях конкретного завода им.

<sup>5)</sup>Некоторые из этих работ недавно опубликованы (см. «Леонид Витальевич Канторович, человек и ученый». — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2002. — Т. 1; 2004. — Т. 2).

<sup>6)</sup>Толстой А. Н. Методы нахождения наименьшего суммарного километража при планировании перевозок // Планирование перевозок. — Транспечать НКПС, 1930. Толстой А. Н. Теория и практика планирования перевозок грузов в пространстве. — М., 1931. Толстой А. Н., Долгов А., Моисеенко В. Л. Задачи по планированию перевозок. — М., 1931/1932. Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании // Социалистический транспорт. — 1939. — № 9. — С. 28–51. Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов. — М.: Трансжелдориздат, 1941.

<sup>7)</sup>В своих воспоминаниях «Мой путь в науке» Леонид Витальевич указывает, что впервые статья «была сдана в печать в 1940 г. в журнал «Железнодорожный транспорт». В его архиве сохранилось письмо из редакции от 3 декабря 1940 г. следующего содержания: «На основании постановления редакционной коллегии 22/XI (объем статей не должен превышать 10 000 знаков или 3 печатных полос), просим сократить Вашу статью на 50–60 стр.». Это означало сокращение статьи почти в 10 раз.

<sup>8)</sup>Отзыв Андрея Николаевича Колмогорова, к сожалению, не сохранился.

Егорова, сталкивался с задачами, включавшими до сотни ограничений, и успешно решал их вручную. Если бы, гипотетически, он тупо применил симплекс-метод, то даже используя самую мощную ЭВМ того времени (которых, кстати, в СССР еще не было), задач такого размера он никогда бы не решил<sup>9)</sup>.

Что касается транспортной, то реальные задачи даже большой размерности достаточно легко решаются вручную, поэтому и алгоритм для нее был строго описан. Так что в отношении транспортной задачи отмеченный выше упрек абсолютно незаслужен, тем не менее он впервые был высказан именно по отношению к ней. В своем предисловии к переводу заметки «О перемещении масс» А. Чарнс (A. Charnes) писал: *Задача отыскания эффективных методов для действительного решения специфических задач не решена в настоящей статье. В разработке таких методов мы находимся в настоящее время впереди русских*<sup>10)</sup>.

Высказанное обвинение тем более несправедливо, что экземпляр совместной статьи с Гавуриным в то время уже был у Купманса, так что она могла быть доступной интересующимся ею американским исследователям, особенно желающим высказаться (ведь в заметке есть ссылка на эту статью!). Более того, даже в рецензируемой Чарнсом заметке метод решения фактически (в двух словах) описан. Он с очевидностью вытекает из доказательства и небольшого абзаца: *Доказанная теорема дает удобный способ проверки того, что данное перемещение масс минимальное. Именно, для проверки достаточно попытаться строить потенциал для него тем способом, который приведен в доказательстве необходимости. При этом если такое построение окажется невозможным, т. е. если перемещение не минимальное, то одновременно обнаружится способ уменьшения работы при перемещении, позволяющий постепенно подойти к минимальному перемещению.*

Основные результаты статьи впервые излагались в докладе обоих авторов в Ленинградском доме ученых. Тезисы этого доклада по сохранившейся в архиве Л. В. Канторовича рукописи мы приводим в Приложении.

Сохранился и предназначенный авторам экземпляр пятистраничного отзыва, подписанного академиком В. Н. Образцовым 10 июля 1942 г. *Возвращая данную мне для отзыва работу Канторовича «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок» и отзыв академика Колмогорова, считаю со своей стороны, что статья интересна и подлежит напечатанию»* — пишет В. Н. Образцов в редакцию «Известий Отделения технических наук АН». Далее на двух страницах перечисляются желательные исправления в чертежах, которые помогли бы, по мнению рецензента, лучшему пониманию работы. Затем следует сам отзыв, причем рецензент хотел бы поместить его как критику в том же журнале.

Этот отзыв начинается с тезиса о том, что в области «изучения транспортных потоков имеется ряд теоретических статей, к сожалению, мало применимых на практике. Причиной этого является тот особо сложный комплекс явлений, который имеет место на транспорте и который не дает возможности учесть все факторы при теоретических выводах и предложениях». Затем рецензент разбирает ряд работ такого рода — работы 1980-х гг. Лаунгардта (Launhardt) и проф. Е. А. Гибшмана по теории трассировки линий, работу 1990-х гг. проф. Фролова по применению теории вероятностей. Наконец, переходит к рецензируемой работе:

*Это положение целиком относится и к настоящему труду Канторовича «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок»<sup>11)</sup>. Авторы<sup>12)</sup> пытаются здесь учесть некоторые дополнительные условия, например, загруженность пропускной способности и применение кружности, расчеты для нескольких грузов и т. п. Но это все же не все и часто даже не*

<sup>9)</sup> Судя по всему, именно идея симплекс-метода была первой, пришедшей в голову Канторовичу. Но он отверг ее из-за неэффективности при ручном счете. «И другой, геометрический метод постепенного перехода с грани на грань многогранника в направлении  $\text{grad } z$  представляется недостаточно эффективным» (см. заметку 1938 г.). Через пару страниц (раздел — Случай  $n$  и  $m$  любых) необходимая процедура описывается чуть подробнее. Как вспоминал Данциг, и он поначалу сомневался в том, что симплекс-метод зарабатывает и при использовании ЭВМ.

<sup>10)</sup> Management Sci. — 1958. — Vol. 5, N 1. — P. 3.

<sup>11)</sup> Это название было позднее несколько изменено.

<sup>12)</sup> «Авторы» написано рецензентом, но почему-то в отзыве он всюду называет только одну фамилию.

основные факторы. Само предположение о постоянстве движения между отдельными точками уже является неправильным; размеры потоков и их распределение меняются от конъюнктуры, от сезонности груза, от изменения требований и т. д., а потому построение следовало бы производить очень часто; вопрос о направлении движения завязан и с составлением поездов и с вопросами сборных и транзитных поездов и т. д. Эти факторы резко ограничивают возможность использования формул; быть может, они скорее найдут применение в вопросе распределения порожняка (однако с учетом специализации вагонов) или в расчете перевозок автотранспорта.

Тем не менее, предупреждая читателя о необходимости быть осторожным в применении теоретических формул, нужно всецело поддержать всякую попытку, в том числе и данную, теоретического разрешения таких сложных вопросов. Не следует забывать, что «сопротивление материалов» является очень сложным явлением и тем не менее после нескольких веков изучения оно превратилось в одну из наиболее точных математических наук. Когда-нибудь это произойдет и с транспортными проблемами. Предложения проф. Канторовича являются теоретически оригинальными и интересными.

Предложение гидравлической модели, по-моему, однако, является лишь чисто теоретическим предложением и интересно только лишь в этом отношении<sup>13)</sup>.

Несмотря на этот, в целом положительный отзыв, в 1944 г. редакция «Известий Отделения технических наук АН» возвращает статью<sup>14)</sup>, приложив выдержку (замечания по статье) из другого отзыва В. Н. Образцова:

При наличии большого числа пунктов погрузки и выгрузки рекомендуемые тов. Канторовичем методы решения путем последовательного приближения к плану будут чрезвычайно затруднительными. Поэтому в практике НКПС их применять будет почти невозможно. Необходимо предложить Л. В. Канторовичу разработать метод более простого определения потенциала каждого пункта погрузки для того, чтобы легко было дать картину правильного прикрепления пунктов выгрузки (исключая метод приближения в несколько ступеней).

Если такой метод (одноступенчатого) решения задачи будет найден, то это будет ценное предложение для плановых и других работ.

На основании изложенного статью необходимо сократить и переработать.

Появление другого отзыва, вероятно, было связано с тем, что в 1941 г. Леонид Витальевич направил работу еще и в Наркомат Путей Сообщения<sup>15)</sup>, из которого она опять-таки могла прийти к В. Н. Образцову (во втором отзыве говорится именно о возможности использования работы в практике НКПС). Получив ответ из редакции «Известий АН ОТН», Леонид Витальевич перерабатывает статью. Он пишет в редакцию:

Одновременно с настоящим письмом направляю Вам переработанный текст находившейся на рассмотрении в редакции ОТН моей, совместной с М. К. Гавуриным, статьи «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок». Переработка произведена на основе отзыва и замечаний рецензента — академика В. Н. Образцова. При этом изменено несколько и название статьи, а также она подвергнута некоторому сокращению.

<sup>13)</sup>С последним утверждением в отличие от предыдущих можно согласиться. Параграф о гидравлической модели был исключен при публикации, частично он изложен в [1959, 2] (См. Приложение II).

<sup>14)</sup>З.П.1944, Редакция «Известий Отделения технических наук АН СССР»: Тов. Канторович Л. В. Согласно указанию зам. ответственного редактора, члена-корреспондента АН СССР В. И. Вейца, Редакция направляет Вам копию отзыва академика В. Н. Образцова о Вашей статье «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок», а также и статью. Завед. Редакцией О. Н. Соловьева.

<sup>15)</sup>Одновременно с этой статьей Леонид Витальевич направлял в НКПС еще и две записки с предложением мероприятий, могущих повысить эффективность работы транспорта, однако ни одна из этих работ не встретила понимания. Соответствующую переписку мы публикуем в приложении. Отвечая на вопросы немецкого историка науки Сони Бронтьес (см. [2002, 1], с. 21), Канторович писал, что в 1947–1948 гг. он, наконец, смог ознакомиться с реальными «работами по планированию перевозок, которые велись в Министерстве путей сообщения».

В случае если редакция считает необходимым дальнейшее сокращение объема статьи, то из нее может быть изъят § 3. В этом случае нужно только изъять стр. 26–32 и 5 отдельных таблиц. В последующих § 4, 5, 6 изменить номер в заглавии и, наконец, во введении на стр. 2 и 13 вычеркнуть места, взятые в скобки; изменить нумерацию страниц начиная с 33. Номера чертежей и все остальное не меняется.

Кроме того, направляет письмо и В. Н. Образцову:

Глубокоуважаемый Владимир Николаевич!

Редакция ОТН предложила мне переработать статью в соответствии с Вашим отзывом и замечаниями. Исправленный текст статьи я направил на днях обратно в редакцию.

Имея в своем распоряжении экземпляр работы, я еще раз убедился по Вашим многочисленным замечаниям, как внимательно она была рассмотрена Вами. Очень благодарен Вам за Ваше внимание и замечания к работе.

Кроме того отзыва, копию которого Вы в свое время любезно направили мне, Вы, по-видимому, позднее давали еще один отзыв о моей работе, из которого редакция дала только краткую выписку. Кроме замечания о переработке изложения, в нем содержится указание, что вследствие сложности метода, вызванной применением последовательных приближений, его использование в практике НКПС не представляется возможным.

В соответствии с Вашими указаниями я упростил изложение метода, а также саму схему его применения, в особенности для случая распадаения грузопотоков на несвязанные системы.

Мне представляется, что в таком виде использование метода в практике НКПС вполне возможно и целесообразно, и то, что это не осуществлено до сих пор, вызвано не столько сложностью метода, сколько отсутствием у соответствующих работников времени или желания вникнуть в него.

Задача А (о прикреплении пунктов производства к пунктам потребления) постоянно решается практически в Отделе народнохозяйственных перевозок НКПС и в Наркоматах. О нужности этой задачи свидетельствует и выпуск Трансжелдориздатом книги А. Толстого, посвященной специально способам решения этой задачи.

В предлагаемом мною приеме проверка правильности плана перевозок с помощью потенциала производится очень быстро и не требует последовательных приближений, как в том случае, когда план дан в виде схемы, так и в виде «шахматки», если только расстояния между пунктами уже найдены. Таким образом, во всяком случае, метод может использоваться для проверки оперативных планов Наркоматов в отделе Народнохозяйственных перевозок. Однако и исправление плана перевозок, если он окажется не наилучшим, а также построение плана, хотя и могут потребовать нескольких приближений, осуществляются с такой простотой и требуют так мало времени, что это не может служить препятствием к использованию метода. Работник со средним образованием может легко научиться производить такую работу за 30–40 минут.

Что касается задачи Б (с загруженными магистралями), то она в определенной постановке также представляется вполне реальной. То, что она не решается в настоящее время, связано, пожалуй, именно с отсутствием удовлетворительного метода решения ее. При наличии же его, она также может войти в практику НКПС.

Во всяком случае, вопрос о возможности использования этого метода будет разрешен, когда с ним смогут ознакомиться работники транспорта и транспортных вузов, что будет достигнуто скорейшим опубликованием работы. Задержка в этом ставит меня в трудное положение, так как за это время я получил уже несколько запросов от лиц, интересующихся работой и желающих с ней познакомиться, которых я не мог удовлетворить.

Несмотря на сделанные изменения, 8 апреля 1945 г. Леонид Витальевич получает из редакции «Известий ОТН» за подписью академика И. П. Бардина не очень грамотно составленный отказ:

Проф. Канторович Л. В. В связи с пересмотром редакционного портфеля и недостатком места в журнале «Известия ОТН», при этом направляется Ваша статья «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков».

Леонид Витальевич предлагает статью Ленинградскому институту инженеров железнодорожного транспорта, но и отсюда в апреле 1946 г. получает отказ «ввиду невозможности ее помещения в Сборнике Института».

Неожиданно в апреле 1948 г. приходит письмо от сотрудника секции транспортных проблем АН А. П. Петрова:

*Уважаемый профессор Канторович! Мною просмотрена написанная Вами совместно с доцентом М. К. Гавуриным статья о применении математических методов в вопросах анализа грузопотоков. Необходимо при Вашем ближайшем посещении Москвы встретиться (как мы договаривались) и условиться о возможности подготовки статьи к печати. Ввиду срочности вопроса крайне желательно было бы эту встречу осуществить скорее.*

Учитывая предысторию, вызывает удивление «срочность вопроса». В архиве Л. В. Канторовича не удалось найти каких-либо документов, дающих нареканий на причину изменения отношения к работе, а тем более причину «срочности». Можно лишь высказать предположение, что «срочность» связана с получением какой-то информации о начавшихся в США работах в этом направлении, но, разумеется, это предположение ни на чем не основано (кроме самого факта наличия таких разработок).

И действительно, дальнейшее продвижение работы шло очень оперативно. Леониду Витальевичу предлагают поставить доклад на семинаре, и он указывает ближайший приемлемый для себя срок, который и принимается. Вот письмо руководителю семинара, академику А. М. Терпигореву:

*Глубокоуважаемый Александр Митрофанович!*

*В соответствии с договоренностью с академиком Л. Д. Шевяковым намечена постановка в Вашем семинаре моего доклада «Математические методы в вопросах анализа грузопотоков». Настоящим сообщая, что должен быть в Москве 4–6 мая и мог бы в среду 5 мая в 3 часа выступить с докладом. В случае назначения доклада на указанный срок прошу сообщить мне об этом телеграммой.*

Семинар — совместный семинар Отдела методов разработки Института горного дела АН и секции транспортных проблем АН — состоялся в указанный срок. Сохранился его протокол. Помимо названных организаций, в его работе приняли участие представители Института механики АН, ВНИИ Железнодорожного транспорта, Главного Грузового Управления МПС, Московского Института Цветных металлов и золота, Московского Горного института, Угольного ВНИИ, Центроспецстроя, Госгорнадзора, Метростроя, Гостехники при СМ СССР. В обсуждении доклада участвовали академик Л. Д. Шевяков, академик А. М. Терпигорев (от Ин-та горного дела), академик В. Н. Образцов, Ф. И. Шаульский, А. П. Петров (от секции транспортных проблем), И. И. Шрайбман и Симановский (от ВНИИ ж.-д. транспорта). Было принято следующее решение:

1. Методы решения задач о нахождении рациональной системы грузопотоков, предложенные в работе и опирающиеся на некоторые общие математические теоремы, оригинальны и имеют определенные преимущества по сравнению с имеющимися ныне в отношении простоты и уверенности в правильности полученного результата.

2. Считать целесообразным помещение статьи, содержащей изложение данного метода, с учетом необходимых исправлений в одном из журналов Академии наук СССР с тем, чтобы она могла быть обсуждена заинтересованными учреждениями и лицами и мог быть поставлен вопрос о практическом использовании предлагаемого метода.

Приложение 1. Тезисы доклада Л. В. Канторовича и М. К. Гавурина «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок»<sup>16)</sup> 26 февраля 1941 г. на совместном заседании группы математики и транспортной группы Ленинградского дома ученых<sup>17)</sup>.

В докладе предлагаются более совершенные и универсальные методы решения ряда математических вопросов, связанных с планированием грузовых перевозок.

<sup>16)</sup> Это название тезисов доклада, и оно указано в извещении о заседании. В протоколе доклад назван: «О математическом решении одной транспортной задачи». (Архив ЛДУ, фонд 349, опись 2, № 131 — протокол транспортной секции и № 134 — протокол математической секции).

<sup>17)</sup> Как указано в протоколе, председателем был А. А. Марков, присутствовали: А. Д. Александров, М. В. Березовский, М. В. Забеллин, Е. С. Ляпин и др., высказались: И. П. Натансон, Л. С. Каминский, И. Д. Белановский, Э. П. Лисевич. Г. Р. Лоренцу было поручено подготовить заметку о заседании в «Вестник АН».

1. В качестве первой задачи рассматривается вопрос о наилучшем прикреплении пунктов потребления к пунктам производства для одного груза без учета прочих перевозок. Потребление и производство данного груза (в вагонах в сутки) для каждого пункта считается известным. Наилучшим планом перевозок считается тот, для которого суммарные затраты по передвижению данного груза будут наименьшими. В качестве измерителей затрат могут быть приняты, например: себестоимость, вагонное время, расход топлива, вагоно-километр.

Во всяком случае считаем, что такой измеритель избран и известны затраты, связанные с передвижением одного вагона («приведенного») на каждом участке пути<sup>18)</sup>.

2. Вторая задача отличается от первой тем, что для некоторых участков пути пропускная способность недостаточна или, что более реально, увеличение объема перевозок сверх некоторой определенной величины связано с повышением затрат на один вагон.

3. В третьей задаче при планировании перевозок данного груза учитывается имеющаяся загрузка ж.-д. сети и связанные с этим моменты: наличие порожняка и тот факт, что пропускная способность лимитирующих участков уже полностью или частично использована.

4. Четвертая задача рассматривает вопрос об одновременном планировании перевозок двух или нескольких грузов.

5. Основная идея предлагаемого метода решения указанных задач (для определенности будем говорить о задаче 1) заключается в следующем. Вводится некоторая функция, которую мы называем потенциалом перевозок. Ее использование позволяет значительно упростить и систематизировать процесс нахождения наилучшей схемы перевозок.

Эта функция допускает следующую экономическую интерпретацию. Если бы цена продукта в каждом пункте с точностью до общего постоянного равнялась значению потенциала в данной точке, то при наиболее выгодной схеме перевозок: 1) нигде разность цен в двух пунктах не превосходила бы затрат на перевозку между этими пунктами; 2) если из пункта А имеется грузопоток в пункт В, то затраты по перевозке в точности совпадают с разностью упомянутых цен в этих пунктах.

6. Решение указанных задач предлагаемыми способами производится методом последовательных приближений и требует сравнительно небольшой затраты труда обученного работника средней квалификации. Кроме того, авторами предлагается гидравлическая модель для автоматического решения этих задач.

7. Мы полагаем, что предлагаемые методы могут быть использованы главным образом при планировании перевозок массовых грузов. Наряду с теми факторами, о которых говорилось выше, при планировании перевозок имеет значение и ряд других моментов (загрузка некоторых ж.-д. узлов, необходимость переработки, проблемы маршрутизации и пр.). Некоторые из этих моментов могут быть учтены при решении задачи нашим методом, что касается других, то после того, как решение будет найдено, в него могут быть внесены коррективы, учитывающие эти моменты.

8. Мы предполагали все время объемы производства и потребления продукта заданными. Получающиеся результаты и методы могли бы быть использованы также и при учете транспортных моментов в вопросах, связанных с планированием объема производства и потребления в различных пунктах<sup>19)</sup>. Этот вопрос, однако, в данном докладе не ставится.

---

<sup>18)</sup> В докладе рассматривается в основном сетевая постановка транспортной задачи. (*Прим. ред.*)

<sup>19)</sup> Такая производственно-транспортная задача рассматривалась в процессе работы семинара в Ленинградском политехническом институте, который в 1940–1941 гг. совместно вели Л. В. Канторович и В. В. Новожилов. Это была задача о размещении заказов на металлопрокат, которой занялся тогда А. Ф. Метс. В уже цитировавшемся ответе Соне Бронтьес (см. [2002, 1], с. 20), Канторович писал: Отмечу начатую в 1940–1941 гг. аспирантом Ленинградского политехнического института А. Ф. Метсом работу по использованию метода разрешающих множителей для загрузки прокатных станов, прерванную войной. Эта работа была опубликована им позднее — в 1950-х годах, а фактически широкое применение методов линейного программирования в этой задаче началось в 1960-х. Работа была продолжена под руководством Л. В. Канторовича сначала в Новосибирске, а потом в Москве и доведена до широкого внедрения в рамках АСУ «Металл»,

Приложение 2. Орывок из воспоминаний Л. В. Канторовича «Мой путь в науке» [2002, 1], с. 56–57.

Первой из работ в этой области [линейном программировании], выполненной в ЛОМИ, была совместная работа по транспортной задаче с недавно защитившим кандидатскую диссертацию М. К. Гавуриным. Эта задача у нас возникла сама собой<sup>20</sup>), но вскоре мы узнали, что задачей планирования перевозок на железнодорожном транспорте применительно к вопросам перегона поезда и перевозкам тяжелых грузов железнодорожники уже занимались. На эту тему имелась брошюра А. Н. Толстого, и были некоторые попытки внедрения этой работы со стороны Наркомата путей сообщения. Однако ни математической формулировки этой задачи, ни эффективного метода ее решения не было (в 1941 г. Хичкоком было дано математическое описание задачи, но без ее анализа и указания метода решения).

В работе с М. К. Гавуриным были в развернутой форме даны эффективные методы решения этой задачи (это был некоторый вариант метода разрешающих множителей, но специальный — метод потенциалов), критерий оптимальности решения, поставлены некоторые более общие задачи, в то время не решаемые при имевшихся вычислительных средствах. Был раскрыт экономический смысл этих параметров как территориальных цен для данного груза, была рассмотрена и задача рационального размещения производства. В печатном виде это было сильно сокращено по сравнению с рукописным вариантом, который, к сожалению, утерян<sup>21</sup>). Эта работа в январе 1941 г. была доложена на математической секции Ленинградского Дома ученых.

Публикация этой работы встретила большие затруднения. Она была сдана в печать еще в 1940 г. в журнал «Железнодорожный транспорт», но из-за упомянутой математикобоязни ни в нем, ни в журнале «Известия Транспортной академии»<sup>22</sup>), ни в каком-либо другом журнале она тогда напечатана не была, несмотря на поддержку академиков А. Н. Колмогорова и В. Н. Образцова, транспортного генерала<sup>23</sup>). К счастью, я сделал абстрактный вариант этой задачи — заметку о перемещении масс в компактном метрическом пространстве, в которой был и критерий и метод потенциалов. В конце приводилось две задачи — задача о железнодорожных перевозках (со ссылкой на находящуюся в печати нашу статью с М. К. Гавуриным) и задача о выравнивании площади аэродрома, которая также носит прикладной характер. Эта работа, опубликованная в 1942 г. на русском и английском языках, по-видимому, была первой, из которой специалисты на Западе узнали о моих работах по линейному программированию, но это произошло только в начале 1950-х годов.

Приложение 3. Предисловие к переводу «О перемещении масс» Л. В. Канторовича (*Management Science*, 1958, V. 5, N 1).

Помещенная ниже статья взята из русского журнала — аналогичного нашим Запискам Академии наук США — Доклады Академии наук СССР, 1942, том XXXVII, № 7–8. Ее автор — один из самых видных русских математиков. Он имеет весьма большие заслуги в области чистой математики и функционального анализа и столь же большие заслуги в прикладной математике, в области численного анализа и в теории и практике вычислений. Несмотря на то что изложение вопроса в этой статье дано автором в слишком сжатой форме и она написана математическим языком, который будет труден для большинства читателей нашего журнала, мы печатаем ее, желая: 1) представить читателям эту вообще значительную работу в области линейного программирования; 2) показать тип аналитической работы, который соответствует рациональному планированию

где в оперативном режиме решалась задача о размещении заказов по всем прокатным и трубным станам страны, включавшая десятки тысяч ограничений и сотни тысяч переменных (см., например, Канторович Л. В. О математическом обеспечении АСУ «Металл» // Приборы и системы управления. — 1972. — № 12. — С. 8–10 [1972, 4]). В связи с этим Л. В. Канторович занимал должность «Главного математика» в Госнабе СССР. (Прим. ред.)

<sup>20</sup>Словесная формулировка транспортной задачи есть уже в брошюре [1939, 1], см. С. 26–27.

<sup>21</sup>Эта рукопись сохранилась. (Прим. ред.)

<sup>22</sup>Правильное название журнала — «Известия Отделения технических наук». (Прим. ред.)

<sup>23</sup>Образцов имел звание «генерал-директора движения I ранга». (Прим. ред.)



в России и 3) характеризовать содержащимися в ней специфическими примерами то применение, которое русские дают абстрактной математике (так, принципы потенциала и поля, развиваемые у нас, например, У. Прагером, предвосхищены в данной статье).

Однако надо отметить, что задача отыскания эффективных методов для действительного решения специфических задач не решена в настоящей статье. В разработке таких методов мы находимся в настоящее время впереди русских.

А. Чарнс

*Приложение 4. Переписка с Наркоматом путей сообщения.*

Глубокоуважаемый Александр Васильевич!<sup>24)</sup>

Весьма сожалею, что рецензирование моей работы несколько затянулось, но надеюсь, что оно вскоре будет закончено. Во всяком случае, очень благодарен Вам за те усилия, которые Вам пришлось употребить, чтобы она не выпала из плана и как-то продвигалась.

Как я Вам уже говорил, эта работа не исчерпывает всех моих соображений по вопросам транспорта. В общем цикле моих исследований в области экономического расчета значительное место уделено вопросам транспорта. Именно, мною разработаны принципы методики экономического расчета как для решения вопросов, связанных собственно с экономикой транспорта — наилучшим использованием его ресурсов, так и для вопросов, касающихся проблем транспорта, связанных с работой и экономикой других отраслей народного хозяйства.

Прилагаемые при сем письме две записки, «О некоторых мероприятиях, обеспечивающих повышение эффективности работы ж.-д. транспорта» и «Экономическая оценка мероприятий . . . », содержат указание некоторых простейших мероприятий такого рода и самый грубый способ оценки их целесообразности с точки зрения народного хозяйства. Все же, даже использование этих мероприятий и этой методики может дать определенные положительные результаты в смысле улучшения обеспечения транспортом нужд тыла и фронта.

По существу же, мною разработаны и гораздо более точные и полные методы анализа и экономического расчета этого круга проблем, и в случае заинтересованности со стороны НКПС эти материалы могут быть закончены и направлены в НКПС.

Что касается указанных записок, то мне кажется, что они относятся к довольно существенным сторонам работы транспорта и потому желательно, чтобы Техн.- Экон. Отдел представил их для ознакомления одному из Зам. Наркома, ближе связанному с этим кругом вопросов.

Жду Вашего ответа как по поводу судьбы моей предыдущей работы, так и направляемых сейчас записок.

О последних мне было бы интересно и Ваше собственное мнение.

С искренним уважением

Л. Канторович

Начальнику Отдела Народнохозяйственных Перевозок НКПС  
тов. Корнееву

В соответствии с Вашим пожеланием направляю Вам упрощенное изложение предложенного мною и М. К. Гапуриным метода проверки и составления оперативных планов перевозок, обеспечивающего отсутствие нерациональных перевозок. Прошу обеспечить скорейшую его проверку на материале Отдела и разрешить вопрос о возможности применения метода в практике НКПС.

Прошу подтвердить получение материала.

Доктор физ.-мат. наук, проф. Л. В. Канторович  
Ярославль, Первомайская 9, кв. 50

ПРИЛОЖЕНИЕ: Рукопись «Проверка и исправление плана перевозок»,  
(15 стр. текста и 11 чертёжей.)

Проф. Л. В. Канторович

<sup>24)</sup> А. В. Паталеев, зам. начальника технико-экспертного отдела Наркомата путей сообщения.  
(Прим. ред.)

## ПРОВЕРКА И ИСПРАВЛЕНИЕ ПЛАНА ПЕРЕВОЗОК

Загрузка транспорта при выполнении перевозок определенного груза существенно зависит от правильного плана перевозок, правильного прикрепления пунктов потребления к пунктам производства его. Мы будем принимать здесь, что наивыгоднейшим является план, дающий минимальный суммарный тонно-километраж, хотя излагаемые способы расчета применимы и при иной постановке вопроса, а также когда приходится учитывать некоторые дополнительные обстоятельства (степень загрузки отдельных магистралей и узлов и др.).

В простейших случаях нерациональность плана и способ его исправления легко обнаруживается (например, наличие прямых встречных перевозок). Однако в более сложных случаях это требует сравнения многочисленных вариантов и достаточно сложных специальных приемов<sup>25)</sup>. Предлагаемый здесь способ более прост и универсален. Он основан на использовании особой величины — потенциала перевозки<sup>26)</sup>.

### I. Как построить потенциал перевозок.

Пусть у нас имеется некоторый план перевозок (см. фиг. 1). В плане указаны пункты производства: А, Б, . . . и потребления: а, б, . . . , расстояния между ними и пути следования груза. Для составления потенциала — определенной величины, имеющей различные значения для разных пунктов — выбираем один из пунктов, например, А и берем в нем произвольное значение для потенциала, например,  $P_A = 1000$ . Далее исходим из основного положения, определяющего потенциал, что *если в данном плане осуществляются перевозки груза из пункта А в пункт б, то потенциал в пункте б должен быть больше на расстояние перевозки*. Таким образом, в данном примере  $P_B = 1000 + 600 = 1600$ . Так как осуществляется перевозка также из Б в б, то в б потенциал должен быть на 300 больше, чем в Б, т. е.  $P_b = 1600 - 300 = 1300$ , наконец,  $P_a = 1000 + 400 = 1400$ .

Таким же образом составляем потенциалы перевозок в схемах грузопотоков, приведенных на фиг. 2 и 3. В последнем случае в соответствии с указанным правилом потенциал берется равным 1000 для Москвы, а затем определяется последовательно его значение в пунктах Можайск, Голутвин, Новки, Кашира, Малоярославец, Сухиничи, Вязьма, Горбачево, Тула (от Москвы), Рязск, Павелец.

### II. Как проверить, содержит ли данный план нерациональные перевозки.

Чтобы провести данную проверку, достаточно иметь только схему грузопотоков и расстояния между различными пунктами. Для проверки составляется, как указано, потенциал перевозок. При этом, если оказывается, что для каждых двух пунктов разность значений потенциала перевозок не превосходит расстояния между ними, то план не содержит нерациональных перевозок. Если это не так, план содержит нерациональные перевозки — возможно его исправление, уменьшающее тонно-километраж. При этом проверку достаточно производить только для соседних пунктов. Такой проверкой убедимся, что в плане, данном на фиг. 1, разность потенциалов  $P_a - P_b = 1400 - 1300 = 100$  меньше расстояния  $aB = 200$  км. План не содержит нерациональных перевозок.

В плане, приведенном на фиг. 2,  $P_a - P_A = 1500 - 1000 = 500$  больше расстояния  $aA = 400$  км — план нерациональный.

Производим проверку для плана перевозок, данного в табл. 3. Достаточно сравнить значения потенциала в соседних пунктах, для которых оно получено разным путем. Рассматриваем такие пары пунктов:

$$\text{Вязьма — Можайск — } 1124 - 1109 = 115 < 133$$

$$\text{Тула — Горбачево — } 1183 - 1126 = 56 < 82$$

<sup>25)</sup>Подробнее о видах нерациональных перевозок и существующих способах анализа вопроса см. брошюру Толстой А. Методы устранения нерациональных перевозок при составлении оперативных планов // Трансжелдориздат. — 1941. — С. 101.

<sup>26)</sup>Обоснование и более подробное изложение излагаемого здесь и некоторых других приемов см. в работе Л. В. Канторовича и М. К. Гагурина «Применение математических методов в вопросах планирования перевозок» (в печати).

Павелец — Кашира —  $1109 - 1063 = 46 < 142$

Рязск — Голутвин —  $1117 - 979 = 138 < 198$ .

Во всех случаях разность потенциалов меньше расстояния — следовательно, план не содержит нерациональных перевозок.

Заметим, что при анализе плана нет потребности составлять потенциал для всех пунктов, где рациональность плана не вызывает сомнений (например, Новки в фиг. 3). Для таких пунктов можно и не определять их расстояний.

Полезно также проверку правильности плана производить параллельно с определением потенциала, благодаря этому в случае, если план содержит нерациональные перевозки, это можно обнаружить, не составляя потенциала для всех пунктов.

### III. Как внести исправления в план.

Мы показали только то, как установить, что данный план нерационален. Использование потенциала позволяет также обнаружить, какие исправления нужно внести, чтобы суммарный тонно-километраж уменьшился. Это дает возможность посредством одного или нескольких исправлений прийти к наилучшему плану.

В данном вопросе, однако, недостаточно указания одного направления грузопотока — необходимо иметь полный план перевозок. Поэтому в примере, данном на фиг. 4, указано число вагонов суточной погрузки в пунктах производства и соответствующее число вагонов в пунктах потребления (со знаком «-»). Кроме того, на каждой стрелке надписано, сколько вагонов в намеченном плане направляется из одного пункта в другой ежедневно (ежемесячно).

Мы уже убедились, строя потенциал, что план фиг. 4 содержит нерациональные перевозки. Для исправления его поступаем так. Мы обнаружили невязку в потенциале для пунктов А и а:  $P_a - P_A = 1500 - 1000 = 500 > aA = 400$ . При определении потенциала от А к а мы шли по пути  $A \rightarrow б \rightarrow Б \rightarrow а$ . Смотрим, каково наименьшее число вагонов, следующее по этому пути в указанном направлении — это 30 вагонов. Снимаем 30 вагонов с этого пути, т. е. уменьшаем на 30 числа над стрелками, идущими в направлении  $A \rightarrow а$  и увеличиваем на 30 числа над стрелками, идущими в обратном направлении. Кроме того, направляем 30 вагонов из А в а (тоже увеличение на 30 — тридцать вместо нуля). Такой исправленный план перевозок дан на фиг. 5. Мы получили действительно уменьшение вагоно-километража: по плану фиг. 4 он составляет:

$$50 \times 600 + 70 \times 300 + 30 \times 200 = 57\,000 \text{ ваг.-км.}$$

по плану фиг. 5:

$$30 \times 400 + 20 \times 600 + 100 \times 300 = 54\,000 \text{ ваг.-км.}$$

Уменьшение на 5,5%. Величину выигрыша можно вычислить короче так:

$$30 \times (P_a - P_A - aA) = 30 \times (500 - 400) = 3000 \text{ ваг.-км.}$$

В том, что полученный после исправления план не содержит нерациональных перевозок, можем убедиться, определив значение потенциала, что однако было уже проделано нами на фиг. 1.

Рассмотрим план перевозок на фиг. 6. Он составлен довольно естественным образом. К Рязску прикреплен ближайший к нему пункт Голутвин и Павелец, к Сухиничи — Вязьма и Горбачево, остальные пункты — к Москве. Составляем потенциал по пунктам: Москва, Новки, Голутвин, Рязск, Павелец, Кашира. Проверяем Кашира — Павелец:  $1103 - 1003 < 142$  — невязки нет. Далее, составляем потенциал для Тулы:  $1000 + 183 = 1183$ . Сравниваем Тула — Павелец. Находим:  $1183 - 1003 = 180 > 110$ . Оказалась разность потенциалов больше расстояний — невязка. Смотрим, каким путем получилась невязка. Соединяем пункты Тула и Павелец незамкнутым кольцом, составленным из пунктов, где потенциал определен: Павелец  $\rightarrow$  Рязск  $\rightarrow$  Голутвин  $\rightarrow$  Москва  $\rightarrow$  Тула. Наименьшее число вагонов, идущее в этом направлении, — 20 (участок Рязск — Голутвин). Поэтому снимаем 20 вагонов в этом направлении так, как это было сделано в предыдущем примере. Именно, производим следующие изменения: из Рязска направляем 20 вагонов в Тулу, Голутвин из Рязска больше не снабжается, зато в Голутвин направляем 30 вагонов вместо 10 из Москвы, но из Москвы в Тулу направим только 10 вагонов. Выигрыш составит:

$$30(180 - 110) = 2100 \text{ ваг.-км.}$$

Полученный в результате план грузопотоков совпадает с изображенным на фиг. 3, а относительно последнего мы проверили уже, что он не содержит нерациональных потоков.

#### IV. Особый случай — распадение грузопотоков.

Мы рассматривали выше примеры, когда все грузопотоки связаны между собой, однако возможен случай, когда они распадаются на две или на три несвязанных группы. Если эти группы грузопотоков далеко отстоят одна от другой, можно проверять отдельно правильность каждой из них указанным выше способом. Однако, если потоки тесно соприкасаются один с другим, этой проверки недостаточно — необходима дополнительная проверка, которая состоит в следующем. Пусть для одной группы грузопотоков составлен потенциал  $P$ , а для другой группы потенциал  $Q$ . Тогда должно соблюдаться следующее «правило четырехугольника»:

Если  $A$  и  $a$  пункты из первой группы, а  $B$  и  $b$  из второй группы, то должно иметь (место):  
 $(P_a - P_A) + (Q_b - P_B) < A_b + aB$ .

При этом проверку достаточно производить только для наилучше примыкающих пар пунктов. Если эти неравенства соблюдены, план наивыгоднейший. В случае обнаружения нарушения такого неравенства возможно исправление плана. Как оно осуществляется, покажем на примере.

Рассмотрим план, приведенный на фиг. 7. Определяем потенциалы для одной группы грузопотоков, начиная с пункта 1, и для другой с пункта 10. Проверяем четверку пунктов 11–9–10–6; получаем:

$$(670 - 210) + (1489 - 1000) > 485 + 340.$$

Следовательно, план перевозок может быть улучшен. Для этой цели по кольцу  $11 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 11$  добавляем наименьшее встречающееся в противоположном направлении число вагонов — 25. Иначе говоря, из пункта 11 направляем 25 вагонов в 6, число вагонов из 10 в 6 уменьшаем с 300 до 275, из 10 в 9 направляем 25, из 9 в 1 вместо 380 — 355, из 8 в 1 перевозку снимаем, из 11 в 8 вместо 275 только 250.

Выигрыш составит:

$$25 \times [(670 - 210) + (1489 - 1000) - (485 + 340)] = 25 \times 115 = 2875 \text{ ваг.-км.}$$

Полученный в результате измененный план, как можно убедиться, составив для него потенциал, будет правильным.

#### V. Учет дополнительных условий.

Иногда, кроме требований минимального тонно-километража, приходится учитывать некоторые дополнительные условия. Использование потенциала позволяет в ряде случаев прийти к наивыгоднейшему решению и здесь.

Укажем несколько таких вопросов.

а) *Загруженные магистрали.* Нередко при составлении плана ставится условием ограниченное использование загруженных магистралей (например, загрузка их данным грузом не больше, чем в предшествующий месяц). Правильность плана, составленного с учетом этого условия, может быть проверена нахождением потенциала. Именно, если допустимая нагрузка загруженной магистрали использована в плане не полностью, проверка производится прежним способом. Если эта нагрузка использована, то при определении потенциала нельзя применять основное свойство его  $U_B - U_A \leq AB$ , если путь, соединяющий  $A$  и  $B$ , полностью или частично проходит по такой магистрали.

б) *Устранение излишних угловых грузопотоков.* Если считать, что угловой заезд равносильен лишним, скажем, 30 км пробега, то необходимо при проверке плана с помощью потенциала учитывать это. Именно, при составлении потенциала, если путь, соединяющий пункты  $A$  и  $B$ , связан с угловым заездом, нужно к расстоянию пунктов  $A$  и  $B$  приплюсовать 30 км.

в) *Загруженные узлы.* Требуется, чтобы некоторые узлы были разгружены от прохождения части перевозок. Здесь можно либо, как в случае б), учитывать прохождение пути, соединяющего два пункта, через загруженный узел, приплюсовывая 50 км к их расстоянию, либо, если задана максимально допустимая нагрузка узла, то, как в случае а), не применять основного свойства потенциала для путей, проходящих через этот загруженный узел.

г) Часто тонно-километраж не вполне правильно отражает затраты, связанные с осуществлением перевозки. Однако метод расчета применим без всяких изменений, если в расчете расстояние  $AB$  заменить, например, на себестоимость перевозки одного вагона, тариф и т. п., если это будет признано более правильным.

д) При составлении плана перевозок приходится учитывать также возможность маршрутизации и некоторые другие моменты, связанные с организацией путей движения. Эти моменты возможно учитывать после предварительного составления плана, отвечающего минимальному тонно-километражу (или минимальным затратам). При этом, если в план будет включен новый поток из А в В такой, что для него  $P_A - P_B = AB$ , то суммарный тонно-километраж не возрастет. Если разница  $AB - (PA - PB)$  будет близка к нулю, то он изменится незначительно.

## VI. Об области применения расчета.

Планирование перевозок может применяться главным образом для массовых однородных грузов (строительный лес, цемент, уголь (для энергетических целей), соль, сахар). Такой план должен составляться для каждого вида массовых грузов, а также для порожняка по видам его. В таком случае учитывать порожние направления при планировании грузопотоков уже не нужно.

Начальнику Техничко-экспертного Отдела НКПС

Еще в 1941 и затем в 1942 гг. Математическим институтом АН была направлена к Вам в Отдел моя совместная с М. К. Гавуриным работа «Математические методы в вопросах планирования перевозок». Она была передана Вами (точнее, Вашим Зам. тов. А. В. Паталеевым) в Отдел народнохозяйственных перевозок. После более чем шестимесячного рассмотрения в указанном Отделе, начальником его, тов. Корнеевым было предложено дать упрощенное изложение метода работы, чтобы работники Отдела могли изучить его и проверить на материале Отдела. Направляя в настоящий момент вторично такое упрощенное изложение на имя тов. Корнеева, прошу Вас проследить за тем, чтобы оно было надлежащим образом использовано и рассмотрено в указанном отделе. Прошу информировать меня о результатах этого рассмотрения.

Доктор физ.-мат. наук, профессор

Л. В. Канторович

Ярославль, Первомайская 9, кв. 50

СССР НКПС  
Техничко-экспертный отдел  
9 июня 1942 г. № 4209/28

ЗАМ. НАЧАЛЬНИКА ЦЕНТРАЛЬНОГО  
ПЛАНОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОТДЕЛА  
Копия — ПРОФЕССОРУ КАНТОРОВИЧУ Л. В.  
Ярославль, Первомайская 9, кв.50

Техничко-экспертный отдел при этом направляет Вам две работы профессора Канторовича Л. В. «Экономическая оценка мероприятий, обеспечивающих повышение эффективности работы ж.-д. транспорта» и «О некоторых мероприятиях, обеспечивающих повышение эффективности работы ж.-д. транспорта» и просит дать по ним свое заключение и результаты сообщить непосредственно автору, профессору Л. В. Канторовичу.

ПРИЛОЖЕНИЕ: 2 письма на 15 страницах.

ЗАМ. НАЧАЛЬНИКА ТЕХНИКО-ЭКСПЕРТНОГО  
ОТДЕЛА НКПС (Савельев)

СССР НКПС  
Техничко-экспертный  
ОТДЕЛ  
2. IX . 1942 г.  
N 4201

ПРОФЕССОРУ КАНТОРОВИЧУ Л. В.  
Ярославль, Первомайская 9, кв. 50

При этом прилагается ответ Центрального Планово-Экономического Отдела НКПС относительно использования Вашей работы, а также обе работы.

По вопросам планирования перевозок ответ Вам послан Грузовым управлением НКПС.

ЗАМ. НАЧАЛЬНИКА ТЕХНИКО-ЭКСПЕРТНОГО  
ОТДЕЛА НКПС (А.ПАТАЛЕЕВ)

ВХ. 563      15.VII.42 г.  
ЦТЕХ — тов. Савельеву

Работа профессора КАНТОРОВИЧА «Экономическая оценка мероприятий, обеспечивающих повышение эффективности работы ж.-д. транспорта» представляет известный интерес, но практически применена в настоящее время быть не может.

Вторая работа профессора Канторовича ценности не представляет, так как в ней, кроме перечня всем известных вопросов, ничего нет.

Согласно договоренности возвращаю Вам работу.

ЗАМ. НАЧАЛЬНИКА ПЛАНОВО-  
ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОТДЕЛА НКПС  
(Чудов)

14 июля 1942 г.  
№ 3904180

Записка  
Ал. Вас.,

тов. Филимонов консультанта не назвал, а рекомендовал послать автору копию письма тов. Чудова.

# Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте\*)

## I

Правильный подбор поставов имеет весьма важное значение, так как он существенно влияет на количественный выход пилопродукции и ее ассортимент. Вопрос о том, как найти поставы, обеспечивающие максимальный объемный выход пилопродукции из сырья, рассматривался в литературе по лесопильному делу; впервые теория таких поставов предложена в работах инж. Х. Л. Фельдмана<sup>1)</sup>.

Методы обеспечения максимального выхода пилопродукции в заданном ассортименте, по-видимому, не освещались в литературе<sup>2)</sup>, хотя эта задача весьма актуальна для планирования работы лесопильных заводов.

В настоящей статье мы предлагаем математически точный и в то же время достаточно элементарный и практически осуществимый метод решения задачи подбора поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте<sup>3)</sup>. Чтобы облегчить усвоение метода, мы его излагаем на конкретных примерах.

Примем следующие условия задачи. Требуется распилить 40 000 бревен длиной 6,5 м, диаметром 15 см, 17 см, 19 см и 21 см, причем каждая из градаций диаметра представлена 10 000 бревен. Общий объем всей партии бревен — 8660 м<sup>3</sup>. Средний сбег — 0,7–0,8 см на 1 пог. м длины бревна. Ширина пропила — 3 мм.

Бревна распиливаются на доски четырех групп толщин: I — 50 мм; II — 30 мм и 40 мм; III — 25 мм и IV — 22 мм, 19 мм, 16 мм и 13 мм. Доски II группы толщин из середины бревна не выпиливаются.

Рассмотрим три варианта требуемого процентного соотношения групп толщин (табл. 1).

## Используемые поставы

Выбираем поставы, обеспечивающие получение досок заданных размеров и удовлетворяющие приведенным выше условиям. При обозначении поставов записываем доски в том порядке, как они получаются из бревна, показывая в числителе

---

\*) Направлена в журнал «Лесная промышленность» в 1941 г. Опубликована в нем в 1949 г., часть I — в № 7, с. 15–17; часть II — в № 8, с. 17–19.

<sup>1)</sup> Фельдман Х. Л. Альбом номограмм максимальных поставов. — Л.: Севзаплес, 1936.

<sup>2)</sup> Один пример подбора поставов, обеспечивающего заданный ассортимент, но не обеспечивающего максимума, дан в книге Забелкин Ф. Ф. Поставы и стокноты в лесопильном производстве. — М.: Гослестехиздат, 1935. — С. 150–250.

<sup>3)</sup> Излагаемый метод представляет развитие и частное применение общего метода разрешающих множителей, развитого в работе автора «Математические методы организации и планирования производства». — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1939.

Таблица 1

Группы толщин	Соотношение групп толщин в %		
	1-й вариант	2-й вариант	3-й вариант
I	50	40	45
II	20	40	40
III	15	} 20	15
IV	15		

толщину доски в миллиметрах, а в знаменателе ширину в сантиметрах. Длина средних досок полная — 6,5 м. В том случае, когда длина крайней доски менее 6,5 м, ее размер указывается рядом (в сантиметрах). Ввиду симметричного расположения пил в поставе выписываем половину поставов от середины к краю, беря в случае нечетного поставов размеры средней доски в скобки. При таком порядке обозначений система выбранных поставов запишется так:

<i>a</i> – диаметр бревна 15 см						<i>c</i> – диаметр бревна 19 см					
<i>a</i> <sub>1</sub>	(25/11)	30/12	19/8		540	<i>c</i> <sub>1</sub>	50/10	19/12	19/8		420
<i>a</i> <sub>2</sub>	(50/14)	25/11	16/7		450	<i>c</i> <sub>2</sub>	25/18	25/15	19/11	13/8	450
<i>a</i> <sub>3</sub>	25/14	25/10	16/7		450	<i>c</i> <sub>3</sub>	(50/18)	30/15	16/11		420
<i>a</i> <sub>4</sub>	50/11	25/6			330	<i>c</i> <sub>4</sub>	(25/18)	30/15	16/11	16/8	
<i>b</i> – диаметр бревна 17 см						<i>c</i> <sub>5</sub>	(50/18)	40/13	19/9		570
<i>b</i> <sub>1</sub>	(50/16)	22/13	13/11	13/3	450	<i>c</i> <sub>6</sub>	(50/18)	50/10	13/8		420
<i>b</i> <sub>2</sub>	25/16	22/13	13/10	13/8	390	<i>d</i> – диаметр бревна 21 см					
<i>b</i> <sub>3</sub>	50/13	13/10	13/8		390	<i>d</i> <sub>1</sub>	50/18	25/14	16/9		540
<i>b</i> <sub>4</sub>	25/16	30/14	19/10	13/7	420	<i>d</i> <sub>2</sub>	(50/20)	30/17	22/13	16/9	480
<i>b</i> <sub>5</sub>	25/16	40/13	19/8		540	<i>d</i> <sub>3</sub>	(50/20)	40/16	25/10		540
<i>b</i> <sub>6</sub>	(50/16)	30/12	19/8		570	<i>d</i> <sub>4</sub>	25/20	30/17	19/13	16/9	570
<i>b</i> <sub>7</sub>	(50/16)	40/10				<i>d</i> <sub>5</sub>	(25/20)	40/18	22/13	16/9	570
						<i>d</i> <sub>6</sub>	50/18	40/10			570

Далее подсчитываем объемный выход пилопродукции предусмотренных нами толщин по каждому из приведенных поставов при распиловке всех 10 000 бревен каждого диаметра. Результаты подсчета приведены в табл. 2.

### Методика подбора системы поставов

Из табл. 2 видно, что если выбрать поставы, дающие для каждого диаметра максимальный выход, именно: *a*<sub>2</sub>, *b*<sub>1</sub>, *c*<sub>3</sub>, *d*<sub>2</sub>, то общий выход продукции будет

$$914 + 1170 + 1506 + 1823 = 5413 \text{ м}^3,$$

или 62,5% от всего объема бревен (8660 м<sup>3</sup>).

При распиловке бревен по этим поставам, дающим максимальный выход, мы получим распределение продукции по группам толщин, приведенное в табл. 3.



**Таблица 2**  
**Количество пилопродукции, получаемой**  
**из 10 000 бревен всех четырех градаций диаметра**

Диаметр бревна в см	Поставы	Группы толщин досок (виды продукции)				Всего пилопродукции в м <sup>3</sup>
		I	II	III	IV	
		Количество пилопродукции каждой группы в м <sup>3</sup>				
15	<i>a</i> <sub>1</sub>	—	468	227	164	859
	<i>a</i> <sub>2</sub>	455	—	358	101	914
	<i>a</i> <sub>3</sub>	—	—	780	89	869
	<i>a</i> <sub>4</sub>	715	—	100	—	815
17	<i>b</i> <sub>1</sub>	520	—	—	650	1170
	<i>b</i> <sub>2</sub>	—	—	520	620	1140
	<i>b</i> <sub>3</sub>	845	—	—	250	1095
	<i>b</i> <sub>4</sub>	—	546	260	323	1129
	<i>b</i> <sub>5</sub>	—	676	260	164	1100
	<i>b</i> <sub>6</sub>	520	468	—	155	1143
	<i>b</i> <sub>7</sub>	520	520	—	—	1040
19	<i>c</i> <sub>1</sub>	1040	—	—	417	1457
	<i>c</i> <sub>2</sub>	—	—	1073	366	1439
	<i>c</i> <sub>3</sub>	585	585	—	336	1506
	<i>c</i> <sub>4</sub>	—	663	683	115	1461
	<i>c</i> <sub>5</sub>	585	676	—	174	1435
	<i>c</i> <sub>6</sub>	1235	—	—	87	1322
21	<i>d</i> <sub>1</sub>	1170	—	455	156	1781
	<i>d</i> <sub>2</sub>	650	663	—	510	1823
	<i>d</i> <sub>3</sub>	650	832	270	—	1752
	<i>d</i> <sub>4</sub>	—	663	650	468	1781
	<i>d</i> <sub>5</sub>	—	936	325	519	1780
	<i>d</i> <sub>6</sub>	1170	456	—	49	1675

**Таблица 3**  
**Распределение выхода пилопродукции**  
**по группам толщин при распиловке по поставам *a*<sub>2</sub>, *b*<sub>1</sub>, *c*<sub>3</sub>, *d*<sub>2</sub>**  
**(максимальный выход)**

Группа толщин	В м <sup>3</sup>	В % к итогу
I	2210	40,8
II	1248	23,1
III	358	6,6
IV	1597	29,5
Всего	5413	100,0

Как видно из табл. 3, это распределение значительно отличается от нужного нам ассортимента, например того, который указан в первом варианте: I — 50%, II — 20%, III — 15%, IV — 15%.

Задача состоит, следовательно, в том, чтобы подобрать другую комбинацию поставов, обеспечивающую получение заданного ассортимента досок при выходе, по возможности приближающемся к максимальному.

Предлагаемая нами методика нахождения необходимой комбинации поставов для обеспечения заданного ассортимента состоит в последовательном применении для этой цели корректирующих множителей, которые отвечают отдельным видам (группам толщин) пилопродукции и приводят к увеличению или уменьшению доли данного вида пилопродукции в общем выходе пиломатериалов.

Прежде всего поясним на примере значение корректирующих множителей для сравнительной оценки различных поставов. Возьмем, например, такую систему множителей:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \text{ — для досок I вида (I группы толщин),} \\ \beta &= 1,2 \text{ — для досок II вида,} \\ \gamma &= 1 \text{ — для досок III вида,} \\ \lambda &= 0,8 \text{ — для досок IV вида.}\end{aligned}$$

Переоценив, умножая на эти множители, выход пиломатериалов из бревен диаметром 15 см по различным поставам, приведенным в табл. 2, получим следующие размеры выхода пилопродукции:

$$\begin{aligned}\text{для } a_1 &= 468 \times 1,2 + 227 \times 1 + 164 \times 0,8 = 919, \\ \text{для } a_2 &= 455 \times 1 + 358 \times 1 + 101 \times 0,8 = 894, \\ \text{для } a_3 &= 780 \times 1 + 89 \times 0,8 = 851, \\ \text{для } a_4 &= 715 \times 1 + 100 \times 1 = 815.\end{aligned}$$

Как мы видим, при переоценке объемного выхода пилопродукции с учетом корректирующих множителей максимум перейдет от постава  $a_2$  к поставу  $a_1$ .

Для удобства дальнейшего изложения будем называть условно-максимальным при данных корректирующих множителях тот постав, который при умножении количеств пилопродукции по отдельным видам на соответствующие множители дает наибольший общий выход пилопродукции по сравнению со всеми другими поставами для того же диаметра. Если этот общий выход окажется одинаковым и наибольшим для двух или трех поставов, выбранных для одного диаметра бревен, то будем все эти поставы считать условно-максимальными.

В рассмотренном примере условно-максимальным является постав  $a_1$ . При значении множителей  $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 1$  максимальными, очевидно, будут поставы, дающие абсолютный максимум.

В основу предлагаемой методики положено следующее правило, математически доказанное автором статьи<sup>4)</sup>.

*Если комбинация поставов удовлетворяет двум условиям:*

- 1) *дает продукцию в заданном ассортименте;*
- 2) *составлена из поставов условно-максимальных при некоторой определенной системе корректирующих множителей,*

<sup>4)</sup> Математическое доказательство этого правила опущено в целях сокращения и упрощения статьи.

то эта комбинация и является решением задачи, т. е. обеспечивает максимальный выход продукции в заданном ассортименте. Иначе говоря, ни при какой другой комбинации данных поставов, дающей продукцию в требуемом ассортименте, выход не может оказаться большим.

Из этого основного положения вытекает, что подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте, сводится к решению задачи: найти такую систему корректирующих множителей, которая с помощью условно-максимальных поставов, отвечающих этой системе, позволила бы получить пилопродукцию в заданном ассортименте.

## II

Общий ход решения задачи таков.

а) Исходим из некоторой первоначальной системы корректирующих множителей.

б) Определяем в соответствии с этой системой условно-максимальные поставки, которые дадут какой-то определенный состав пилопродукции. Если один из видов пилопродукции (одна из групп толщин) окажется при этом представленным недостаточно по сравнению с требуемым ассортиментом, то увеличиваем соответствующий ему множитель. Этим создается более благоприятная оценка тех поставов, которые дают большую долю пилопродукции этого вида: один из таких поставов становится условно-максимальным, и доля пилопродукции данного вида возрастает. Напротив, если некоторый вид пилопродукции занимает слишком большую долю в общем составе пилопродукции, то соответствующий ему множитель следует уменьшать. Дальнейшие детали методики мы рассмотрим на отдельных примерах.

**ПРИМЕР 1.** Сохраняя общие условия распиловки, отраженные в табл. 1, ставим задачей получение максимального выхода пиломатериалов следующих видов (групп толщин): I — 50%, II — 20%, III — 15%, IV — 15%.

Принимаем сначала множители  $\alpha = \beta = \gamma = \lambda = 1$ . Тогда условно-максимальными поставками оказываются абсолютно-максимальные, и мы приходим к распределению продукции по видам, которое приведено в табл. 2. Наиболее заметное отклонение от нужного ассортимента создает большой избыток досок IV вида. Поэтому отвечающий им множитель  $\lambda$  нужно уменьшить. Тогда, после умножения выхода на соответствующие множители, те поставки, в которых досок IV вида меньше, чем в максимальных, будут приближаться по оценке к максимальным для того же диаметра.

Для того чтобы установить, при каком именно значении  $\lambda$  оценка данного поставов совпадает с оценкой максимального, необходимо найти отношение  $\Delta\lambda$ , обозначающее отношение разницы между общей пилопродукцией для абсолютно-максимального и оцениваемого поставов (графа 7 табл. 2) к разнице между количествами досок IV вида для этих же поставов (графа 6 табл. 2). Условно-максимальным поставом будет тот, которому отвечает наименьшее значение отношения  $\Delta\lambda$ .

Пользуясь данными табл. 2, нетрудно вычислить значения  $\Delta\lambda$  для различных поставов, приводимые нами в табл. 4. Как видно из данных табл. 4, наименьшее отношение  $\Delta\lambda$  получается при переходе от поставов  $b_1$  к  $b_6$ ; оно равно  $27 : 495 =$

$= 0,055^5)$ , откуда  $\lambda$  получает значение:

$$\lambda = 1 - 0,055 = 0,945.$$

При таком значении  $\lambda$  (и прежних значениях  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ ) условно-максимальными будут следующие поставы:  $a_2$ ,  $b_1$  и  $b_6$ ,  $c_3$ ,  $d_2$ .

**Таблица 4**  
**Значения  $\Delta\lambda$  для различных поставов\***

Диаметр в см	Поставы		$\Delta\lambda$	Диаметр в см	Поставы		$\Delta\lambda$
	абсолютно-максимальный	сравниваемый			абсолютно-максимальный	сравниваемый	
15	$a_2$	$a_3$	45:12	19	$c_3$	$c_4$	45:221
17	$b_1$	$b_2$	30:30		$c_3$	$c_5$	71:162
	$b_1$	$b_3$	75:400		$c_3$	$c_6$	184:249
	$b_1$	$b_4$	41:327	21	$d_2$	$d_1$	42:354
	$b_1$	$b_5$	70:486		$d_2$	$d_3$	71:510
	$b_1$	$b_6$	27:495		$d_2$	$d_4$	42:42
	$b_1$	$b_7$	130:650		$d_2$	$d_6$	148:461

\* Пример вычисления: для  $a_2$  и  $a_3$ :  $\Delta\lambda = (914 - 869) : (101 - 89) = 45 : 12$ .

Но произведенное уменьшение  $\lambda$  оказывается недостаточным. Действительно, если мы даже полностью перейдем от постава  $b_1$  к поставу  $b_6$ , т. е. примем систему поставов  $a_2$ ,  $b_6$ ,  $c_3$ ,  $d_2$ , то получим такое распределение по видам продукции, в котором доски IV вида все еще окажутся в избытке: I — 2210 м<sup>3</sup> (41%), II — 1716 м<sup>3</sup> (32,1%), III — 358 м<sup>3</sup> (6,6%), IV — 1102 м<sup>3</sup> (20,3%), всего 5386 м<sup>3</sup>.

Итак, производим дальнейшее уменьшение  $\lambda$ . Условно-максимальными теперь являются поставы  $a_2$ ,  $b_6$ ,  $c_3$ ,  $d_2$ . Для определения ближайшего совпадения мы можем снова воспользоваться вычисленными уже выше отношениями (табл. 4), за исключением данных для диаметра 17 см, так как максимальным является уже постав  $b_6$ , а не  $b_1$ . Поэтому для диаметра 17 см определяем отношение  $b_7$  и  $b_6$

$$\Delta\lambda = 103 : 155.$$

Легко убедиться, что теперь наименьшим является отношение, получаемое при переходе от постава  $d_1$  к поставу  $d_2$ . Оно равно  $42 : 354 = 0,118$ . Отсюда новое значение  $\lambda$  есть  $\lambda = 1 - 0,118 = 0,882$ .

Теперь условно-максимальными становятся поставы  $a_2$ ,  $b_6$ ,  $c_3$ ,  $d_1$  и  $d_2$ . Если перейти целиком от постава  $d_2$  к  $d_1$ , т. е. остановиться на комбинации:  $a_2$ ,  $b_6$ ,  $c_3$ ,

<sup>5)</sup>Конечно, можно было убедиться в этом, составив лишь несколько из приведенных в табл. 3 отношений.

$d_1$ , то получим такое распределение по видам продукции: I — 2730 м<sup>3</sup> (51,1%), II — 1053 м<sup>3</sup> (19,7%), III — 813 м<sup>3</sup> (15,2%), IV — 748 м<sup>3</sup> (14%), всего 5344 м<sup>3</sup>.

Распределение, как видим, практически не отличается от заданного. Полезный выход продукции — 5344 м<sup>3</sup>, или 61,7% — довольно близок к абсолютному максимуму — 62,5%. Ни при какой другой комбинации данных поставов, дающей тот же ассортимент, выход не может оказаться большим. Следовательно, задача решена.

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим теперь такое ассортиментное задание: I — 40%, II — 40%, III и IV — 20%.

Так как III и IV виды продукции объединены в одну группу, то множитель для них нужно брать общий  $\gamma = \lambda$ , и мы его будем обозначать через  $\gamma$ . В соответствии с этим и данные о выходе продукции III и IV вида (графы 5 и 6 табл. 2) для дальнейших подсчетов нужно объединить.

Как видно из табл. 2, выход пилопродукции по максимальным поставам  $a_2, b_1, c_3, d_2$  дает большой избыток продукции III и IV вида по сравнению с требованиями ассортимента ( $29,5 + 6,6 = 36,1\%$  вместо 20%). Исходные значения множителей нами приняты  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ . Поэтому для сокращения избытка пилопродукции III и IV вида необходимо уменьшить  $\gamma$ .

С помощью подсчетов, аналогичных приведенным в первом примере, определяем значение  $\gamma$ , нужное для того, чтобы оцениваемый постав совпал с максимальным. Для этого берем отношения  $\Delta\gamma$  разности общего выхода пилопродукции для максимальных и оцениваемых поставов (графа 7 табл. 2) к разности выхода досок III и IV вида для тех же поставов (суммы граф 5 и 6 табл. 2). Соответствующие цифры приведены в табл. 5.

**Таблица 5**  
**Значения  $\Delta\gamma$  для различных поставов\***

Диаметр в см	Поставы		$\Delta\gamma$	Диаметр в см	Поставы		$\Delta\gamma$
	абсолютно-максимальный	сравниваемый			абсолютно-максимальный	сравниваемый	
15	$a_2$	$a_1$	55:68	19	$c_3$	$c_5$	71:162
	$a_2$	$a_3$	99:359		$c_3$	$c_6$	184:247
17	$b_1$	$b_3$	75:400	21	$d_2$	$d_3$	71:240
	$b_1$	$b_4$	41:67		$d_2$	$d_6$	148:461
	$b_1$	$b_5$	70:226				
	$b_1$	$b_6$	27:495				

\* Пример вычисления: для  $a_2$  и  $a_1$

$$\Delta\gamma = (914 - 869) : [(358 + 101) - (227 + 164)] = 55 : 68.$$

Как видно из табл. 5, наименьшее отношение получается при переходе от  $b_1$  к  $b_6$ ;  $\Delta\gamma = 27 : 495 = 0,055$ , отсюда  $\Delta\gamma = 1 - 0,055 = 0,945$ . Однако это изменение оказывается недостаточным.

Как мы видели в примере 1, система поставов  $a_2, b_6, c_3, d_2$  дает такое распределение: I — 41%, II — 32,1%, III и IV — 26,9% (6,6 + 20,3). По-прежнему доски III и IV видов имеются в избытке. Производим дальнейшее уменьшение  $\gamma$ . Пользуемся той же табл. 4, только данные для диаметра 17 см, так же, как и в первом примере, заменяем отношением для  $b_7$  и  $b_6$ :  $\Delta\gamma = 103 : 155$ .

Тогда видим, что наименьшее отношение получается при переходе от  $a_3$  к  $a_4$ :  $\Delta\gamma = 99 : 359 = 0,276$ , отсюда  $\gamma = 0,724$ .

Условно-максимальными теперь будут поставы  $a_2, a_4, b_6, c_3, d_2$ .

Подсчитывая распределение выхода продукции, соответствующее системе поставов  $a_4, b_6, c_3, d_2$ , получаем: I — 2470 м<sup>3</sup> (46,6%), II — 1716 м<sup>3</sup> (32,5%), III и IV — 1101 м<sup>3</sup> (20,9%), всего 5287 м<sup>3</sup>.

Как мы видим, теперь оказалось мало досок II вида — 32,5% вместо 40%. Поэтому увеличиваем  $\beta$ . По мере увеличения  $\beta$  будут возрастать оценки для тех из оцениваемых поставов, которые дают большой выход досок II вида — в первую очередь  $d_3$  и  $a_1$ .

Значение  $\beta$ , при котором произойдет совпадение оценки для  $d_3$  и  $d_2$ , определится из уравнения:

$$650 + 663\beta + 510 \times 0,724 = 650 + 832\beta + 270 \times 0,724.$$

Отсюда и находим  $\beta = 1,028$ . Максимальными теперь будут поставы  $a_1$  и  $a_4, b_6, c_3, d_2$  и  $d_3$ .

Увеличение  $\beta$  недостаточно, так как, выбирая даже поставы  $a_4, b_6, c_3, d_3$ , получаем 1885 м<sup>3</sup> досок II вида, т. е. явно меньше 40%. Производим дальнейшее увеличение  $\beta$ : максимальными остаются поставы  $a_2$  и  $a_4$  (их оценки не зависят от  $\beta$ ),  $b_6, c_3, d_2$ . Возрастает оценка для поставы  $a_1$ . Значение  $\beta$ , при котором получится совпадение  $a_1$  с  $a_2$  (а следовательно, и с  $a_4$ ), определится из уравнения:

$$468\beta + 391 \times 0,724 = 715 + 100 \times 0,724,$$

откуда  $\beta = 1,078$ . Теперь максимальными оказываются поставы  $a_1, a_2, a_4, b_6, c_3, d_3$ , в чем окончательно убеждаемся с помощью новой оценки всех поставов в табл. 6, где приведены данные об общем выходе пилопродукции после корректировки выхода пиломатериалов по отдельным видам продукции умножением на множители  $\beta$  и  $\gamma$ .

Полужирным набраны условно-максимальные поставы.

Теперь из имеющихся условно-максимальных поставов подбираем комбинацию, дающую заданный ассортимент. Ту долю бревен диаметром 15 см, к которым нужно применить постав  $a_1$ , обозначим через  $x$ , долю бревен, распиливаемую по поставу  $a_2$ , — через  $y$ , оставшуюся часть бревен  $(1 - x - y)$  нужно распиливать по поставу  $a_4$ .

Неизвестные  $x$  и  $y$  определяются из условия, что при системе поставов

$$xa_1 + ya_2 + (1 - x - y)a_4, b_6, c_3, d_2$$

количества продукции I, II и III + IV видов относятся как 40 : 40 : 20.

**Таблица 6**  
**Выход пилопродукции для различных поставов при**  
**корректирующих множителях  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1,078$ ,  $\gamma(\lambda) = 0,724$**

Диаметр 15 см		Диаметр 17 см		Диаметр 19 см		Диаметр 21 см	
поставы	выход	поставы	выход	поставы	выход	поставы	выход
$a_1$	<b>787</b>	$b_1$	991	$c_1$	1342	$d_1$	1612
$a_2$	<b>787</b>	$b_2$	825	$c_2$	1042	$d_2$	1734
$a_3$	629	$b_3$	1026	$c_3$	<b>1459</b>	$d_3$	<b>1743</b>
$a_4$	<b>787</b>	$b_4$	1011	$c_4$	1292	$d_4$	1524
		$b_5$	1036	$c_5$	1440	$d_5$	1620
		$b_6$	<b>1137</b>	$c_6$	1298	$d_6$	1697
		$b_7$	1081				

Пользуясь данными табл. 1, это условие можно записать так:

$$\frac{455y + 715(1 - x - y) + 520 + 585 + 650}{40} = \frac{468x + 468 + 585 + 832}{40} =$$

$$= \frac{391x + 459y + (100 - x - y) + 155 + 336 + 270}{20},$$

или:

$$2470 - 715x - 260y = 1885 + 468x = 1722 - 582x + 713y;$$

откуда находим:  $x = 0,46$ ;  $y = 0,15$ ;  $1 - x - y = 0,39$ .

Итак, комбинация поставов, решающая задачу, будет такой:

$$0,46a_1 + 0,15a_2 + 0,39a_4, b_6, c_3, d_3,$$

т. е. к 46% бревен диаметром 15 см нужно применять постав  $a_1$ , к 15 — постав  $a_2$ , к 39% — постав  $a_4$ . Выход пилопродукции при таком решении: I — 2103 м<sup>3</sup> (40%), II — 2100 м<sup>3</sup> (40%), III и IV — 1049 м<sup>3</sup> (20%), в том числе III — 468 м<sup>3</sup> (9%), IV — 581 м<sup>3</sup> (11%), всего 5252 м<sup>3</sup>. Общий выход пилопродукции из сырья — 60,7%.

**ПРИМЕР 3.** Для применения описанной методики на практике нет нужды в точности следовать приемам, использованным при решении рассмотренных выше примеров. Можно на основании соображений, подсказываемых практическими навыками, подобрать группу поставов, с помощью которых предполагается реализовать заданный ассортимент. После этого следует, во-первых, убедиться в том, что данный ассортимент действительно реализуется, и, во-вторых, проверить, является ли полученное решение максимальным. Для выполнения второго требования нужно с помощью уравнения совпадения оценок для поставов одной группы определить значения корректирующих множителей (один из них можно принять равным 1) и

после того, как они найдены, проверить, не превышают ли оценки прочих поставов оценок используемых.

Проиллюстрируем сказанное на примере следующего ассортиментного задания по видам продукции: I — 45%, II — 40%, III и IV — 15%.

Сопоставляя заданный ассортимент с приведенным в табл. 2, который дают максимальные поставки (I — 40%, II — 23,1%, III и IV — 36,1%), мы видим, что нам нужно значительно уменьшить долю продукции III и IV видов и особенно увеличить долю II вида. Поэтому целесообразно вместо максимального поставка  $a_2$ , дающего большое количество досок III и IV видов и вовсе не дающего досок II вида, взять поставки  $a_1$  и  $a_4$ ; из поставов  $b$  берем  $b_6$ , дающий несколько меньший объем продукции, чем  $b_1$ , но более благоприятный по составу; далее поставки  $c_3$ ,  $c_5$  и, наконец,  $d_2$ .

Иначе говоря, мы подбираем поставки, близкие к максимальным, но с распределением продукции, более подходящим к требуемому ассортименту. Чтобы удовлетворить требуемым условиям, число поставов должно быть равно 6 (число групп поставов 4 + число видов продукции — 1).

Чтобы проверить, удовлетворяют ли эти поставки ассортиментному заданию, обозначаем через  $x$  долю тех бревен диаметром 15 см, к которым нужно применить постав  $a_1$ , тогда  $(1 - x)$  — доля тех, к которым нужно применить постав  $a_4$ . Аналогично выразим через  $y$  и  $(1 - y)$  доли тех бревен диаметром 19 см, к которым нужно применить поставки  $c_3$  и  $c_5$ . Тогда для определения  $x$  и  $y$  получаем уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{715(1-x) + 520 + 585y + 5859(1-y) + 650}{45} = \\ & = \frac{468x + 468 + 586y + 676(1-y) + 832}{40} = \\ & = \frac{391x + 100(1-x) + 155 + 336y + 174(1-y) + 270}{15}. \end{aligned}$$

Решая их, находим  $x = 0,206$ ,  $y = 0,08$ . То обстоятельство, что для  $x$  и  $y$  получились значения между 0 и 1, подтверждает осуществимость данного ассортиментного задания.

Округляя полученные значения, принимаем  $x = 1/5$ ;  $y = 1/12$ ; и получаем такую комбинацию поставов:

$$\frac{1}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_4; b_6; \frac{1}{12}c_3 + \frac{11}{12}c_5; d_3.$$

Эта система поставов дает такой состав продукции: I — 2307 м<sup>3</sup> (44,8%), II — 2073 м<sup>3</sup> (40,3%), III и IV — 771 м<sup>3</sup> (14,9%), в том числе III — 395 м<sup>3</sup> (7,7%), IV — 371 м<sup>3</sup> (17,2%), всего 5151 м<sup>3</sup>. Общий выход продукции из сырья будет 59,5%, т. е. довольно существенно отличается от абсолютного максимума (62,5%). Это и естественно, так как ассортиментное условие весьма жесткое.

Для того чтобы убедиться, что выбранная система поставов дает максимум выхода продукции при данных условиях, принимаем за единицу корректирующий множитель для I вида продукции, обозначаем через  $\beta$  множитель для II вида и



$\gamma$  — для III и IV видов. Для нахождения  $\beta$  и  $\gamma$  составляем уравнение из условия равенства оценок для поставов  $a_1$  и  $a_4$ , а также для  $c_3$  и  $c_5$ :

$$\begin{aligned}468\beta + 391\gamma &= 715 + 100\gamma, \\585 + 585\beta + 336\gamma &= 585 + 676\beta + 174\gamma,\end{aligned}$$

откуда находим  $\beta = 1,135$ ,  $\gamma = 0,533$ .

Произведя оценку поставов с помощью этих корректирующих множителей, можем убедиться, что остальные поставки имеют оценки ниже, чем использованные нами. Это свидетельствует о том, что данная система поставов дает максимальную продукцию при заданном ассортименте. Если же для какого-либо поставов оценка оказалась бы выше, то, заменяя им один из использованных поставов, можно было бы получить систему с несколько бóльшим выходом.

\* \* \*

На приведенных примерах показана достаточная эффективность предложенного нами метода подбора поставов.

Метод применим и при различных видоизменениях условий задачи. Так, в наших примерах мы считали, что количества бревен различных диаметров относятся как  $1 : 1 : 1 : 1$ . Если бы это отношение было другим, например  $1 : 1,2 : 1,5 : 1,8$ , то вся разница в расчетах состояла бы лишь в том, что прежде чем применить описанную методику, нужно было бы все цифры в табл. 2, относящиеся к поставам  $b$ , умножить на 1,2, относящиеся к поставам  $c$  — на 1,5, а относящиеся к поставам  $d$  — на 1,8, после чего вновь полученной таблицей заменить табл. 2.

Укажем также, что если имеются результаты пробных распилов по данным поставам, то ими можно заменить в исходной табл. 2 выходы пилопродукции, полученные посредством расчета.

При решении задачи мы исходили из определенной системы поставов. Предположим, что после того как решение найдено, будет предложен новый постав. Тогда для того, чтобы решить вопрос о том, может ли использование этого поставов улучшить результат, достаточно произвести оценку его с помощью окончательных корректирующих множителей. Если его оценка окажется ниже, чем оценка условно-максимального поставов того же диаметра, то он бесполезен. Если его оценка выше, то нужно повторить решение с использованием этого поставов, и результат улучшится.

Мы полагаем, что предложенный нами метод может быть успешно использован с соответствующими изменениями и в случаях, когда ассортиментные требования характеризуются условиями, отличными от тех, которые рассмотрены в этой статье.

## Комментарии к статье «Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте»

В своих воспоминаниях «Мой путь в науке», рассказав о трудностях, возникших с публикацией его работы по транспортной задаче, Л. В. Канторович далее говорит, что «примерно такая же судьба постигла» и статью о «рациональном раскрое древесины на пиловочник наиболее высокой ценности. Она пролежала в редакции журнала «Лесная промышленность» до 1949 г. и только тогда вышла в свет, — это был год, когда я, правда за другие работы, получил Государственную премию» ([2002, 1], С. 57–58)<sup>1)</sup>.

Тот факт, что Леонид Витальевич, желавший добиться самого широкого применения методов открытого им линейного программирования, обратился, в первую очередь, именно к деревообработке обусловлен, вероятно, двумя обстоятельствами. Во-первых, как он сам вспоминает, на брошюру 1939 г., которая почти не получила никаких откликов, в журнале «Лесная промышленность» появилась хорошая рецензия, «написанная профессором Н. М. Гутерманом, тестем М. И. Вишека<sup>2)</sup>, благодаря которому, видимо, Гутерман и обратил внимание на нее» ([2002, 1], С. 54). Во-вторых, сама постановка проблемы была инициирована Фанерным трестом, и, успешно решив поставленную там задачу, Канторович уже завоевал определенный авторитет у специалистов этой отрасли и, очевидно, установил полезные контакты.

Публикуемая работа была выполнена, по крайней мере, уже к весне 1940 г. и направлена в журнал «Механическая обработка древесины» (предполагалось, что она выйдет в № 8 за 1940 г. — это видно из примечания к приводимым в приложении 2 тезисам доклада). О том, что первоначально статья направлялась именно в этот журнал Л. В. Канторович сообщает и в письме в редакцию, направленном уже после войны<sup>3)</sup>. Упомянутый доклад, скорее всего, состоялся в начале 1940 г. в Лесотехнической академии — о наличии достаточно тесных контактов с Академией свидетельствует его совместное с проректором Академии проф. А. М. Минкевичем письмо в Гослестехиздат по поводу работы Х. Л. Фельдмана, направленное в начале 1940 г. (эта дата указана в письме Л. В. Канторовича в Гослестехиздат от 12 апреля 1941 г.).

Из приводимых материалов, в частности, по подробному отзыву о работе инженера Фельдмана, видно, насколько глубоко Л. В. Канторович влез в лесопильное дело.

Следует еще сказать, что он занимался и конкретными задачами по оптимизации лесопиления. Об одной из них говорится в письме ЛОМИ, направленном в Главстройлес в начале 1941 г.<sup>4)</sup> Она же упоминается в примечании, имевшемся в оригинале статьи 1941 г.<sup>5)</sup>, но не вошедшем в опубликованный ее текст, а именно:

*Во время печатания данной работы под руководством автора была решена задача наилучшего подбора поставов при довольно сложном ассортиментном задании (комплект пиломатериалов для стандартных домов), в котором ассортимент состоял из 15 различных размеров, а в составе пиловочника участвовали все диаметры. Метод корректирующих множителей оказался вполне эффективным и здесь.*

---

<sup>1)</sup>Как видно из приводимой в приложении 1 переписки с редакцией, решение о публикации этой статьи напрямую связано с присуждением Сталинской премии (см. письмо от 27 мая 1949 г.).

<sup>2)</sup>Марк Иосифович Вишек (1921–?) — московский математик, профессор, основные работы в области математической физики.

<sup>3)</sup>См. приложение 1. Текст этого письма приводится по недатированному черновику, сохранившемуся в архиве Л. В. Канторовича.

<sup>4)</sup>См. приложение 3.

<sup>5)</sup>См. приложение 4.

О другой задаче вспоминает В. А. Залгаллер:

Леонид Витальевич хотел показать полезность оптимизационных расчетов на крупных конкретных задачах. Он с молодых лет близко знал проблему согласования заказанного ассортимента досок с минимизацией отходов при лесопилении. Он располагал статистикой данных о распределении бревен по диаметрам и данными о заказанном ассортименте досок в годичном экспорте из СССР в Англию. Оптимальный план распиловки он поручил в 1940 г. рассчитать аспиранту Г. М. Хейсину<sup>6)</sup>, который вскоре ушел на фронт и погиб. Когда я вернулся с фронта, Л. В. предложил мне продолжить эту работу. Это были громоздкие расчеты (компьютеров тогда не было, а обчислять надо было данные примерно следующих размеров: 14 классов бревен, 12 000 возможных установок пил, 70 заказанных типов досок). Хейсин начал расчеты, опираясь на наивно упрощенные предположения о других данных — о среднем ассортименте выхода досок при известном среднем диаметре партии бревен и фиксированной установке пил. Поэтому я написал (одобренное Леонидом Витальевичем и изданное лесопильщиками) исследование о таком выходе<sup>7)</sup>. Позже гибкий пакет программ компьютерной оптимизации в лесопилении по методам Леонида Витальевича, уже со всеми реальными данными, был создан коллективом под руководством И. В. Соболева в Петрозаводске. У них ушло на это 12 лет. Они имели большой экономический успех и опередили в этом западных специалистов, которые позже пришли к использованию этих методов. Поучителен вопрос, заданный Соболеву аналогичным скандинавским специалистом: «В СССР 70 заводов экспортного лесопиления. Только 8 из них используют оптимизационные методы. Почему остальные заводы не разоряются?» Что мог в те годы ответить Соболев<sup>8)</sup>?

Упомянем еще об одной конкретной задаче, которой Л. В. Канторович занимался во время войны, находясь в эвакуации в Ярославле<sup>9)</sup>. Эта задача о наилучшей распиловке бревен на дощечки для ящиков решалась для завода «Парижская коммуна» весной 1942 г. Частично материалы этой работы вошли как § 6 главы II в совместную с В. А. Залгаллером книгу 1951 г. «Расчет рационального раскроя промышленных материалов».

### Приложение 1. Переписка с редакцией журнала «Лесная промышленность»

НАРКОМЛЕС СССР

редакция журнала ЛЕСНАЯ ПРОМЫШЛЕННОСТЬ

Москва, 12, ул. Куйбышева, Рыбный пер. 3  
№ 72-а

Тел. К 1-28-41  
28 февраля 1941 г.

Ленинград 3  
проспект К. Либкнехта,  
дом 32, кв. 7,  
проф. Канторович Л. В.

Тов. Канторович!

Вашу статью «Подбор поставов, обеспечивающий максимальный выход продукции при заданном ассортименте» намеряем поместить в майском номере журнала.

Зав. редакцией  
журнала /подпись/  
(А. Заболоцкая)

<sup>6)</sup>Хейсин Григорий Минеевич (1918–1941) — окончил ЛГУ в 1940 г.

<sup>7)</sup>Залгаллер В. А. Новое в составлении поставов для распиловки бревен. — Л.: ЦНИИЛ «Севзаплес», 1956. — Вып. 67. Работа воспроизведена в книге Л. В. Канторовича и В. А. Залгаллера (Рациональный раскрой промышленных материалов. 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Наука, 1971. — С. 171–220).

<sup>8)</sup>Залгаллер В. А. Воспоминания о Л. В. Канторовиче и об эмоциях, связанных с его экономическими работами. Очерки истории информатики в России. — Новосибирск, 1998. — С. 449–450.

<sup>9)</sup>См. приложение 5.

Уважаемый тов. Канторович!

Ваша статья получена мною в апреле месяце. Обидно, что редакция ее так долго задерживала. Считаю, что Ваша статья весьма серьезная и затрагивает актуальнейший вопрос, который до настоящего времени решался кустарно. Думаю, что не имеет смысла посылать Вам статью для внесения исправлений не принципиального порядка, так как это задержит лишь ее опубликование. Все эти исправления я сам внес при редактировании. Замечания у меня были следующего порядка<sup>10</sup>). Думаю, что не стоит перечислять все мелкие замечания, так как вся работа в целом заслуживает весьма лестного отзыва. Через несколько дней я передам Вашу статью в редакцию с указанием на необходимость скорого ее опубликования.

Думаю, что Вам следовало бы связаться с ЦНИИМОД(ом<sup>11</sup>), так как имеется много разделов в деревообработке, где можно было бы применять Ваши методы.

С искренним уважением  
М. Гутерман  
май 1941 г.

Гослестехиздат  
1 декабря 1942 г.

Ярославль, Первомайская ул. № 9, кв. 50  
тов. Л. Канторовичу

Уважаемый товарищ!

К сожалению, сейчас мы не сможем опубликовать Вашу статью ввиду ее значительной теоретичности, несмотря на то, что она представляет интерес для определенного круга читателей.

Дело в том, что со второй половины прошлого года в журнале публикуются исключительно такие статьи, которые могут оказать непосредственную техническую помощь не только нашим организациям, работающим на оборону, но и фронту. Ваша статья эту задачу не решает.

Аналогичной точки зрения придерживается и рецензент статьи — кандидат технических наук П. П. Аксенов, который в своем заключении написал: «Работу следует напечатать после окончания войны по соображениям малой ее ценности для решения задач военного времени».

С товарищеским приветом

Зам. Управляющего Гослестехиздатом,  
заведующий редакцией журнала «Лесная промышленность»  
Вас. Дробот

*В редакцию журнала «Лесная промышленность»*

В начале 1941 г. мною была направлена для помещения в Вашем журнале статья: «Подбор поставов, обеспечивающий максимальную продукцию при заданном ассортименте». Тогда же Вы сообщили мне, что работа получила положительную рецензию (Гутермана) и принята к опубликованию.

После этого, уже во время войны, редакция сообщила мне, что опубликование данной статьи задерживается до послевоенного времени. Полагаю со своей стороны, что в настоящее время имеются большие перспективы для использования данной работы на лесопильных предприятиях, в частности, при вышловке лесоматериалов для стандартных домов и по другим подобным стокнотам. Таким образом, нет оснований для дальнейшей задержки реализации данной работы.

Прошу редакцию сообщить мне, каковы в настоящее время перспективы опубликования работы.

Работа была первоначально предназначена для более специализированного журнала «Механическая обработка древесины», поэтому при желании редакции она может быть подвергнута некоторому сокращению.

Ст. научн. сотр.  
Мат. ин-та АН

Проф. Л. В. Канторович

<sup>10</sup>) Далее перечисляются некоторые из замечаний и сделанных исправлений. (Прим. ред.)

<sup>11</sup>) Центральный научно-исследовательский институт механической обработки древесины. (Прим. ред.)

Гослесбумиздат  
29 сентября 1948 г.

Профессору, доктору Л. В. Канторовичу

Ваша работа «Методы целесообразного подбора системы поставов» в план 1949 г. не включена. Об использовании Вашей статьи на эту тему в журнале сообщим особо.

Главный редактор А. Шукин

Редакция журнала «Лесная промышленность»  
27 мая 1949 г.

ПРОФЕССОРУ Л. В. КАНТОРОВИЧУ

Многоуважаемый Леонид Витальевич!

Прошу принять поздравление редакции журнала «Лесная промышленность» с присуждением Вам Сталинской премии. Прилагаю при этом копию оригинала Вашей статьи, подготовленного нами к печати в № 7 журнала. Прошу внимательно прочесть и внести все необходимые исправления . . .

Ввиду того, что журнал должен быть сдан в набор 5 июня, прошу прилагаемый экземпляр статьи со всеми необходимыми исправлениями и за Вашей подписью вернуть в редакцию не позднее этого срока.

Прилагаемую авторскую карточку просьба заполнить и вернуть вместе со статьей.

С уважением  
зам. отв. редактора (Ивантер)

## Приложение 2. Тезисы доклада Л. В. Канторовича

### ПОДБОР ПОСТАВОВ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЙ МАКСИМАЛЬНЫЙ ВЫХОД ПРОДУКЦИИ ПРИ ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТЕ

(тезисы доклада)

1. Хорошо известно, что общий выход пиломатериалов и его распределение по отдельным диаметрам находится в большой зависимости от используемых поставов.

2. Постава, обеспечивающие максимальный общий выход продукции, разработаны инж. Х. Л. Фельдманом. Их применение затруднено однако тем, что лесопильный завод должен дать продукцию, удовлетворяющую в одних случаях определенным общим ассортиментным требованиям (% толстых, тонких досок и т. п.), в других случаях жестким условиям стокнота. Чтобы удовлетворить этим требованиям, приходится отходить от максимальных поставов. Задача состоит в том, как это сделать, чтобы получить выход наиболее близкий к максимальному.

3. Вопрос о подборе поставов, обеспечивающих выполнение данного стокнота почти не рассматривался в литературе по лесопильному делу<sup>12)</sup>. О подборе же поставов, дающих при этом максимальный выход, не говорится нигде.

Я ставлю вопрос следующим образом:

Дан состав партии пиловочника (количество бревен каждого диаметра). Найден (для каждого диаметра) ряд поставов, дающих пиломатериалы требуемых размеров. Требуется указать, какие из поставов нужно использовать и к какому числу бревен следует применить каждый из этих поставов, чтобы получить продукцию требуемого состава в максимально возможном количестве.

<sup>12)</sup> Доведенное до конца решение одного примера дано только в книге Забелкина «Постава и стокноты».

4. Для решения данного вопроса может быть использован общий метод решения ряда экстремальных задач, встречающихся в технико-экономических вопросах, который был развит докладчиком в 1939 г.<sup>13)</sup>

Решение конкретных примеров показало эффективность применения данного метода к поставленному вопросу.

5. Использование подбора поставов, обеспечивающего максимальный выход продукции, могло бы дать, по нашему мнению, следующие результаты:

- а) способствовать выполнению плана как по общему количеству, так и по ассортименту, а также снижению себестоимости;
- б) обеспечить более равномерную работу предприятия, благодаря наличию определенного плана распиловки данной партии пиловочника;
- в) позволит пользоваться меньшим числом поставов, чем обычно;
- г) позволит в случае надобности уменьшить производительность пилоарам.

### Приложение 3. Переписка по поводу публикации работы Х. Л. Фельдмана

По вопросу о реализации работы инж. Х. Л. Фельдмана  
«Теория и практика максимального использования древесины  
в лесопильной промышленности»

В 1934–1936 гг. инженером Х. Л. Фельдманом выполнена работа «Теория максимальных поставов». Работа эта давала методы нахождения для распиловки леса, обеспечивая максимальный выход пиломатериалов с учетом стоимостных требований.

Теория построения максимальных поставов была дана Х. Л. Фельдманом на основе решения целого ряда сложных математических задач на относительный максимум, связанных с этим вопросом. Это решение потребовало большого искусства, изобретательности и громадного труда.

Опыты, произведенные по поручению Наркомлеса в Лесотехнической академии, показали, что применение работы должно дать крупный экономический эффект. Автору в том же году была выдана наивысшая денежная премия. Однако по различным причинам и главным образом благодаря тому, что работа не была издана в полном и доступном виде, она применяется в настоящее время лишь на отдельных предприятиях (дающих наилучшие отзывы о ней). Гослестехиздат в течение 7-ми лет по неизвестным причинам не издает этой работы.

По нашему мнению, работа Х. Л. Фельдмана имеет крупное народнохозяйственное значение; ее можно считать вполне апробированной и подлежащей внедрению в лесопильную промышленность всего Союза. Для этой цели в первую очередь необходимо срочно издать книгу Х. Л. Фельдмана, содержащую наряду с теоретическими основами работы номограммы, облегчающие возможность использования окончательных результатов практическими работниками лесопильной промышленности и даже рядовыми распиловщиками.

Профессор Ленинградского университета,  
доктор физико-математических наук  
Зам. директора Лесотехнической академии,  
профессор

(Л. В. Канторович)

(А. М. Минкевич)

В Гослестехиздат

Ознакомившись с рукописью книги Х. Л. Фельдмана «Теория и практика поставочного дела», а также с отзывами практических работников о результатах использования поставов Х. Л. Фельдмана, я пришел к следующему выводу, которые считаю своим долгом сообщить издательству.

<sup>13)</sup> Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1939. См. также «Механизированная обработка древесины». — 1940. — № 8.

Х. Л. Фельдманом дано законченное и совершенно правильное решение трудного вопроса о построении максимальных поставов. Внедрение поставов Фельдмана в лесопильную промышленность должно дать существенное увеличение продукции пиломатериалов, а потому имеет общегосударственное значение. Ввиду этого полагаю, что прямой обязанностью Гослестехиздата является скорейший выпуск в свет этого оригинального и практически ценного труда, так как только таким путем широкий круг работников лесной промышленности может быть ознакомлен с этим методом. Включенный в книгу альбом номограмм даст возможность расстановщикам всех заводов использовать постава Фельдмана в повседневной работе.

Желая способствовать выходу данной книги в свет, я готов, если издательство найдет это нужным, взять на себя редактирование математической части данной работы, а также составить приложение к ней, посвященное подбору поставов для одновременного осуществления заданного стока и максимального выхода (расширенная редакция моей статьи, печатающейся в журнале «Лесная промышленность»).

Рукопись Х. Л. Фельдмана должна занять 12–15 листов, мое приложение — 3–5 листов.

К настоящему письму прилагаю:

- 1) Более подробный отзыв о содержании работы Х. Л. Фельдмана.
- 2) Копию письма о книге Х. Л. Фельдмана, подписанного проф. А. М. Минкевичем (зав. кафедрой лесопильного производства и зам. начальника Лесотехнической академии) и мною; подлинник этого письма был послан Вам в начале 1940 г.
- 3) Отзывы лесопильных заводов — Охтинского и им. Калинина — о практических результатах использования поставов Х. Л. Фельдмана.

Ст. научн. сотрудник Математического института АН,  
профессор, доктор физ.-мат. наук  
Л. Канторович

*Рецензия на рукопись Х. Л. Фельдмана  
«Теория и практика поставочного дела»*

Предметом работы является исследование вопроса о нахождении поставов, дающих максимально возможный выход пиломатериалов из бревен. В работе дается исчерпывающее и вполне научно обоснованное решение этого вопроса, которое доведено до вида, удобного для повседневного использования на лесопильных заводах.

Перехожу к обзору содержания работы.

1. Автор исходит из принятого в литературе по лесному делу и достаточно проверенного положения, что бревно должно рассматриваться либо как усеченный параболоид, либо как усеченный конус, причем разность диаметров верхнего и нижнего оснований зависит от сбега бревна, который может быть различным.

2. Для решения задачи о нахождении максимальных поставов автор начинает с того, что намечает общий путь решения математической задачи — вписать в данное тело, в частности тело вращения, любое данное число параллелепипедов (обрезных досок) с наибольшим объемом. Полученный метод затем конкретизируется для случая цилиндра, конуса и параболоида. При этом автор дает оригинальный и эффективный подход для решения получающихся, весьма сложных задач на максимум. К алгебраическим уравнениям высоких степеней, которые здесь встречаются, автор прилагает графический способ решения, что вполне правильно в данном случае. Вычисления значительно упрощаются также благодаря целесообразному использованию соображений симметрии.

3. В результате автор получает наиболее выгодную систему, состоящую из 3, 5, 7, 9, 11 досок, которую можно получить из данного бревна, т. е. то, что он называет абсолютно-максимальные постава. Это рассмотрение проведено отдельно для случая цилиндрического, конического и параболоидного тела. Здесь указывается также, для каких диаметров какое число досок является наиболее подходящим.

4. Ввиду того что по ассортиментным условиям потребителя требуются доски специальных размеров, которые могут не оказаться или оказаться в недостаточном количестве в составе абсолютно-максимальных поставов, автор наряду с ними дает и относительно-максимальные поставы. Именно, он решает задачу о том, как найти наивыгоднейшие размеры остальных досок, если центральная доска (или даже несколько досок) уже выбрана определенным образом.

5. Крайние доски обычно подлежат еще урезке. Автор дает точные правила для того, как ее следует производить, чтобы получить наибольший полезный объем. В связи с этим вводятся полезные понятия: «зона сбega», «принижение диаметра» и др.

6. Вопросам брусочки посвящена особая глава, где дано решение вопроса об абсолютно и относительно-максимальных поставках при брусочке.

7. Результаты всего исследования и расчетов представлены на номограммах, составленных весьма удобным образом. На одной номограмме указываются как абсолютно, так и относительно-максимальные поставы, брусочные и целевые. Каждая номограмма отвечает одному диаметру бревна с определенным сбегом.

Номограммы позволяют легко и быстро составлять поставы, удовлетворяющий нужным условиям, и эти их достоинства проверены на нескольких лесопильных заводах.

8. Далее автором рассматривается вопрос о негабаритном материале. Хотя здесь исследование значительно осложняется дополнительными обстоятельствами, автор намечает путь решения и этого вопроса. Окончательные номограммы для этого случая не построены, но указано, какие следует произвести расчеты для получения данных, необходимых для их построения.

9. Наконец, имеется глава, посвященная заготовке бревен, где содержатся ценные указания по вопросу о том, как должен разделяться ствол на бревна, чтобы из этих бревен, в конечном счете, получилось максимальное количество пиломатериалов.

10. Окончательные номограммы даются в конце рукописи отдельно.

Итак, центральную и основную часть работы Х. Л. Фельдмана составляет полное решение вопроса о нахождении максимальных и относительно-максимальных поставов. Решение этого вопроса дано автором впервые (см. об этом Д. Ф. Шапиро. Лесопильно-строгальное дело. Ленинград, 1935, где излагаются элементы теории Фельдмана). В дальнейшем после работы Фельдмана ничего существенного в этом направлении не сделано (да, собственно, и не может быть сделано, так как решение Фельдмана правильно и полно). В этой связи следует упомянуть о работе инж. Титкова («Механическая обработка древесины» за 1939 год), где делается попытка иного решения вопроса о нахождении максимальных поставов. Титков математически неверно решает задачу на максимум (рассматривая отдельно каждую доску, а не всю их совокупность), а потому и поставы получает разнящиеся от фельдмановских, но неправильные (дающие немаксимальный выход). Никакое сколько-нибудь существенное улучшение поставов Фельдмана невозможно.

Таким образом, работа Фельдмана представляет, по моему мнению, весьма ценный вклад как в науку, так и в практическое дело лесопиления. Внедрение этой работы в лесопильную промышленность должно дать значительное повышение продукции пиломатериалов при том же сырье (что подтверждено и практической проверкой на заводах). Ввиду сказанного работу следует настоятельно рекомендовать к скорейшему изданию.

12 апреля 1941 г.

Ст. научн. сотрудник  
Математического института Академии наук,  
профессор Ленинградского университета,  
доктор физико-математических наук  
Л. Канторович

Гослестехиздат

22 апреля 1941 г.

Проф. Л. В. Канторовичу  
Ленинград 3, проспект К. Либкнехта д. 32, кв. 7

Тематический план издательства на 1941 г. уже утвержден вышестоящими организациями, а в соответствии с его объемом установлены фонды бумаги.



Вот почему мы, понимая большую значимость работы тов. Фельдмана Х. Л. «Теория и практика поставного дела», все же лишены возможности издать ее в 1941 г. и принуждены ограничиться включением указанной темы в проект темплана издательства на 1942 г.

Управляющий Гослестехиздатом И. Березин

Гослестехиздат

20 мая 1941 г.

Проф. Л. В. Канторовичу

Ленинград 3,  
проспект К. Либкнехта  
д. 32, кв. 7

Договор на издание работы «Теория и практика поставочного дела» может быть заключен лишь после утверждения темплана издательства на 1942 г.

Зам. Управляющего Гослестехиздатом,  
Главный редактор Д. Лысков

#### Приложение 4. Письмо ЛОМИ в Главстройлес, 1941 г.

Народный комиссариат промышленности строительных материалов  
Главстройлес. Начальнику

В Математическом институте Академии наук проф. Л. В. Канторовичем ведется работа по применению математических методов в вопросах планирования производственных процессов. В частности, в 1940 г. им был разработан метод составления стокнотного плана для распиловки пиловочника на пиломатериалы заданного ассортимента, позволяющего получить максимум продукции.

Был поставлен вопрос о внедрении этих результатов в практику работы лесопильных заводов Вашего Главка. В результате переговоров проф. Л. В. Канторовича и замнаркома Г. С. Иванова с гл. инж. Главстройлеса тов. Каламниным, от Вас было получено задание в виде ассортимента комплекта пиломатериалов для стандартного каркасно-фибролитного двухэтажного дома.

Предварительное решение данной задачи показало эффективность метода для заданий такого рода. Оказалось, что при наличном распределении пиловочника по диаметрам выход продукции составит 63–64% от объема сырья. Как сообщил тов. Каламнин, обычный выход у Вас на заводах 55–58%, таким образом, может быть получено увеличение расчетного процента выхода на 5–8% по отношению к сырью и на 8–12% по отношению к готовой продукции.

Ввиду сказанного, желая добиться внедрения данной работы в производство, Ленинградское отделение Института согласно принять на себя выполнение работы по составлению стокнотных планов (подбор поставов), дающих максимум продукции по Вашим уточненным заданиям, а также инструкции для работников Ваших заводов, которая позволит им составлять такие планы самостоятельно при других заданиях. Выполнение и оформление данной работы, в зависимости от объема задания, должно стоить 3–5 тыс. руб.

Зам. директора МИАН СССР, профессор В. А. Тартаковский  
Ученый секретарь А. Р. Марченко<sup>14)</sup>

#### Приложение 5. Трудовое соглашение Л. В. Канторовича с заводом «Парижская коммуна»

Настоящее соглашение заключено между заводом «ПАРИЖСКАЯ КОММУНА» в лице директора тов. ЛАРИОНОВА и профессором Л. В. КАНТОРОВИЧ.

<sup>14)</sup>Марченко Артемий Романович (1904–?) — учился в Донецке, был аспирантом ЛГУ, защитив в 1935 г. диссертацию на тему о конформном отображении круга на область, близкую к кругу (вероятно, Л.В. был научным руководителем).

Проф. Л. В. КАНТОРОВИЧ берет на себя по настоящему соглашению проведение на заводе научно-исследовательских работ по двум темам:

I. Анализ и оценка существующих методов раскроя материала на тару и разработка и предложение материалов по повышению выхода продукции.

Работа по теме включает следующие этапы:

1. Оценка количества отходов при торцовке и меры по их уменьшению.

2. Оценка отходов при обрезке и меры ее уменьшения.

3. Наиболее целесообразный последовательный план раскроя досок (обрезных и необрезных) и оценка эффективности его применения.

4. Предложение технических мероприятий и схемы приспособлений для проведения порядка раскроя, указанного в п. 4

Срок представления работы в виде рукописи, сопровождаемой расчетами, — 1 МАЯ 1942 г.

II. Анализ и оценка поставов с точки зрения выхода пиломатериалов для переработки на лесозаводе в основном на тару. Выбор и указание более целесообразных поставов.

Работа по теме включает этапы:

1. Расчет выхода пиломатериалов и оценка выхода конечной продукции (ящичной тары) для нескольких наиболее часто применяемых поставов для основных диаметров 16, 18, 20, 22, 24.

2. Указание более целесообразных поставов (с учетом дальнейшей переработки) и оценка выхода конечной продукции при пользовании ими.

Срок предоставления работы в виде рукописи, сопровождаемой результатами расчетов, — 1/VI-42 г.

Со своей стороны завод обязуется оплатить выполняемую Л. В. КАНТОРОВИЧЕМ работу в сумме 800 руб. за I тему и 700 руб. за II тему, каковая сумма должна быть уплачена в недельный срок по представлении каждой работы отдельно. Завод обязуется также оказать содействие в проведении данных работ предоставлением необходимых данных и возможности знакомства с производственным процессом.

Заключение (экспертизу) по проведенным работам производит гл. инженер треста «ЯРДРЕВ», после его заключения производится оплата работы.

ЗАВОДОУПРАВЛЕНИЕ

(подпись)

ИСПОЛНИТЕЛЬ РАБОТЫ

(подпись)

## Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем<sup>\*)</sup>

Во многих экстремальных проблемах точка экстремума оказывается непременно не внутри, а на границе основной области, рассматриваемой в данном евклидовом или функциональном пространстве. Фактическое решение таких задач часто оказывается затруднительным. Так, например, простейшая из задач такого рода об экстремуме линейной функции в многограннике имеет весьма простое теоретическое решение — для нахождения экстремума достаточно сравнить значения этой функции в вершинах многогранника; однако, если число этих вершин очень велико, задача оказывается практически неразрешимой.

Мы хотим здесь указать один метод решения задач о краевом экстремуме, имеющий известное сходство с методом Лагранжа разыскания относительных экстремумов. Метод этот, хотя и построен на весьма простых соображениях, дает для многих задач гораздо более эффективный прием нахождения решения, чем обычные методы.

В § 1 мы излагаем этот метод в общем виде, а в § 2 приводим примеры задач, к которым этот метод может быть применен.

**§ 1. Теорема 1.** Пусть  $E$  — линейное нормированное пространство,  $A \subset E$  — выпуклое и слабо компактное множество.  $F(x)$  — функционал, определенный и конечный в  $A$  и обладающий следующими свойствами:

1)  $F$  слабо полунепрерывен сверху:  $x_n \rightarrow x$  влечет  $\overline{\lim} F_n(x) \leq F(x)$ ,

2)  $F(x)$  не достигает максимума внутри  $A$ , т. е. если  $x$  — внутренняя точка  $A$ , в любой ее окрестности имеется точка  $x'$ , для которой  $F(x') > F(x)$ .

При этих условиях существует точка  $x_0$  на границе  $A$ , в которой  $F(x)$  достигает максимума, и существует линейный функционал  $f_0(x)$ , который достигает максимума в  $A$  также в точке  $x_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $M$  — точная верхняя граница  $F(x)$  на  $A$ . Найдутся такие  $x_n$ , что  $F(x) > M - 1/n$ . Из последовательности  $x_n$  можно выбрать частичную слабо сходящуюся  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ . Вследствие условия 1)  $F(x_0) = M$  и вследствие 2)  $x_0$  — граничная точка  $A$ . По теореме S. Mazur'a (<sup>1</sup>) существует линейный функционал  $f_0(x)$  такой, что множество  $A$  лежит целиком по одну сторону от плоскости  $f_0(x) = f_0(x_0)$ . Очевидно, выбором знака у  $f_0$  можно добиться того, чтобы для  $x \in A$  выполнялось именно неравенство  $f_0(x) \leq f_0(x_0)$ . Тогда точка  $x_0$  и линейный функционал  $f_0$  и суть те, существование которых утверждается в теореме.

**Основное следствие.** Пусть  $f$  — линейный функционал. Обозначим через  $H_f$  множество тех точек  $A$ , где он достигает максимума, и через  $p(f)$  — максимум

---

<sup>\*)</sup>Опубликована в Докладах Академии наук СССР. — 1940. — Т. XXVIII, № 3. — С. 212–215. Представлена академиком С. Н. Бернштейном 8 мая 1940 г.

$F(x)$  на множестве  $H_j$ , тогда

$$M = \max_{x \in A} F(x) = \max_f \{p(f)\}. \quad (1)$$

Действительно, с одной стороны, всегда  $p(f) \leq M$ , с другой — имеем согласно теореме 1  $p(f_0) = F(x_0) + M$ .

Равенство (1) и служит исходным для предлагаемого метода нахождения краевого экстремума. Именно, рекомендуется поступать следующим образом: выбирая некоторый линейный функционал  $f$ , определяем множество  $H_j$  и затем  $p(f)$ . Далее, варьируем  $f$  так, чтобы значение  $p(f)$  увеличивалось, и так постепенно приближаемся к максимуму. Существенное преимущество этого пути по сравнению с непосредственным варьированием точки  $x$  состоит в том, что здесь обеспечено движение по границе области  $A$ . Кроме того, при этом способе часто удается легче определить правильное направление варьирования.

Возникает, прежде всего, вопрос о том, как проверить, решая задачу по этому методу, то, что мы действительно пришли к максимуму. Такой критерий дает для многих случаев следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, известно, что множество  $F(x) \geq C$  выпукло для любого  $C$ . Тогда, если найдены точка  $x_0$  и линейный функционал  $f_0$  такие, что 1)  $f_0(x) \leq f_0(x_0)$  для  $x \in A$  и 2) на плоскости  $f_0(x) = f_0(x_0)$  справедливо неравенство  $F(x) \leq F(x_0)$ , либо 2') на поверхности  $F(x) = F(x_0)$  справедливо неравенство  $f_0(x) \geq f_0(x_0)$ , то функционал  $F(x)$  достигает максимума на  $A$  в точке  $x_0$ . При этом существование требуемых здесь  $f_0$  и  $x_0$  всегда обеспечено.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В самом деле, из условий теоремы вытекает, что плоскость  $f_0(x) = f_0(x_0)$  разделяет выпуклые множества  $A$  и  $\{x : F(x) \geq F(x_0)\}$ , а потому ясно, что во всех точках множества  $A$  будет справедливо неравенство  $F(x) \leq F(x_0)$ , т. е.  $x_0$  — точка максимума для  $F(x)$ . Наконец, существование  $f_0$  и  $x_0$  всегда обеспечено, так как по теореме Eidelheit'a (2) существует плоскость, отделяющая два выпуклых множества.

Отметим, что в условиях теоремы 2 можно уточнить то, что было сказано о направлении вариации. Именно, если функционал  $f_0$  и точка  $x_0$  в некотором приближении еще не искомые, то плоскость  $f_0(x) = f_0(x_0)$  будет касательной для  $A$ , но не для множества  $\{x : F(x) \geq F(x_0)\}$ . Проведем через  $x_0$  касательную плоскость к этому множеству  $f_1(x) = f_1(x_0)$ . Тогда при нахождении следующего приближения нужно функционал  $f_0$  заменить на  $f_0 + \varepsilon f_1$ .

Сделаем теперь несколько замечаний, показывающих, что данный метод применим не только в случаях, предусмотренных теоремами 1 и 2.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Если существование конечного экстремума для  $F$  известно из других соображений, то требования слабой компактности  $A$  и слабой полунепрерывности  $F$  являются излишними.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Условие выпуклости множества  $A$  может быть также ослаблено. Именно, достаточно потребовать, чтобы для каждой граничной точки  $x$  мно-

жества  $A$  существовал такой функционал  $f$ , что для него

$$\overline{\lim}_{\substack{x' \rightarrow x \\ x' \in A}} \frac{f(x' - x)}{\|x' - x\|} = 0. \quad (2)$$

В этом случае только надлежит за множества  $H_j$  брать совокупность точек  $x$ , в которых выполняется условие (2).

§ 2. Приведем теперь примеры задач, к которым данный метод приложим.

I. Функции  $\alpha_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) определены и интегрируемы ( $L$ ) в промежутке  $[a, b]$ . Найти измеримые функции  $h_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) так, чтобы

- 1)  $h_i(t) \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ),
- 2)  $h_1(t) + h_2(t) + \dots + h_m(t) = 1$ ,
- 3)  $\min_i \int_a^b \alpha_i(t) h_i(t) dt$  имел максимальное возможное значение.

Теоремы 1 и 2 могут быть применены, если за  $A$  принять множество систем чисел  $(z_1, z_2, \dots, z_m)$ :

$$z_i = \int_a^b \alpha_i(t) h_i(t) dt,$$

где  $h_1, h_2, \dots, h_m$  — любые функции, удовлетворяющие условиям 1) и 2), и положить

$$F(z_1, z_2, \dots, z_m) = \min(z_1, z_2, \dots, z_m).$$

Воспользовавшись теоремами 1 и 2, можно установить, что существуют множители  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  такого рода, что линейный функционал

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i z_i = \int_a^b \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i(t) h_i(t) dt \quad (3)$$

достигает максимума одновременно с  $F$ . Но относительно функционала (3) ясно, что, если система функций  $h_1, h_2, \dots, h_m$  доставляет максимум ему, то почти везде должно быть выполнено условие:

$$h_i(t) = 0, \text{ если } \lambda_i \alpha_i(t) h_i(t) < \max_j \lambda_j \alpha_j(t) h_j(t). \quad (4)$$

Если  $\lambda_i$  известны, то из последнего условия  $h_i(t)$  могут быть легко определены и притом так, чтобы  $h_i(t) = 0$ ; 1 и чтобы

$$\int_a^b \alpha_1(t) h_1(t) dt = \dots = \int_a^b \alpha_m(t) h_m(t) dt.$$

Наоборот, если числа  $\lambda_i$  таковы, что можно определить функции  $h_i(t)$ , удовлетворяющие условиям (4) и (5), то функции  $h_i(t)$  доставляют экстремум функционалу  $F$ . Таким образом, разыскание системы функций заменяется разысканием системы



Такого рода задача об экстремуме решается легко. Что касается нахождения  $\lambda_i$ , то опять можно воспользоваться способом последовательных приближений. В частности, в чебышевском случае ( $p = \infty$ )  $\lambda_i$  нужно варьировать, исходя из того, что если  $|z_{i_0}|$  больше прочих  $|z_i|$ , соответствующее  $\lambda_{i_0}$  следует увеличить.

V. Те же соображения, что и в предыдущем случае, могут быть применены для нахождения полинома данной степени, дающего наилучшую аппроксимацию некоторой функции в смысле Чебышева или Джексона. Именно можно искать такой вес  $p(x)$ , что полином, дающий наилучшее среднее квадратичное приближение по этому весу, и будет искомым.

### ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> S. Mazur, *Studia Math.*, IV.

<sup>2</sup> Eidelheit, *Studia Math.*, VI.

<sup>3</sup> Н. Ахиезер и М. Крейн, О некоторых проблемах теории моментов (1938).

S. Mazur. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. *Studia Mathematica*, 4:70–84, 1933.

M. Eidelheit. Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen. *Studia Mathematica*, 6:104–111, 1936.

Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. Проблемы теории моментов. Харьков: Держ. Виз. Науч.-Тех. У., 1938.

## О перемещении масс<sup>\*)</sup>

Мы будем считать  $R$  метрическим компактным пространством, хотя некоторые из приведенных определений и результатов могут быть высказаны и для пространств более общего вида.

Пусть  $\Phi(e)$  — распределение масс, т. е. функция совокупности: 1) определенная для борелевских множеств, 2) неотрицательная:  $\Phi(e) \geq 0$ , 3) абсолютно-аддитивная: если  $e = e_1 + e_2 + \dots$ ,  $e_i \cap e_j = \emptyset$  ( $i \neq k$ ), то  $\Phi(e) = \Phi(e_1) + \Phi(e_2) + \dots$ . Пусть  $\Phi'(e')$  — другое распределение масс, причем  $\Phi(R) = \Phi'(R)$ . Перемещением масс будем называть такую функцию  $\Psi(e, e')$ , определенную для пар  $(B)$ -совокупностей  $e, e' \in R$ : 1) неотрицательную и абсолютно-аддитивную по каждому из аргументов, 2) такую, что  $\Psi(e, R) = \Phi(e)$ ,  $\Psi(R, e') = \Phi'(e')$ .

Пусть  $r(x, y)$  — известная непрерывная неотрицательная функция — работа по перемещению единицы массы из  $x$  в  $y$ .

Работой по перемещению данных распределений масс будем называть величину

$$W(\Psi, \Phi, \Phi') = \int_R \int_R r(x, x') \Psi(de, de') = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i,k} r(x_i, x'_k) \Psi(e_i, e'_k),$$

где  $\{e_i\}$  дизъюнкты и  $\sum_1^n e_i = R$ ,  $\{e'_k\}$  дизъюнкты и  $\sum_1^m e'_k = R$ ,  $x_i \in e_i$ ,  $x'_k \in e'_k$ , и  $\lambda$  — наибольшее из чисел  $\text{diam } e_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и  $\text{diam } e'_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). Интеграл, очевидно, существует.

Величину

$$W(\Phi, \Phi') = \inf_{\Psi} W(\Psi, \Phi, \Phi')$$

будем называть минимальной работой по перемещению. Так как множество функций  $\{\Psi\}$  компактно, то ясно, что существует функция  $\Psi_0$ , осуществляющая этот минимум, т. е. такая, что

$$W(\Phi, \Phi') = W(\Psi_0, \Phi, \Phi'),$$

правда, эта функция не единственна. Такое перемещение  $\Psi_0$  будем называть минимальным перемещением.

Далее будем говорить, что перемещение  $\Psi$  от  $x$  к  $y$  не равно нулю и писать  $x \rightarrow y$ , если для любых окрестностей  $U_x$  и  $U_y$  точек  $x$  и  $y$  будет  $\Psi(U_x, U_y) > 0$ . Назовем перемещение  $\Psi$  потенциальным, если существует такая функция  $U(x)$ , что 1)  $|U(x) - U(y)| \leq r(x, y)$ , 2)  $U(y) - U(x) = r(x, y)$ , если  $x \rightarrow y$ .

Тогда имеет место

---

<sup>\*)</sup>Опубликована в Докладах Академии наук СССР. — 1942. — Т. XXXVII, № 7-8. — С. 227-229. Представлена академиком С. Л. Соболевым 29 сентября 1942 г.



**Теорема.** Чтобы перемещение  $\Psi_0$  было минимально, необходимо и достаточно, чтобы оно было потенциально.

**ДОСТАТОЧНОСТЬ.** Пусть  $\Psi_0$  потенциально и  $U$  — потенциал. Тогда по 2) свойству  $U$ :

$$\begin{aligned} W(\Psi_0, \Phi, \Phi') &= \int_R \int_R r(x, y) \Psi_0(de, de') = \int_R \int_R [U(y) - U(x)] \Psi_0(de, de') = \\ &= \int_R \int_R U(y) \Psi_0(de, de') - \int_R \int_R U(x) \Psi_0(de, de') = \int_R U(y) \Phi'(de') - \int_R U(x) \Phi(de), \end{aligned}$$

если же  $\Psi$  — какая-либо другая функция, то

$$\begin{aligned} W(\Psi, \Phi, \Phi') &= \int_R \int_R r(x, y) \Psi(de, de') \geq \int_R \int_R [U(y) - U(x)] \Psi_0(de, de') = \\ &= \int_R U(y) \Phi'(de') - \int_R U(x) \Phi(de), \end{aligned}$$

т. е.  $W(\Psi, \Phi, \Phi') \geq W(\Psi_0, \Phi, \Phi')$  и  $\Psi_0$  минимально.

**НЕОБХОДИМОСТЬ.** Пусть  $\Psi_0$  — минимальное перемещение. Возьмем множество точек  $\xi_0, \xi_1, \dots$ , плотное в  $R$ . Обозначим через  $D_n$  наименьшее множество точек, содержащее  $\xi_n$  и такое, что если  $x \in D_n$  и  $x \rightarrow y$  или  $y \rightarrow x$ , то  $y \in D_n$ . Очевидно, что если  $y \in D_0$ , то найдется такая система точек  $x_i, y_i$ , что  $\xi_0 = x_0 \rightarrow y_0, x_1 \rightarrow y_1, x_2 \rightarrow y_2, \dots, x_{n-1} \rightarrow y_{n-1}, x_n \rightarrow y_n$  ( $y_n = y$ ) (или сходная цепь с иным направлением стрелок в начале или в конце). В приведенном случае положим

$$U(y) = \sum_1^n r(x_{i-1}, y_{i-1}) - \sum_1^n r(x_i, y_i).$$

Нетрудно проверить, что значение  $U$  не зависит от выбора соединяющей цепи, а также, что для  $U$  будут удовлетворены свойства 1) и 2) потенциала, если  $x, y \in D_0$ . Именно, можно показать, что несоблюдение какого-либо из этих обстоятельств позволило бы заменить  $\Psi_0$  на другое перемещение с еще меньшей работой, что противоречит минимальности  $\Psi_0$ .

Предположим, что в областях  $D_0, D_1, \dots, D_{n-1}$  функция  $U$  уже определена.

Если точка  $\xi_n$  вошла в  $D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1}$ , то для нее и для всей области  $D_n$  функция  $U$  уже определена. В противном случае определим  $V(x)$  на  $D_n$  так же, как мы определяли  $U$  в  $D_0$ , только роль  $\xi_0$  будет играть  $\xi_n$ . Далее подбираем число  $\mu$ , заключенное в пределах

$$\inf_{\substack{x \in D_0 + \dots + D_{n-1}, \\ y \in D_n}} \{U(x) - V(y) - r(x, y)\} \leq \mu \leq \inf_{\substack{x \in D_0 + \dots + D_{n-1}, \\ y \in D_n}} \{U(x) - V(y) + r(x, y)\}.$$

Существование  $\mu$  опять устанавливается на основании минимальности  $\Psi_0$ . Далее полагаем для  $x \in D_n$ :  $U(x) = V(x) + \mu$ . Итак, функция  $U$  определена в

$D_0 + D_1 + \dots$ , а так как эта совокупность в  $R$  везде плотна, то  $U$  распространяется благодаря условию 2) на все  $R$  и обладает свойствами 1) и 2), т. е. перемещение потенциально.

Доказанная теорема дает удобный способ проверки того, что данное перемещение масс минимальное. Именно, для проверки достаточно попытаться строить потенциал для него тем способом, который приведен в доказательстве необходимости. При этом если такое построение окажется невозможным, т. е. если перемещение неминимальное, то одновременно обнаружится способ уменьшения работы при перемещении, позволяющий постепенно подойти к минимальному перемещению.

Представляет интерес изучение пространства распределений масс, если в качестве расстояния принять величину  $W(\Phi, \Phi')$  (для случая  $r(x, y) = \rho(x, y)$  — расстоянию). Этот способ нам кажется в некотором отношении наиболее естественным для введения метрики в данном пространстве.

В заключение отметим две практических задачи, при решении которых данная теорема находит себе применение.

**Задача 1.** О прикреплении пунктов потребления к пунктам производства. На железнодорожной сети имеется ряд пунктов производства  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , в которых производится соответственно  $a_1, a_2, \dots, a_m$  вагонов данного массового груза в сутки, и ряд пунктов потребления  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , в которых потребляется соответственно  $b_1, b_2, \dots, b_n$  вагонов в сутки ( $\sum a_i = \sum b_k$ ). Требуется так прикрепить пункты потребления к пунктам производства, чтобы суммарные затраты по перевозке оказались наименьшими. Затраты  $r_{ik}$  по перевозке одного вагона из пункта  $A_i$  в каждый пункт  $B_k$  считаются заданными.

Подробное изложение данной, а также более сложных задач, относящихся к этому же вопросу, дано в работе Л. В. Канторовича и М. К. Гавурина, которая находится в печати.

**Задача 2.** О планировке участка. Считаются заданными рельеф местности — уравнение земной поверхности  $z = f(x, y)$  до планировки и после планировки  $z = f_1(x, y)$  (при этом  $\iint f(x, y) dx dy = \iint f_1(x, y) dx dy$ ), а также затраты по перемещению  $1 \text{ м}^3$  земли из пункта  $(x, y)$  в пункт  $(x_1, y_1)$ . Требуется указать такой план перемещения земляных масс, при котором суммарные затраты по перемещению оказались бы минимальными.

## Комментарии к статье «О перемещении масс»

Коротко рассказав о трудной судьбе статьи по транспортной задаче (подробнее см. комментарий к статье «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков»), Л. В. Канторович далее вспоминает:

К счастью, я сделал абстрактный вариант этой задачи — заметку о перемещении масс в компактном метрическом пространстве, в которой был и критерий и метод потенциалов. В конце приводилось две задачи — задача о железнодорожных перевозках (со ссылкой на находящуюся в печати нашу статью с М. К. Гавуриным) и задача о выравнивании площади аэродрома, которая также носит прикладной характер. Эта работа, опубликованная в 1942 г. на русском и английском языках, по-видимому, была первой, из которой специалисты на Западе узнали о моих работах по линейному программированию, но это произошло только в начале 50-х годов<sup>1</sup>).

Заметка «О перемещении масс» возникла, как сказано в ней же, в результате обобщения совместного с М. К. Гавуриным исследования транспортной задачи. Воспроизведенная в 1958 г. в "Management Science"<sup>2</sup>), она стала первой работой Леонида Витальевича по линейному программированию, ставшей доступной для широкого круга специалистов. История, приведшая к этой публикации, была коротко изложена Т. Купмансом в его предисловии к английскому переводу «Математических методов организации и планирования производства»<sup>3</sup>).

Несколько лет назад Мервилл М. Флуд сказал мне, что после лекции, которую он читал в декабре 1949 г. по транспортной задаче, математик Макс Шифман упомянул в дискуссии, что он видел аналогичные идеи в работе Канторовича «О перемещении масс» 1942 г. Ссылки на эту статью были включены в две работы Флуда, опубликованные в 1952 и 1953 гг. Вплоть до 1956 г. я упорно разыскивал эту работу, после чего написал профессору Канторовичу, послав ему несколько репринтов и попросив несколько в ответ.

Вот текст упоминаемого письма (от 12 ноября 1956 г.).

Дорогой профессор Канторович. Недавно мне представился случай ознакомиться с экземпляром Вашей статьи «О перемещении масс» в Докладах Академии наук СССР за 1942 г. Мне сразу стало ясно, что частью Вы развивали параллельно, но в большей части предвосхитили развитие транспортной теории в США, которое началось в период с 1941 г. и продолжается по настоящее время. Я прилагаю к письму краткий перечень наиболее важных статей, появившихся в американской литературе. Я также вложил отписки статей 2 и 4 из этого списка. В то же время я хотел бы отметить, что Ваша краткая статья в замечательно сжатой форме содержит математическое существо того, что содержится в этих работах. Я был бы очень Вам обязан, если бы Вы послали мне один или два отписка Вашей статьи «О перемещении масс», если они еще остались, а также экземпляр статьи Канторовича и Гавурина, упомянутой в конце Вашей статьи. Мне было бы также интересно узнать, имели ли место дальнейшие практические применения Вашей статьи или ее теоретическое развитие, и если это так, в какой литературе мы могли бы их найти. В США практическое применение транспортной задачи получило значительное развитие. Почти во всех номерах таких журналов, как "Management Science", "Operations Research" или "Econometrica" можно найти примеры таких приложений. Надеюсь, что это письмо может привести к обмену информацией между нами.

---

<sup>1</sup>) [2002, 1], с. 57.

<sup>2</sup>) On the translocation of mass // Management Sci. — 1958. — Vol. 5, N 1. — P. 1–4.

<sup>3</sup>) Management Sci. — 1960. — Vol. 6, N 4. — P. 365.

Эта рассказанная Купмансом история представляется не совсем полной. Мне, например, кажется маловероятным, чтобы кто-либо из американских математиков обратил внимание на труд-подоступную в США заметку 1942 г. с непонятным названием, тем более опубликованную в самый разгар войны. Логичнее предполагать, что отправной точкой в поисках, приведших к американским публикациям работ Л. В. Канторовича по линейному программированию, послужила заметка «Об одной проблеме Монжа». В самом деле, опубликованная в 1948 г. свежая заметка в «Успехах», в которой решалась классическая математическая проблема<sup>4)</sup> и была ссылка на работу 1942 г., не могла не привлечь внимания, в том числе, вероятно, и Шифмана, тем более что она была опубликована в самом известном русском математическом журнале. А поскольку основные результаты работы 1942 г. в ней содержались, это могло показаться Флуду достаточным для соответствующей ссылки. Поэтому логично предположить, что ни он, ни Шифман заметки 1942 г. не видели — иначе они сообщили бы Купмансу, где в США ее можно найти, и ему не пришлось бы несколько лет ее разыскивать. В отличие от них Купмансу — пионеру «в развитии транспортной теории»<sup>5)</sup>, было крайне важно точно знать содержание и дату публикации, и, надо полагать, именно поэтому он приложил столько усилий к ее поискам.

Публикации «О перемещении масс» было предпослано небольшое предисловие А. Чарнса:

*Помещенная ниже статья взята из русского журнала — аналогичного нашим Запискам Академии наук США — Доклады Академии наук СССР, 1942, том XXXVII, № 7–8. Ее автор — один из самых видных русских математиков. Он имеет весьма большие заслуги в области чистой математики и функционального анализа и столь же большие заслуги в области прикладной математике, в области численного анализа и в теории и практике вычислений. Несмотря на то что изложение вопроса в этой статье дано автором в слишком сжатой форме, и она написана математическим языком, который будет труден для большинства читателей нашего журнала, мы печатаем ее, желая: 1) представить читателям эту вообще значительную работу в области линейного программирования; 2) показать тип аналитической работы, который соответствует рациональному планированию в России и 3) характеризовать содержащимися в ней специфическими примерами то применение, которое русские дают абстрактной математике (так, принципы потенциала и поля, развиваемые у нас, например, У. Прагером, превосхищены в данной статье).*

Однако надо отметить, что задача отыскания эффективных методов для действительного решения специфических задач не решена в настоящей статье. В разработке таких методов мы находимся в настоящее время впереди русских.

Последний абзац этого предисловия вызвал естественное возмущение Леонида Витальевича. Направляя 3 февраля 1959 г. свои пожелания о форме публикации работы 1939 г., он писал Купмансу:

*Наконец, я настаиваю на том, чтобы публикация перевода не сопровождалась бы какими-либо комментариями, так как при этом легко может оказаться допущенной та или иная непра-*

<sup>4)</sup>Интерес математиков к решению классических проблем общеизвестен, особенно эффективно, если их решение оказывается простым. Подтверждением того, что заметка «О перемещении масс» произвела сильное впечатление, может служить отзыв Л. А. Люстерника на представленный на Сталинскую премию за 1948 г. цикл работ Л. В. Канторовича по применению функционального анализа в прикладной математике. Хотя заметка к данному циклу не относилась, тем не менее в отзыве было сказано и о ней: «Теорема, дающая решение этой геометрической задачи, сформулирована Монжем без доказательства в его мемуаре 1781 г. Лишь в 1884 г. Аппель в двухсотстраничном мемуаре доказал теорему Монжа. Это доказательство остается сложным и после внесенных в него упрощений. Из общей теоремы Л. В. Канторовича теорема Монжа (и в более общей формулировке) доказывается «в два слова». Этот эффектный пример убедительно показывает преимущество во многих случаях разработанных Л. В. Канторовичем общих методов».

<sup>5)</sup>Первое сообщение о транспортной задаче было сделано Купмансом в 1947 г. (опубликовано в 1949 г. *Koopmans T. C. Optimum utilization of transportation system // Proceedings of the International Statistical Conferences held in Washington D.C., Sept. 6–18.1947. — 1949. — Vol. 5. — P. 138–148*).

вильная информация (сопоставьте последний абзац предисловия А. Чарнса<sup>6)</sup> с последним абзацем моей работы<sup>7)</sup> на стр. 3 в "Management Science", Vol. 5, N 1).

Следует отметить, что американские рецензенты этой работы не обратили никакого внимания на короткий, но очень важный ее абзац, в котором предлагается новая метрика в пространстве распределения масс (тем более что к этому времени эта идея уже была детализирована в совместной заметке Канторовича с Г. Ш. Рубинштейном). О том, насколько она важна, сказано в комментариях к публикуемому в этом томе двум статьям на эту тему.

Следует отметить, что Л. В. Канторович до конца жизни сохранял интерес к проблемам транспорта и опубликовал на эти темы десятки научных работ, а также внес и частично смог реализовать множество практических рекомендаций. В частности, он инициировал, разработал и обосновал новый тариф на такси, введенный в СССР в 1961 г., а в самые последние дни жизни готовил выступление на конференции, посвященной развитию городского транспорта [1988, 1]. В течение десяти лет, с 1976 г., он был председателем Научного совета АН СССР по комплексной проблеме единой транспортной системы.

В очерке «Вклад Л. В. Канторовича в экономическую науку»<sup>8)</sup>, написанном в связи с присуждением Нобелевской премии, известный норвежский экономист Лейф Йохансен, один из ближайших сотрудников Рагнара Фриша, писал по поводу обсуждаемой работы: «При оценке работ Канторовича очень интересно сравнить весьма абстрактную статью 1942 г. с исключительно прикладной статьей 1974 г.»<sup>9)</sup> Для Канторовича характерно, что он может внести важный вклад в обе указанные сферы и, более того, умеет сохранить связь и плодотворное взаимодействие двух этих сфер». Эту удивительную особенность творчества Канторовича, проявившуюся практически с самого начала его деятельности, отмечали почти все авторы, писавшие о нем.

---

<sup>6)</sup>Купманс в своем ответе выразил полную солидарность: «Я сам нашел последний абзац предисловия А. Чарнса к переводу «О перемещении масс» неудачным и неуместным». Представляется, однако, что доля ответственности за этот текст лежит и на Купмансе. В статье с Гавуриным метод решения транспортной задачи был детально изложен, но эта статья так осталась никому не известной в Америке, несмотря на высокую оценку, данную ей Купмансом в цитированном предисловии. Между тем с работой 1939 г. Купманс ознакомил многих специалистов, в частности В. Леонтьева и Дж. Данцига, почти сразу после получения обеих статей от Леонида Витальевича в начале 1957 г., и она стала широко известной задолго до публикации ее перевода. Не умаляя исключительной роли, которую сыграл Купманс в пропаганде достижений Канторовича в развитии линейного программирования, мы все же хотели обратить внимание на факт, который, возможно, некоторым образом подтверждает высказанное предположение о важности для Купманса соображений приоритета (в частности, в своем письме он спрашивал, является ли статья с Гавуриным именно той, на которую есть ссылка в заметке 1942 г., и поэтому знал, когда она была написана).

<sup>7)</sup>Имеется в виду абзац, непосредственно следующий после доказательства теоремы. Метод потенциалов с очевидностью вытекает из доказательства и этого абзаца.

<sup>8)</sup>Leif Johansen. L. V. Kantorovich's contribution to economics // The Scandinavian Journal of Economics. — 1976. — Vol. 78. — P. 62–80.

<sup>9)</sup>Роль транспортного фактора при размещении производства, [1974, 2].

## О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач<sup>\*)</sup>

При исследовании вопросов, связанных с составлением рационального плана, обеспечивающего наилучшее использование ресурсов и максимальный выпуск потребной продукции, должны принести существенную пользу методы анализа математических моделей указанных задач.

Пусть имеется  $l$  видов конечных продуктов,  $m$  видов промежуточных продуктов и  $n$  видов производственных факторов. Имеется  $N$  технологических способов производства. Каждый способ  $\pi_s$  ( $s = 1, 2, \dots, N$ ) характеризуется тремя векторами

$$X^{(s)} = (x_1^{(s)}, \dots, x_l^{(s)}), \quad Y^{(s)} = (y_1^{(s)}, \dots, y_m^{(s)}), \quad Z^{(s)} = (z_1^{(s)}, \dots, z_n^{(s)}), \quad (1)$$

компоненты которых показывают объем производства конечных продуктов, промежуточных продуктов, производственных факторов соответственно (отрицательные компоненты означают затраты).

Допустимые планы определяются как положительные линейные комбинации основных способов, т. е. план  $P$  определяется вектором  $P = (p_1, \dots, p_N)$  ( $p_s \geq 0$ ). План  $P$  в предположении линейности, которое мы принимаем, характеризуется векторами

$$X = \sum_{s=1}^N p_s X^{(s)}, \quad Y = \sum_{s=1}^N p_s Y^{(s)}, \quad Z = \sum_{s=1}^N p_s Z^{(s)}. \quad (2)$$

Рассматривается нахождение плана в условиях:

1) Затраты производственных факторов ограничены вектором  $-Z_0$  ( $Z_0 > 0$ ),

$$\sum p_s Z^{(s)} \geq -Z_0 \quad \left( \sum p_s z_k^{(s)} \geq -z_0^{(k)}; \quad k = 1, 2, \dots, n \right). \quad (3)$$

2) Затрат промежуточных продуктов в плане в целом не производится

$$\sum p_s Y^{(s)} \geq 0. \quad (4)$$

3) Объем конечной продукции с учетом заданного ассортимента  $X_0$  ( $X_0 > 0$ ) достигает максимума, т. е.

$$\sum p_s X^{(s)} \geq k X_0, \quad (5)$$

где  $k$  имеет максимальное возможное значение.

План  $\bar{P} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N)$ , удовлетворяющий условиям 1)–3), называется *оптимальным*.

---

<sup>\*)</sup> Опубликована в Докладах Академии наук СССР. — 1957. — Т. 115, № 3. — С. 441–444. Представлена академиком А. Н. Колмогоровым 5 марта 1957 г. Основные результаты работы докладывались на научной сессии ЛГУ 12 мая 1941 г.

**Теорема.** Пусть выполнено следующее условие: соотношения

$$\sum p_s X^{(s)} \geq 0, \quad \sum p_s Y^{(s)} \geq 0, \quad \sum p_s Z^{(s)} \geq 0, \quad p_s \geq 0, \quad (6)$$

возможны только при  $p_1 = \dots = p_N = 0$ . Тогда оптимальный план  $\bar{P} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N)$  существует и ему отвечает такая система множителей (оценок) для всех видов продукции и производственных факторов

$$\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_l), \quad \mathbb{H} = (\eta_1, \dots, \eta_m), \quad \mathbb{Z} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n); \quad \Xi, \mathbb{H}, \mathbb{Z} \geq 0,$$

что

$$(\Xi, X^{(s)}) + (\mathbb{H}, Y^{(s)}) + (\mathbb{Z}, Z^{(s)}) = \sum_{i=1}^l \xi_i x_i^{(s)} + \sum_{j=1}^m \eta_j y_j^{(s)} + \sum_{k=1}^n \zeta_k z_k^{(s)} \leq 0 \quad (s = 1, 2, \dots, N); \quad (7)$$

$$(\Xi, X^{(s)}) + (\mathbb{H}, Y^{(s)}) + (\mathbb{Z}, Z^{(s)}) = 0, \quad \text{если } \bar{p}_s > 0. \quad (8)$$

Наоборот, если для некоторого плана  $\bar{P}$ , удовлетворяющего условиям  $\bar{Z} = -Z_0$ ,  $\bar{Y} = 0$ ,  $\bar{X} = kX_0$ , имеются множители такие, что выполнены условия (7), (8), то этот план оптимальный (если выполнены более слабые условия  $\bar{Z} \geq -Z_0$ ,  $\bar{Y} \geq 0$ ,  $\bar{X} \geq kX_0$ , то сказанное верно, если для компонент, для которых имеет место знак неравенства, соответствующие множители равны нулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим  $\sup k = k_0$  ( $k_0 \leq \infty$ ). Для  $k_\nu \rightarrow k_0$ ,  $k_\nu < k_0$ , найдутся такие планы  $P^{(\nu)} = (p_1^{(\nu)}, \dots, p_N^{(\nu)})$ , что

$$\sum p_s^{(\nu)} Z^{(s)} \geq -Z_0, \quad \sum p_s^{(\nu)} Y^{(s)} \geq 0, \quad \sum p_s^{(\nu)} X^{(s)} \geq k_\nu X_0.$$

Пусть  $\sum |p_s^{(\nu)}| = \sigma_\nu$ . Невозможно, чтобы  $\overline{\lim} \sigma_\nu = +\infty$ . В противном случае, переходя к частичной последовательности, получили бы  $\sigma_\nu^{-1} p_s^{(\nu)} \rightarrow \tilde{p}_s$  и для плана  $\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_N)$ ,

$$\sum \tilde{p}_s Z^{(s)} \geq 0, \quad \sum \tilde{p}_s Y^{(s)} \geq 0, \quad \sum \tilde{p}_s X^{(s)} \geq 0, \quad \sum \tilde{p}_s = 1,$$

что противоречит условию. Итак,  $\sigma_\nu$  ограничены; ясно тогда, что и  $k_0 = \sup k < +\infty$ . Переходя к частичной последовательности, можем считать, что  $\lim p_s^{(\nu)} = \bar{p}_s$ ; тогда

$$\sum \bar{p}_s Z^{(s)} \geq -Z_0, \quad \sum \bar{p}_s Y^{(s)} \geq 0, \quad \sum \bar{p}_s X^{(s)} \geq k_0 X_0,$$

т. е. план  $\bar{P} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_N)$  оптимальный.

Далее рассмотрим в  $(l + m + n)$ -мерном пространстве множество  $K$  векторов  $U = (X, Y, Z)$ , отвечающих всем допустимым планам.  $K$  представляет многогранный выпуклый конус. Точка  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ , отвечающая оптимальному плану, лежит на его границе, так как положительный гипероктант пространства, транспонированный в точку  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ , не содержит внутренних точек конуса.

Рассмотрим гиперплоскость  $H$ , разделяющую этот гипероктант и конус  $K$  ( $X_0 \notin H$ ). Она имеет уравнение вида  $(\Xi, X) + (\mathbb{H}, Y) + (\mathbb{Z}, Z) = 0$ . Коэффициенты этого уравнения — неотрицательные числа  $\xi_i$ ,  $\eta_j$ ,  $\zeta_k$  — и будут требуемыми

множителями. Так как для всех способов соответствующие векторы принадлежат конусу, то эти векторы лежат по одну сторону от  $H$ , т. е.

$$(\Xi, X^{(s)}) + (H, Y^{(s)}) + (Z, Z^{(s)}) \leq 0.$$

Далее имеем

$$\sum \bar{p}_s [(\Xi, X^{(s)}) + (H, Y^{(s)}) + (Z, Z^{(s)})] = (\Xi, X) + (H, Y) + (Z, Z) \leq 0,$$

откуда ясно, что  $(\Xi, X^{(s)}) + (H, Y^{(s)}) + (Z, Z^{(s)}) = 0$  при  $p_s > 0$ . Последнее утверждение теоремы проверяется без труда.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Условие, поставленное в теореме, является естественным. Именно, если бы для плана, удовлетворяющего (6), оказалось  $\sum \bar{p}_i > 0$  и  $|\tilde{X}| + |\tilde{Y}| + |\tilde{Z}| > 0$ , то это означало бы, что некоторые виды продуктов или факторов могут быть произведены без затрат. Очевидно, они должны были быть исключены из рассмотрения. Если же  $\sum \bar{p}_i > 0$  и  $\tilde{X} = 0$ ,  $\tilde{Y} = 0$ ,  $\tilde{Z} = 0$ , то один из видов продукции или факторов может быть выражен через другие.

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Условия, определяющие оптимальный план, могут быть взяты и в ином виде. Например, можно потребовать, чтобы объем производства некоторых продуктов был зафиксирован в задании либо состав и объем продукции могут быть полностью заданы, а требуется получить минимум всех затрат или определенного их вида.

Приведенные рассуждения распространяются на все подобные случаи. Для существования плана важна только компактность множества планов, удовлетворяющих поставленным ограничениям, а для наличия множителей — чтобы состояние было экстремальным (имелся исходящий из искомой точки луч, заведомо не принадлежащий внутренности множества  $K$ ).

Отметим еще, что если никаких предварительных условий не ставится, а дан некоторый план, условно оптимальный в том смысле, что невозможно изменение его, при котором бы объемы производства по всем видам продуктов увеличились, а все виды затрат производственных факторов уменьшились, то и для такого плана имеются множители указанного в теореме вида.

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** В том частном случае, когда промежуточные продукты отсутствуют, а в каждом способе фигурирует только один вид продукта (либо только один вид производственных факторов), для характеристики плана достаточно ввести оценки только для продуктов (или соответственно только для факторов).

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** Результаты рассмотрения задач А, В, С в работе <sup>(1)</sup> представляют следствия данной теоремы. Частный случай этой теоремы, с более стеснительными условиями (модель Леонтьева), имеется в <sup>(2)</sup>.

Для эффективного решения задач о построении оптимального плана могут быть использованы различные методы, основанные на применении «разрешающих множителей», дающих характеристику максимального плана.

Прежде всего, если имеется некоторый план, удовлетворяющий условиям (3), (4), (5), то, чтобы убедиться в его экстремальности, достаточно проверить возможность определения множителей из условий (8), чтобы при этом были удовлетворены



(7) и условия равенства нулю некоторых из множителей. Если такого плана заранее не дано, для одновременного нахождения оптимального плана и системы множителей может быть применено несколько процессов последовательных приближений:

1) Последовательное улучшение плана. Исходя из некоторого плана, удовлетворяющего условиям (3), (4), (5), определяем множители из условий (8); если условия (7) оказываются невыполненными, обнаруживается способ, присоединение которого позволяет повысить значение  $k$  ( $(3,4)$  и  $(5)$ , гл. 1, § 5).

Иначе говоря, к точке  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$  приближаемся постепенно изнутри конуса. Сходный процесс, но без использования разрешающих множителей используется в так называемом симплекс-методе Данцига  $(6)$  в линейном программировании.

2) Приближение условно-оптимальными планами. Задавшись некоторой системой множителей, выбираем в соответствии с (7) и (8) способы, включаемые в план, и строим его с учетом (3), (4). Затем видоизменяем множители, последовательно повышая значение  $k$  (движение по поверхности конуса; см.  $(1)$  и  $(5)$ , гл. I, § 6). Усовершенствованием этого приема является алгоритм метода крайней точки (7).

3) Приближение к системе множителей, а также к плану с введением двусторонних границ для значений множителей (см.  $(5)$ , гл. I, § 7 и 8).

Перечисленные методы нахождения плана с применением «разрешающих множителей» (оценок) оказываются эффективными даже в весьма сложных случаях. Помимо облегчения нахождения оптимального плана, использование множителей позволяет решать ряд других вопросов: корректировка плана при изменении условий, оценка целесообразности использования способов, неучтенных при составлении плана, и т. п.

С помощью задачи, рассмотренной выше, может быть проанализирована и более сложная задача, когда план рассматривается не для одного, а для ряда моментов времени  $t = 1, 2, \dots, T$ . Рассматривая каждый вид продукции и факторов в разные моменты как самостоятельный вид продукции или факторов, технологические способы  $\pi_s$  характеризуем уже посредством трех матриц:

$$X^{(s)} = \|x_{it}^{(s)}\|, \quad Y^{(s)} = \|y_{jt}^{(s)}\|, \quad Z^{(s)} = \|z_{kt}^{(s)}\|$$

$$(i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2, \dots, T).$$

Понятие «оптимальный план» можно здесь ввести различными способами, например, потребовать, чтобы продукция всегда была не ниже заданной, а ее среднее по времени имело данный состав и максимально возможное значение. Мы не будем останавливаться на каком-либо из подобных условий, а ограничимся характеристикой условно-оптимального плана (ср. замечание 3). На основании доказанной теоремы заключаем, что каждому условно-оптимальному плану будут отвечать матрицы множителей  $\Xi = \|\xi_{it}\|$ ,  $\Pi = \|\eta_{jt}\|$ ,  $\Sigma = \|\zeta_{kt}\|$ , так что выполнены условия, подобные (7), (8). Естественно эти множители (оценки) нормировать. Например, полагая  $\xi_{it} = \lambda_t \xi'_{it}, \dots$ , можем добиться выполнения условия  $\sum_i \xi'_{it} = 1$  ( $t = 1, 2, \dots, T$ ), т. е. чтобы набор конечной продукции имел оценку 1. Однако тогда условия (7) и (8) примут уже иной вид, например, (7) заменится на

$$\sum_t \lambda_t \left( \sum_i \xi'_{it} x_{it}^{(s)} + \sum_j \eta'_{jt} y_{jt}^{(s)} + \sum_k \zeta'_{kt} z_{kt}^{(s)} \right) \leq 0, \quad (7')$$

т. е. при оценке производственных способов продукция и затраты, производимые в различные моменты, должны быть приведены к одному моменту с помощью множителей  $\lambda_t$ . Величины  $\lambda_t$  (правильнее,  $\lambda_t^{-1}$ ) представляют общую характеристику роста продукции со временем для данного плана. Помимо наглядного экономического смысла, их выделение весьма полезно при разыскании оптимального плана. Именно, целесообразно применять следующий процесс последовательных приближений. Задавшись некоторыми способами, затрагивающими ряд моментов, определить затем оценки для каждого момента, исходя из полученных заданий по составу продукции и затрат, учитывая при этом способы, включающие только элементы данного момента. Затем на основании полученных оценок найти  $\lambda_t$  и оценить способы, включающие разновременные элементы. Используя некоторые из них, улучшить план и т. д.

### ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Л. В. Канторович, Математические методы организации и планирования производства. Л., 1939.
- <sup>2</sup> D. Gale, Math Scand., **3**, 2 (1955).
- <sup>3</sup> Л. В. Канторович, ДАН, **37**, 227 (1942).
- <sup>4</sup> Л. В. Канторович, М. К. Гауруин, Сборн. Проблемы повышения эффективности работы транспорта, Изд-во АН СССР, 1949. стр. 110–138.
- <sup>5</sup> Л. В. Канторович, В. А. Залгаллер. Расчет рационального раскроя промышленных материалов, Л., 1951.
- <sup>6</sup> Т. Коопманс (Ed.), Activity Analysis of Production and Allocation, New York, 1951.
- <sup>7</sup> Г. Ш. Рубинштейн, ДАН, **100**, 4 (1955).

## Рациональные методы раскрой металла<sup>\*)</sup>

Экономия металла, сокращение и максимальное использование металлических отходов имеют огромное народнохозяйственное значение, особенно в условиях военного времени. Одним из методов сокращения, а также наиболее полного использования отходов является рациональный раскрой металла. Основная масса металла поступает на заводы в виде прутков, полос, штанг, листов и т. д., размеры которых установлены соответствующими стандартами или техническими условиями. При раскросе металла на части, как правило, получается значительное количество отходов — концов, обрезков и т. п., которые не всегда могут быть полноценно использованы.

В ряде случаев для сокращения отходов заводам-поставщикам заказывают определенные профили металла, размеры которых кратны размерам выкраиваемых из этого металла заготовок. Но до сих пор сокращение отходов путем рационализации методов раскроя остается весьма актуальной задачей. Применение этих методов оправдывается даже в тех случаях, когда это связано с известными технологическими трудностями.

Рекомендуемые в настоящей статье методы раскроя основаны главным образом на идее рационального комбинирования размеров. В качестве иллюстрации приведем примеры из практики раскроя металла для деталей автомобиля ЯГ-6.

Достигнутые рационализацией раскроя результаты сравниваются с раскросом, предусмотренным в соответствующем заводском альбоме. Изложение разбито на несколько разделов, соответствующих отдельным видам раскроя, для которых характер решения различен.

### Разделение на части тел линейных размеров

**Задача 1.** Раскроить стержень длиной 3000 мм (рис. 1) на заготовки длиной 510 и 310 мм (равные количества тех и других).

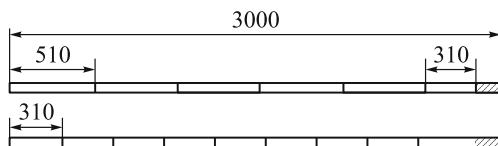


Рис. 1

**Решение.** Если раскрой вести для каждого размера отдельно, то получатся значительные отходы. Так, раскраивая стержень на заготовки размером 310 мм, получим  $9 \times 310 = 2790$  мм, отход 210 мм — 7%. Раскраивая стержень на заготовки

<sup>\*)</sup>Опубликовано в «Производственно-техническом бюллетене» Наркомата боеприпасов. — 1942. — № 7–8. — С. 21–29.

510 мм, получим:  $5 \times 510 = 2550$  мм; если даже используем часть отхода в 450 мм для заготовки 310 мм, то получим отход в 140 мм, или 4,7%. В среднем отходы составят 5,8%.

Значительно меньшими отходы будут при комбинировании обоих размеров при раскрое. Для этого надо подобрать числа, кратные каждому размеру:

$$310, 620, 930, 1240, 1550, 1860, 2170, 2480, 2790$$

и

$$510, 1020, 1530, 2040, 2550.$$

Далее надо подбирать пары чисел из обоих рядов, суммы которых ближе всего подходят к 3000 (с недостатком). Это дает наилучшие комбинации:

$$1 \times 510 + 8 \times 310 = 2990; \quad 4 \times 510 + 3 \times 310 = 2970.$$

Подбирать числа стержней, раскраиваемых по каждому способу, надо для того, чтобы получить нужное соотношение между числом заготовок обоих размеров. В данном случае это соотношение есть 1 : 1; поэтому числа стержней, раскраиваемых по каждому способу, нужно принять равными:

первый способ	$1 \times 510 + 8 \times 310 + 10 =$	$3000;$	$m = 1;$
второй способ	$4 \times 510 + 3 \times 310 + 30 =$	$3000;$	$n = 7;$
	$29 \times 510 + 29 \times 310 + 220 = 8 \times 3000$		

т. е., раскраивая один стержень по первому способу и семь стержней по второму способу, получим по 29 заготовок того и другого размера. Отходы составят 220 мм, т. е.

$$220 : (8 \times 3000) = 0,9\%.$$

Числа  $m$  и  $n$  легко подобрать на глаз или можно получить, решив простое уравнение:

$$1 \times m + 4 \times n = 8 \times m + 3 \times n.$$

Отсюда  $n = 7m$ , и потому, очевидно, проще всего принять  $m = 1$ ,  $n = 7$ . Этот способ раскроя приведен на рис. 2.



Рис. 2

Для решения той же задачи может быть предложен простой графический метод (рис. 3). На оси  $OX$  единица (1 см) равна 310 мм, а по оси  $OY$  — 510 мм. Отложим на обеих осях отрезки, сумма которых составит длину стержня 3000 мм,

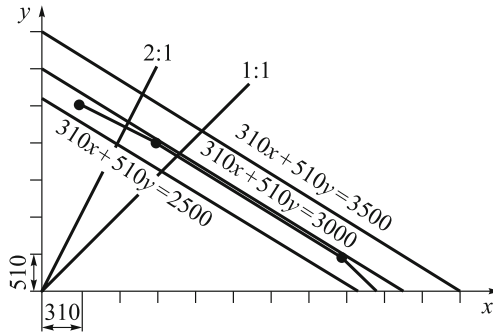


Рис. 3

т. е. отрезки  $3000 : 310 = 9,62$  и соответственно  $3000 : 510 = 5,89$  мм, и соединим их прямой.

Целые точки, лежащие под этой прямой, и дадут возможные способы раскроя. В частности, точки  $8;1$  и  $3;4$ , наиболее близкие к прямой, соответствуют отмеченным выше двум наилучшим способам раскроя

$$(1 \times 510 + 8 \times 310 = 2990; \quad 4 \times 510 + 3 \times 310 = 2970).$$

Проводя прямую под углом  $45^\circ$ , находим графически, что решение задачи получается в результате комбинирования указанных двух способов, причем по расстоянию до точек  $8;1$  и  $3;4$  можно определить и отношение чисел. При задании другого соотношения, например  $2 : 1$  (частей длиной  $510$  мм вдвое больше, чем частей длиной  $310$  мм), пришлось бы пользоваться другим способом раскроя — комбинировать раскрой  $4 \times 510 + 3 \times 310$  с раскромом  $5 \times 510 + 310$ .

Тот же графический способ может быть применен путем использования мерной линейки, построенной по двум указанным размерам, т. е.  $310$  и  $510$  (рис. 4). Применение линейки особенно целесообразно при раскроме стержней различной длины (нестандартных). Например, для стержня длиной  $2600$  мм подходит комбинация  $2 \times 510 + 5 \times 310$  — точки  $5;2$ , для стержня  $3500$  мм — комбинация  $2 \times 510 + 8 \times 310$  или  $5 \times 510 + 3 \times 310$ , т. е. точки  $8;2$  и  $3;5$ .

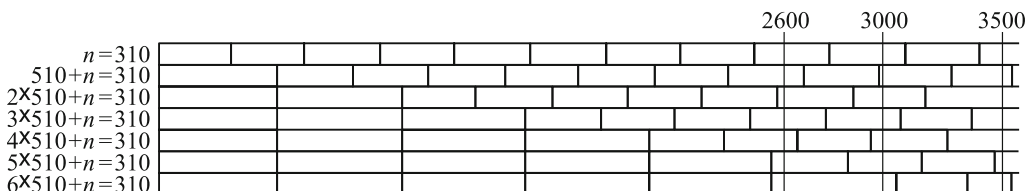


Рис. 4

**Задача 2.** Швеллер № 10 длиной 6000 мм раскроить на следующие детали:

№ детали	Число деталей		Длина мм
	на одно изделие		
45-0217	1		762 <sup>1)</sup>
55-0231	1		783
55-0223	1		882
55-022	2		50

**Решение.** Способ раскроя показан на рис. 5. Из 19 швеллеров получается 42 комплекта (42 по 762 мм, 42 по 783 мм, 42 по 882 мм и 84 по 50 мм).

Отходы от 19 швеллеров составляют:  $6 \times 666 + 6 \times 519 + 7 \times 108 = 7866$  мм;

$$\frac{7866}{19 \times 600} = 6,9\%.$$

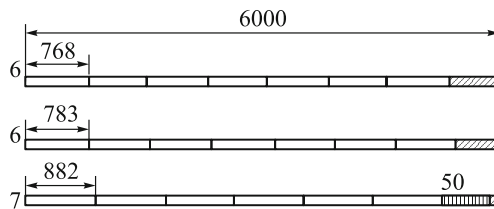


Рис. 5

Для составления наилучшего раскроя комбинируем размеры.

Так как размер 50 мм получится из остатков, его вначале принимать во внимание не следует. Размеры 762 и 783 мм, незначительно отличающиеся один от другого, комбинируются с размером 882 мм. Для чисел 762 и 882 кратные числа будут:

$$762, 1524, 2286, 3048, 3810, 4572, 5334; 882, 1764, 2646, 3528, 4410, 5292.$$

Откуда суммы, наиболее близкие к 6000, равны:

$$4 \times 762 + 3 \times 882 = 5694; \quad 7 \times 762 = 5334; \quad 2 \times 762 + 5 \times 882 = 5934.$$

Как следует из рис. 6, все три комбинации (точки 4;3, 7;0, 12;5) находятся на одной прямой и равноценны. Для нужного соотношения (2 : 1) можно использовать вторую комбинацию вместе с первой или с третьей комбинацией; берем первую и вторую. Подбираем множители и, используя, кроме того, частично отходы для получения размера 50 мм, находим:

$$\begin{array}{rcl} 7 \text{ швеллеров} - & 4 \times 762 + 3 \times 882 + 4 \times 50 + & 106 = 6000 \\ 2 \text{ швеллера} - & 7 \times 762 + & 7 \times 50 + 316 = 6000 \end{array}$$

---


$$42 \times 762 + 21 \times 882 + 42 \times 50 + 1374 = 96000$$

<sup>1)</sup> Имеется небольшое расхождение между текстом и рисунками 5 и 6, где длина этой детали — 768 мм. Впрочем, это никак не сказывается на решении задачи. (Прим. ред.)

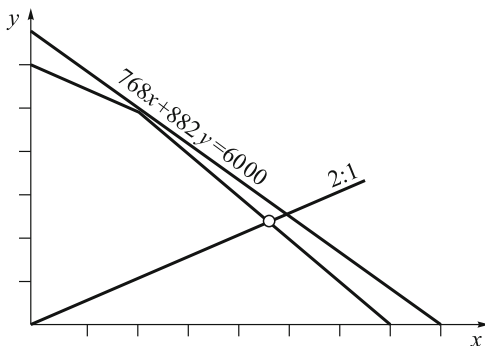


Рис. 6

Таким же точно образом возьмем:

$$\begin{array}{rcl}
 7 \text{ швеллеров} & - & 4 \times 783 + 3 \times 882 + 4 \times 50 + 22 = 6000 \\
 2 \text{ швеллера} & - & 7 \times 783 + \phantom{3 \times 882} + 7 \times 50 + 169 = 6000 \\
 \hline
 & & 42 \times 783 + 21 \times 882 + 42 \times 50 + 492 = 96\,000
 \end{array}$$

Всего из 18 швеллеров получается 42 комплекта (42 по 762 мм, 42 по 783 мм, 42 по 882 мм и 84 по 50 мм). Отходы составят  $1374 + 492 = 1886$  мм, или

$$\frac{1886}{18 \times 600} = 1,7\%$$

вместо 6,9% по существующему раскрою (рис. 7).

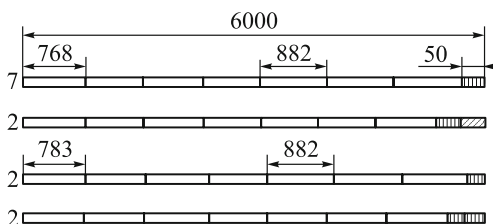


Рис. 7

**Задача 3.** Швеллер 6,5 длиной 6000 мм раскроить на детали:

№ детали	Число деталей	
	на одно изделие	Длина мм
47-021	1	1086
47-022	1	910
46-0412	2	732

Подбираем комбинации трех основных размеров и составляем кратные числа:

$$1086, 2172, 3258, 4344; 910, 1820, 2730, 3640, 4550;$$

732, 1464, 2196, 2928, 3660, 4392.

Наилучшими комбинациями будут:

$$\begin{aligned} 3 \times 910 + 3 \times 732 + 74 &= 5000; & m &= 4; \\ 1086 + 910 + 4 \times 732 + 76 &= 5000; & n &= 9; \\ 2 \times 1086 + 3 \times 910 + 98 &= 5000; \\ 3 \times 1086 + 910 + 732 + 100 &= 5000; & p &= 6. \end{aligned}$$

Эти же комбинации можно получить графически (рис. 8 и 9).

Подбирая множители для этих комбинаций так, чтобы обеспечить нужное соотношение числа заготовок размерами 1086, 910 и 732 мм (1 : 1 : 2). Получаем из 19 швеллеров 27 комплектов (27 по 1086 мм, 27 по 910 мм, 54 по 732 мм). Отходы составят:

$$4 \times 74 + 9 \times 76 + 6 \times 100 = 1580 \text{ мм}; \quad \frac{1580}{19 \times 5000} = 1,7\%.$$

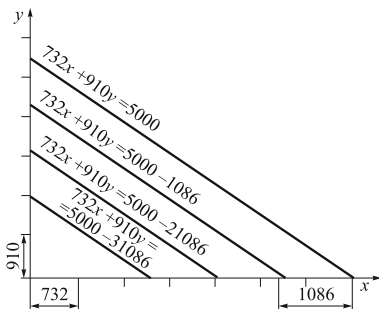


Рис. 8

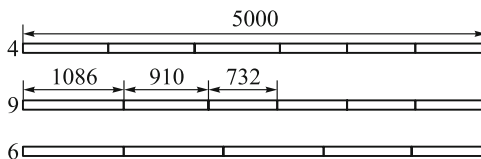


Рис. 9

В альбоме раскроя при использовании концов на мелкие детали отходы составляют 3–4%.

Приведенный выше подбор комбинаций, дающий нужное соотношение (1 : 1 : 2), не единственный. При другом подборе, в частности при использовании третьей комбинации, может возникнуть вопрос, не будут ли отходы меньше. Введем оценки  $u$ ,  $v$  и  $w$ , соответствующие размерам 1086, 910 и 732 мм.<sup>2)</sup> Приравнивая суммарные оценки трех использованных комбинаций, получим уравнения:

$$3v + 3w = u + v + 4w = 3u + v + w.$$

Из этих уравнений  $u$ ,  $v$  и  $w$  определяются с точностью до множителя. Можно принять, например,  $u = 6$ ,  $v = 5$ ,  $w = 4$ . Все комбинации получают оценку 27. Ту же оценку получит и неиспользованная комбинация ( $2u + 3v = 27$ ).

<sup>2)</sup>Вероятно, редакция сократила статью, в частности, текст, касающийся оценок (разрешающих множителей). Здесь они появились без каких-либо пояснений. (Прим. ред.)



### Раскрой листов на прямоугольники

При раскрое листов на прямоугольники имеется такая же возможность комбинировать размеры, как и при раскрое на полосы. Поэтому в данном случае могут быть частично использованы указанные выше приемы. Кроме того, имеются специальные приемы, в частности, здесь возможно комбинировать размеры даже при раскрое на прямоугольники одного размера (заготовки для одной детали).

**Задача 4.** Лист размером  $700 \times 1500$  мм требуется раскроить на прямоугольники размером  $95 \times 155$  мм. При простейшем раскрое (рис. 10) из листа получается 60 прямоугольников; отходы составляют:

$$700 \times 1500 - 60 \times (95 \times 155) = 166\,500, \quad \text{или } 15,8\%.$$

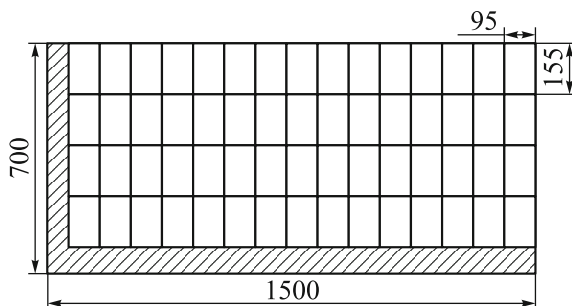


Рис. 10

Для получения наилучшего раскроя продельваем следующее.

а) Подбираем комбинацию размеров 155 и 95 мм, дающую сумму, близкую к ширине листа 700 мм. Эту сумму можно найти указанным выше приемом:

$$95, 190, 285, 380, 475, 570, 665, 760, 855, 950, 1045, 1140, 1235, 1330, 1425;$$

$$155, 310, 465, 620, 775, 930, 1085, 1240, 1395,$$

которая и будет равна:  $2 \times 155 + 4 \times 95 = 690$  мм.

В соответствии с этим при раскрое берем четыре полосы шириной 95 мм и две полосы шириной 155 мм.

б) Среди чисел обоих рядов подбираем два мало различающихся между собой числа и по возможности близких к 1500. Это будут  $1240 = 8 \times 155$  и  $1235 = 13 \times 95$ . В соответствии с этим раскраиваем из первых четырех полос восемь прямоугольников, из следующих двух полос — тринадцать прямоугольников.

в) Для оставшейся длины  $1500 \times 1240 = 260$  мм подбираем близкую сумму:  $155 + 95 = 250$  мм. Исходя из этого, выкраиваем одну полосу шириной 155 мм, другую шириной 95 мм и из каждой полосы выкраиваем нужные прямоугольники, а именно семь прямоугольников и соответственно четыре прямоугольника. Всего получается  $4 \times 8 + 12 \times 13 + 7 + 4 = 69$  прямоугольников. Отходы составляют:

$700 \times 1500 - 69 \times (95 \times 155) = 34\,000 \text{ мм}^2$ , или 3,2% вместо 15,8% при простейшем раскрое.

**Задача 5.** Лист 10 мм стали размером  $1500 \times 3000 \text{ мм}$  раскроить на прямоугольные заготовки размером  $143 \times 200 \text{ мм}$  (расстояние при разрезании ножницами в 10 мм учтено в размерах заготовки).

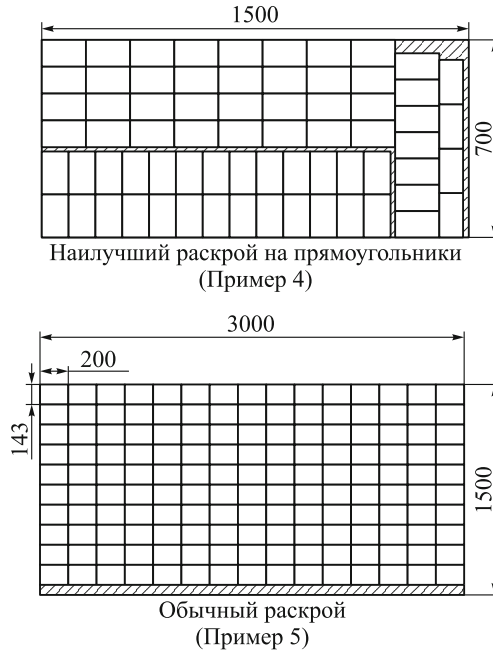


Рис. 11

Раскрой альбомный (рис. 11); из одного листа получается 150 заготовок; отходы составляют:

$$\frac{70 \times 3000}{1500 \times 3000} = 4,7\%.$$

Для получения наилучшего раскроя продельваем следующее:

1. Подбираем сумму, близко приближающуюся к 1500:

$$9 \times 143 + 1 \times 200 = 1487.$$

2. В первых девяти рядах берем по 15 заготовок ( $15 \times 200 = 3000$ ), в последнем ряду берем 21 заготовку ( $21 \times 143 = 3003$ ). Всего получается  $9 \times 15 + 21 = 156$  заготовок (рис. 12). Отходы составляют  $3000 \times 1500 - 156 \times (143 \times 200) = 33\,400 \text{ мм}^2$ , или 0,86% вместо 4,8%.

**Задача 6.** Лист 3 мм стали размером  $710 \times 1420 \text{ мм}$  требуется раскроить на заготовки размером  $135 \times 160 \text{ мм}$ . Расстояние при разрезании ножницами брать

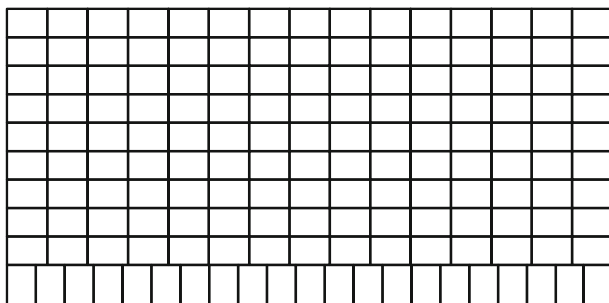


Рис. 12

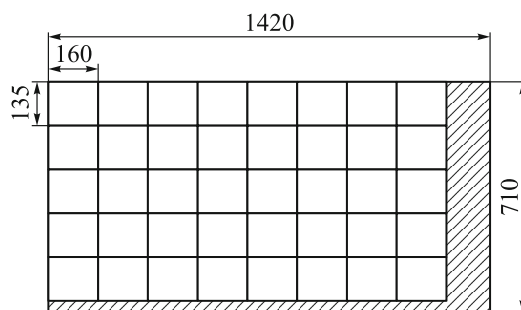


Рис. 13

равным 3–3,5 мм. Раскрой альбомный (рис. 13). Из листа получается 40 заготовок. Отходы, включая запас на раскрой, составляют:

$$710 \times 1420 - 40 \times (135 \times 160) = 144\,200 \text{ мм}^2, \text{ или } 14,3\%.$$

Для составления наилучшего раскроя поступаем аналогично прежнему:

а) Составляем ряды:

$$135, 270, 405, 540, 675, 810, 945, 1080, 1215, 1350;$$

$$160, 320, 480, 640, 800, 960, 1120, 1280.$$

Подбираем сумму, подходящую к 710. Это будет

$$4 \times 135 + 160 = 700.$$

В соответствии с этим выкраиваем четыре полосы шириной 135 мм и одну полосу шириной 160 мм (рис. 14).

б) Нижний ряд заполняется довольно хорошо  $10 \times 135 = 1350$  (надо учесть запас на раскрой 30–35 мм) — близко к 1420 мм. Для верхних рядов подбираем сумму, близкую к 1420, а именно

$$7 \times 160 + 2 \times 135 = 1390.$$

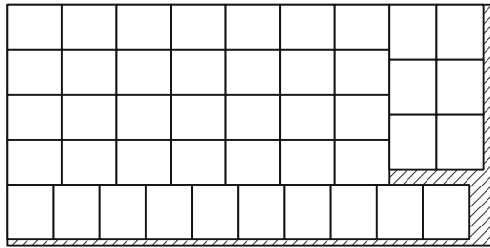


Рис. 14

в) В оставшейся полосе (540 мм) укладывается размер  $3 \times 160$ . Всего получается 44 заготовки. Отходы (включая запас на раскрой) составляют:

$$710 \times 1420 - 44 \times (135 \times 160) = 57\,800 \text{ мм}^2,$$

или 5,8% вместо 14,3% при установленном согласно альбому раскрое.

Этот раскрой неудобен тем, что запас на раскрой по ширине, равный  $710 \times 700 = 10 \text{ мм}$ , весьма незначителен и требуется очень аккуратная работа на ножницах. Но это оправдывается экономией металла. Может быть применен и другой способ раскроя, показанный на рис. 15. Из листа получается 43 заготовки. Отходы составляют  $710 \times 1420 - 43 \times (135 \times 160) = 79\,400 \text{ мм}^2$ , или 7,9%.

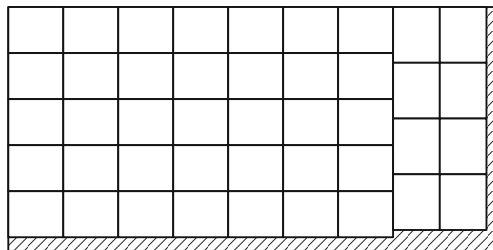


Рис. 15

Способ раскроя рассчитывается аналогично первому, только начинается с того, что подбирается сумма, близко подходящая к длине:  $7 \times 160 + 2 \times 135 = 1390$ .

### Раскрой на круглые размеры

В случаях раскроя листов на заготовки в виде кругов часто не учитывают, что простейшее расположение кругов по рядам не является наиболее плотным. При таком расположении из листа площадью  $S$  получается столько же кругов диаметром  $d$ , сколько квадратов со стороной  $d$ , т. е. примерно  $n = S/d^2$ . Использование площади составляет

$$\frac{n(\pi d^2/4)}{S} = \frac{(S/d^2)(\pi d^2/4)}{S} = \frac{\pi}{4} = 78,5\%.$$

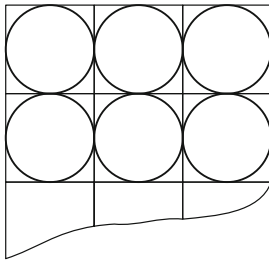


Рис. 16

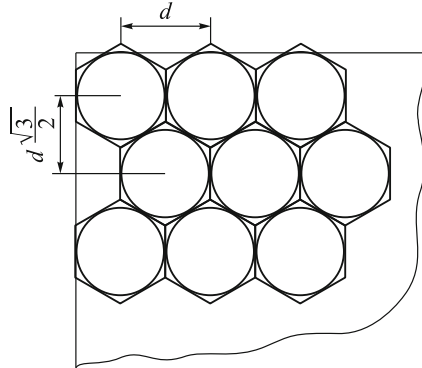


Рис. 17

Отходы составят 21,5%, а с учетом отходов по краям — и больше (рис. 16).

Наиболее плотное расположение кругов получается при ячейках, имеющих вид правильных шестиугольников (рис. 17). Здесь для листа большого размера число кружков будет приблизительно равняться  $n_1 = S/p$ , где  $p$  — площадь правильного шестиугольника, описанного у круга диаметром  $d$ , равная

$$p = \frac{\sqrt{3}}{2}d^2.$$

В этом случае размер использованной площади составит<sup>3)</sup>

$$\frac{n_1(\pi d^2/4)}{S} = \frac{2S(\pi d^2/4)/\sqrt{3}d^2}{S} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 90,7\%,$$

а отходы только 9,3%. Следует отметить, что отходы по краям в данном случае обычно больше, чем при простейшем расположении кругов. Поэтому данный способ раскроя имеет преимущество в случаях небольшого размера кружка по сравнению с размером листа.

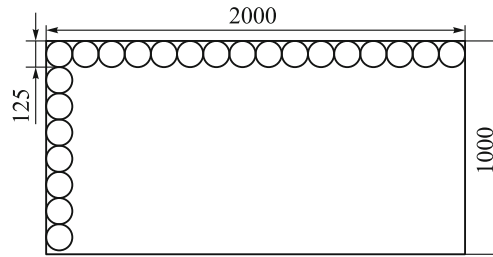
**Задача 7.** Из 3 мм листа размером 1000 × 2000 мм требуется получить заготовки в виде кружков диаметром 115 мм (+10 мм на раскрой). При обычном способе раскроя (рис. 18) из листа получается 8 × 16 = 128 заготовок.

Для определения числа горизонтальных рядов делим ширину листа без диаметра на  $d\sqrt{3}/2$  и к частному прибавляем единицу. Получаем:

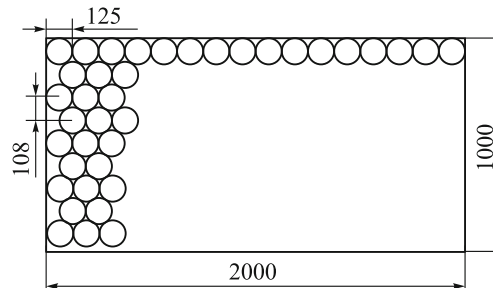
$$\frac{b - d}{d\sqrt{3}/2} + 1 = \frac{1000 - 125}{125\sqrt{3}/2} + 1 = \frac{875}{108,2} = 9,07,$$

т. е. 9 рядов. Число кружков в каждом ряду будет равно длине, разделенной на диаметр  $l/d = 2000 : 125 = 16$ , или на единицу меньше, т. е. 15. Всего будем иметь 5 рядов по 16 кружков и 4 ряда по 15 кружков, т. е.  $5 \times 16 + 4 \times 15 = 140$  кружков,

<sup>3)</sup>При указанном на чертеже расположении расстояние между двумя центрами по горизонталям равно  $d$ , а между двумя линиями центров по вертикали равно  $d\sqrt{3}/2$ .



Обычный раскрой на круглые заготовки  
(Пример 7)



Наилучший раскрой на круглые заготовки  
(Пример 7)

Рис. 18

или увеличение на 9,4% по сравнению с обычным раскромом. Следует сказать, что применение этого метода раскроя усложняет разрезание листа на ножницах.

Отметим, что в альбоме раскроя и в приведенном примере оставлен слишком большой запас на разрезание — 10 мм; совершенно достаточен был бы запас 3 мм (толщина листа). Оставление излишнего запаса вызвано желанием получить такой диаметр кружка (125), чтобы размеры листа были кратны ему; небольшое уменьшение диаметра кружка при обычной системе раскроя не позволило бы увеличить число заготовок.

Попробуем уменьшить диаметр кружка при предлагаемом методе раскроя. Примем согласно сказанному диаметр равным  $115 + 3 = 118$  мм. Ряды удобнее расположить по меньшему размеру листа. Число рядов будет

$$\frac{l - d}{d\sqrt{3}/2} + 1 = \frac{2000 - 118}{118\sqrt{3}/2} + 1 = \frac{1882}{102,2} + 1 = 19,4,$$

т. е. 19 рядов. Число заготовок в каждом ряду будет:

$$\frac{l}{d} = \frac{1000}{118} = 8,48 = 8,5,$$

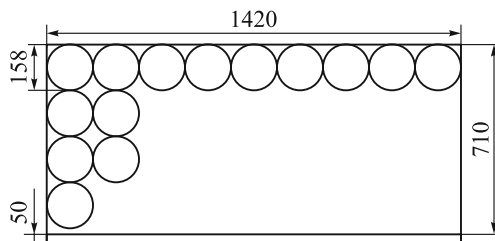
т. е. по 8 заготовок в каждом ряду.

Всего будем иметь  $19 \times 8 = 152$  заготовки. По сравнению с альбомным раскромом увеличение выхода на  $24/128 = 18,7\%$ .

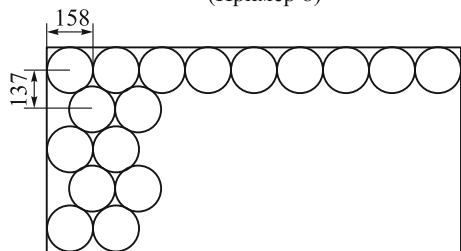
**Задача 8.** Из 4 мм листа размером 710 × 1420 мм требуется изготовить заготовки для деталей в виде кружков диаметром 150(+8) мм = 158 мм.

При обычном раскрое (рис. 19) из листа получается 36 заготовок и, кроме того, полоска 60 × 1420 мм, используемая на другие детали.

Для получения наилучшего раскроя поступаем, как и в предыдущем случае.



Раскрой на круглые заготовки (обычный)  
(Пример 8)



Наилучший раскрой на круглые заготовки  
(Пример 8)

Рис. 19

По вертикали получаем:

$$\frac{l - d}{d\sqrt{3}/2} + 1 = \frac{710 - 158}{158\sqrt{3}/2} + \frac{552}{137} + 1 = 5,03 - 5 \text{ рядов.}$$

По горизонтали:

$$\frac{l}{d} = \frac{1420}{158} = 8,99 - 9 \text{ или } 8 \text{ кружков в ряду,}$$

т. е. 3 ряда по 9 и 2 ряда по 8, а всего  $3 \times 9 + 2 \times 8 = 43$  заготовки. По сравнению с приведенным этот раскрой дает выход на 19% больший. Если даже учесть, что в альбомном раскрое 8% материала (полоска) идет на заготовку для другой детали, то и в этом случае увеличение выхода заготовок — 11%.

В отдельных случаях, когда ряды не укладываются в листе целое число раз, можно комбинировать данный способ с обычным или же располагать ячейки иным способом, в частности, путем перемены ролей ширины и длины.

Из приведенных примеров видно, что целесообразный раскрой металла во многих случаях значительно увеличивает его полезное использование.

Для широкого применения рациональных методов раскроя металла целесообразно сделать следующее:

- 1) Раскрой металла сосредоточить в единой заготовочной мастерской или цехе.
- 2) Выделить специального работника, изучившего предварительно методы рационального раскроя металла, для наблюдения за правильным раскромом металла на заводе. За исключением экстренных случаев все вновь вводимые раскрои металла не должны применяться без санкции этого работника.
- 3) Повысить заинтересованность отдельных работников во всемерной экономии металла, установив систему поощрительной оплаты (премий). Оценку работы отдельных цехов производить с учетом этого показателя.
- 4) Работу по рациональному раскрою металла тесно увязывать с проведением других мероприятий по экономии материалов, как-то: уменьшение допусков, изменения технологии, замена одного материала другим и т. д.

Излишек в 3 мм не имеет значения, так как расстояние при разрезании ножницами без ущерба может быть уменьшено на 1 мм.



# Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичных функционалов<sup>\*)</sup>

Мы рассмотрим здесь некоторый метод последовательных приближений для решения широкого класса задач о минимуме квадратичных функционалов. Метод этот может быть использован как для фактического решения указанных задач, так и для их исследования (доказательства существования, свойства решения и т. п.).

Изложим, прежде всего, не входя в детали, общую идею метода. В линейном метрическом пространстве рассматривается функционал  $I(f + \varepsilon g) - I(f)$ . Функционал квадратичный — это означает, что  $I(f + \varepsilon g) - I(f)$  — многочлен второй степени от  $\varepsilon$ . Начинаем с некоторого элемента  $f_0$ . Отыскиваем направление градиента, т. е. найдя  $\left[\frac{d}{d\varepsilon} I(f + \varepsilon g)\right]_{\varepsilon=0}$ , ищем такое  $g = g_1$ , что отношение полученной величины к  $\|g\|$  имеет экстремальное значение (пространство хотя бы типа  $(F)$  по терминологии С. Ванача<sup>1)</sup>). Далее определяем  $\varepsilon = \varepsilon_1$  из условия экстремума выражения  $I(f_0 + \varepsilon g_1)$ . После этого полагаем  $f_1 = f_0 + \varepsilon_1 g_1$  и продолжаем процесс. Рассмотрим применение метода в нескольких конкретных случаях.

**1. Системы линейных алгебраических уравнений.** Дана система

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Рассмотрим выражение

$$H(X) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - b_i \right)^2. \quad (2)$$

Оно достигает минимума, равного нулю, если  $X = \{x_i\}$  — решение (1). Пусть начальные значения  $x_i = x_i^0$ . Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} H(X^{(0)} + \varepsilon Z) &= \sum_I \left[ \sum_k a_{ik} (x_k + \varepsilon z_k) - b_i \right]^2 = \\ &= H(X^{(0)}) + 2\varepsilon \sum_k \left( \sum_i r_i^{(1)} a_{ik} \right) z_k + \varepsilon^2 \sum_i \left( \sum_k a_{ik} z_k \right)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r_i^{(1)} = \sum_k a_{ik} x_k^{(0)} - b_i$ .

---

<sup>\*)</sup>Опубликована в Докладах Академии наук СССР. — 1945. — Т. XLVIII, № 7. — С. 483–487. Основные результаты докладывались на семинаре отдела приближенных вычислений МИАН 21 октября 1943 г. Представлена академиком В. И. Смирновым 14 июня 1945 г.

Множитель при  $2\varepsilon$  будет максимальным при условии  $\sum z_k^2 = \text{const}$ , если  $z_k$  пропорциональны множителям при них. Полагаем

$$z_k^{(1)} = \sum a_{ik} r_i^{(1)}. \quad (4)$$

Тогда, чтобы выражение  $H(X^{(0)} + \varepsilon Z^{(1)})$  имело минимальное значение, следует принять

$$\varepsilon = \varepsilon^{(1)} = \left( - \sum_k (z_k^{(1)}) \right)^2 : \sum_i \left( \sum_k a_{ik} z_k^{(1)} \right)^2. \quad (5)$$

Полагаем теперь

$$r_i^{(2)} = \sum_k a_{ik} (x_k^{(0)} + \varepsilon^{(1)} z_k^{(1)}) - b_i = r_i^{(1)} + \varepsilon^{(1)} \sum_k a_{ik} z_k^{(1)} \quad (6)$$

и далее по формулам, аналогичным (4), (5), (6), вычисляем последовательно  $z_k^{(2)}$ ,  $\sum_k a_{ik} z_k^{(2)}$ ,  $\varepsilon^{(2)}$ ,  $r_i^{(3)}$  и т. д. Решение будет

$$x_i = x_i^{(0)} + \varepsilon^{(1)} z_i^{(1)} + \varepsilon^{(2)} z_i^{(2)} + \dots \quad (7)$$

Вычисления располагаются в простую схему и с удобством выполняются на счетных машинах. Формулы и вычисления существенно упрощаются, если матрица  $\|a_{ik}\|$  симметрична.

Рассмотренный метод последовательных приближений сходится к решению, если оно единственно; к одному из решений, если их не одно; к решению с минимумом суммы квадратов отклонений, если задача не имеет решения. В частности, применение метода целесообразно для систем, получающихся при использовании способа наименьших квадратов Гаусса. Порядок сходимости — геометрическая прогрессия, обычно с малым знаменателем.

Отметим еще, что метод допускает простую геометрическую интерпретацию. Именно, если рассмотреть семейство подобных эллипсоидов вида  $H(X) = \text{const}$ , то процесс можно описать геометрически так. Начав с точки  $X(0)$ , проводим в ней нормаль к эллипсоиду, проходящему через эту точку. Находим эллипсоид семейства, касающийся этой нормали. Точка касания будет  $X^{(1)} = X^{(0)} + \varepsilon^{(1)} Z^{(1)}$ . Проводим в ней нормаль и т. д. Применение метода возможно без особых изменений и в случае бесконечных систем.

**2. Интегральные уравнения Фредгольма.** Для упрощения изложения рассмотрим только случай симметричного ядра. Решение уравнения

$$L(\varphi) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) dy - h(x) = 0, \quad (8)$$

если  $\lambda/\lambda_k < 1$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), дает экстремум интегралу

$$H(\varphi) = \int_a^b \varphi^2(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi(x) \varphi(y) dx dy - 2 \int_a^b \varphi(x) h(x) dx. \quad (9)$$

Пользуясь тем же методом, что и выше, строим последовательные приближения, начиная с произвольного  $\varphi_0(x)$ , полагая

$$\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi_0(y) dy - h(x), \tag{10}$$

$$\varepsilon_1 = - \left( \int_a^b \varphi_1^2(x) dx \right) : \left( \int_a^b \varphi_1^2(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, y)\varphi_1(x)\varphi_1(y) dx dy \right). \tag{11}$$

Также последовательно определяются дальнейшие функции  $\varphi_k(x)$  и числа  $\varepsilon_k$ . Решение  $\bar{\varphi}(x)$  определяется по формуле

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi_0(x) + \varepsilon_1\varphi_1(x) + \dots \tag{12}$$

Если  $\bar{\varphi}(x)$  — решение уравнения (8), которое наверное существует, так как  $\lambda$  — не собственное значение, то нетрудно видеть, что

$$H(\varphi_0) - H(\varphi_0 + \varepsilon_1\varphi_1) = \left( \int_a^b \varphi_1^2(x) dx \right)^2 : \left( \int_a^b \varphi_1^2(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, y)\varphi_1(x)\varphi_1(y) dx dy \right),$$

$$H(\varphi_0) - H(\bar{\varphi}) = \int_a^b \eta^2(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, y)\eta(x)\eta(y) dx dy,$$

$$\eta(x) = \varphi_0(x) - \bar{\varphi}(x).$$

Отсюда, если обозначать через  $\alpha_k$  коэффициенты Фурье разложения  $\varphi_1(x)$  по собственным функциям, можно отношение указанных величин выразить так:

$$[H(\varphi_0) - H(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1)] : [H(\varphi_0) - H(\bar{\varphi})] = \left( \sum a_k^2 \right)^2 : \left[ \left( \sum \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) a_k^2 \right) \left( \sum \left( 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^{-1} a_k^2 \right) \right].$$

Отсюда ясно, что если через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначить такие числа, что

$$0 < \alpha \leq 1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \leq \beta < +\infty,$$

то имеем неравенство

$$\beta[H(\varphi_0) - H(\varphi_0 + \varepsilon_1\varphi_1)] \geq \alpha[H(\varphi_0) - H(\bar{\varphi})].$$

Оно показывает, что функционал сходится к своему минимуму со скоростью геометрической прогрессии, откуда следует и сходимость ряда (12) с такой же скоростью. Более точно, знаменатель прогрессии не превосходит  $(\beta - \alpha)^2 : (\beta + \alpha)^2$ .

Метод применим и в случае совпадения числа  $\lambda$  с собственным — для нахождения самих собственных чисел и функций. Он применим и для уравнений с несимметричным ядром или если не соблюдено условие  $\lambda/\lambda_k < 1$ . В этом случае вместо функционала  $H(\varphi)$  нужно рассматривать  $S[L(\varphi)]^2 dx$ . Наконец, он может быть использован и для уравнений 1-го рода.

**3. Обыкновенные дифференциальные уравнения.** Рассмотрим уравнение

$$L(y) = \frac{d}{dx}(p(x)y) - q(x)y - f(x) = 0, \quad y(a) = y(b) = 0. \quad (13)$$

Ему соответствует задача о минимуме интеграла

$$I(y) = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y] dx. \quad (14)$$

Нетрудно получить, беря за  $z(x)$  функцию, удовлетворяющую, так же как  $y_0(x)$ , условиям  $z(a) = z(b) = 0$ , что

$$I(y_0 + \varepsilon z) = I(y_0) + 2\varepsilon \int_a^b \left[ py'_0 - \int_a^b (qy_0 + f) dx \right] z' dx + \varepsilon^2 \int_a^b (pz'^2 + qz^2) dx.$$

Разыскивая  $z = z_1$ , дающее экстремум множителю при  $2\varepsilon$  при условии

$$\int z'^2 dx = \text{const},$$

следует принять

$$z'_1 = py' - \int (qy_0 + f) dx + C \quad \text{или} \quad z''_1 = L(y_0). \quad (15)$$

Определяя  $z_1$  из этого уравнения, в соответствии с условиями  $z(a) = z(b) = 0$  должны положить затем

$$\varepsilon_1 = - \left( \int z'^2 dx \right) : \left( \int [p(x)z'^2 + q(x)z^2] dx \right), \quad (16)$$

$$y_1(x) = y_0(x) + \varepsilon_1 z_1(x). \quad (17)$$

Аналогично определяются последующие приближения. Для случая  $p(x) > 0$  и  $q(x) > 0$ , так же как и в п. 2, можно установить:

$$I(y_1) - I(y_0) \geq \frac{p_{\min}}{p_{\max} + [(b-a)/\pi]^2 q_{\max}} [I(y_0) - I(\bar{y})], \quad (18)$$

где  $\bar{y}$  — решение. Отсюда следует сходимость последовательных приближений к решению и то, что она имеет порядок прогрессии.

Применение метода возможно и для уравнений высших порядков, а также в случае других граничных задач. Метод может послужить базой для различных

графоаналитических приемов, например, для сведения расчета сложных балок к повторному расчету простейших.

**4. Предельные задачи для уравнений в частных производных.** Рассмотрим в качестве примера этого рода задачу Дирихле для самосопряженного уравнения эллиптического типа:

$$L(u) = \frac{\partial}{\partial x} \left( a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( b \frac{\partial u}{\partial y} \right) - cu - f = 0, \quad u = \varphi(s) \text{ на } \Gamma. \quad (19)$$

Ей соответствует задача о минимуме интеграла

$$L(u) = \iint_D \left[ a \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + b \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + cu^2 + 2fu \right] dx dy. \quad (20)$$

Взяв в качестве начального приближения функцию  $u_0$ , принимающую на контуре  $\Gamma$ , ограничивающем область  $D$ , заданные для  $u$  значения, и вводя функцию  $\eta$ , равную нулю на  $\Gamma$ , можем получить

$$I(u_0 + \varepsilon\eta) = I(u_0) - 2\varepsilon \iint_D L(u_0)\eta dx dy + \varepsilon^2 \iint_D \left[ a \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + c\eta^2 \right] dx dy.$$

Естественно принять здесь

$$\|\eta\| = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Тогда, при условии  $\|\eta\| = \text{const}$ , множитель при  $2\varepsilon$  достигает экстремума, если в качестве  $\eta = \eta_1$  взято решение уравнения

$$\Delta \eta_1 = L(u_0), \quad \eta_1 = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (21)$$

Далее,  $I(u_0 + \varepsilon\eta)$  получит минимальное значение при  $\varepsilon = \varepsilon_1$ , где

$$\varepsilon_1 = \left[ \iint_D L(u_0)\eta dx dy \right] : \left\{ \iint_D \left[ a \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + b \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + c\eta^2 \right] dx dy \right\}. \quad (22)$$

Следующее приближение для  $u$  будет  $u_1 = u_0 + \varepsilon_1\eta_1$ . Опять при определенных условиях может быть доказана сходимость процесса.

Возможность практического использования метода здесь затрудняется тем, что его применение требует на каждом шаге (для определения  $\eta$ ) решения уравнения Пуассона, для чего необходимо знать функцию Грина для области. Однако, учитывая, что всегда без труда преобразованием переменных можно привести область к кругу (в пространстве — к шару), когда функция Грина элементарна, не изменяя при этом типа уравнения, нужно считать, что в ряде случаев и практическое использование метода осуществимо. Изложенный метод может послужить базой для некоторых вычислительных, графических и экспериментальных приемов решения. Метод может применяться и для других типов уравнений и графических задач.

**5. Функциональные уравнения в пространстве Гильберта.** Пусть  $H$  — самосопряженный, положительно определенный оператор, заданный на линейном многообразии  $R_1$  пространства Гильберта  $R$ ,  $T$  — другой подобный оператор, переводящий  $R_1$  в  $R$  и допускающий в  $R$  обратный  $T^{-1}$ . Предполагается, что  $H$  ограничено относительно  $T$ , т. е.  $0 < \alpha(Tf, f) \leq (Hf, f) \leq \beta(Tf, f)$ . Рассмотрим уравнение

$$Hf - \varphi = 0, \quad (23)$$

причем ищется его решение  $f \in R_1$ . Элемент  $f$ , являющийся решением уравнения, дает минимум квадратичному функционалу

$$I(f) = (Hf, f) - 2(f, \varphi). \quad (24)$$

Примем  $f_0 \in R_1$  за начальное значение для  $f$ , и пусть  $g \in R_1$ . Тогда

$$I(f_0 + \varepsilon g) = I(f_0) + 2\varepsilon(Hf_0 - \varphi, g) + \varepsilon^2(Hg, g).$$

Второе слагаемое при условии  $(Tg, g) = \text{const}$  достигает максимума, если  $Hf_0 - \varphi$  пропорционально  $Tg$ , иначе говоря, если  $g$  пропорционально  $g_1 = T^{-1}(Hf_0 - \varphi)$ .

Далее,  $I$  будет минимально, если принять после этого  $\varepsilon$  равным

$$\varepsilon_1 = -(Hf_0 - \varphi, g_1) : (Hg_1, g_1) = -(Tg_1, g_1) : (Hg_1, g_1).$$

Положим  $f_1 = f_0 + \varepsilon_1$ . Тогда последовательно находим, что

$$\begin{aligned} [I(f_1) - I(f_0)] : [I(f_0) - I(\bar{f})] &= \frac{(Tg_1, g_1)^2}{(Hg_1, g_1)(1/\alpha)(Hf_0 - \bar{f}, f_0 - \bar{f})} = \\ &= \frac{(Tg_1, g_1)^2(Hf_0 - H\bar{f}, f_0 - \bar{f})}{(Hg_1, g_1)(Tg_1, f_0 - \bar{f})^2} \geq \frac{(Tg_1, g_1)^2(Hf_0 - H\bar{f}, f_0 - \bar{f})}{(Hg_1, g_1)(Tg_1, g_1) : (Tf_0 - T\bar{f}, f_0 - \bar{f})} \geq \\ &\geq \frac{(Tg_1, g_1)^2(Hf_0 - H\bar{f}, f_0 - \bar{f})}{(Hg_1, g_1)(1/\alpha)(Hf_0 - H\bar{f}, f_0 - \bar{f})} \geq \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что числа  $I(f_n)$  сходятся к  $I(\bar{f})$  со скоростью геометрической прогрессии, откуда можно заключить также, что  $f_n \rightarrow \bar{f}$  в смысле  $\|g\| = (Tg, g)$ .

В заключение отметим, что принципиально возможно применение метода и в случае не квадратичных функционалов, например, при решении систем нелинейных алгебраических уравнений. Существенное осложнение будет в том, что точное значение  $\varepsilon$  с такой простотой не получится. Его придется находить приближенно.

Упомянем, наконец, что хотя изложение данного метода принято независимое, но он связан с общими концепциями автора, относящимися к трактовке экстремальных проблем, которые частично развиты в заметке <sup>(2)</sup>.

#### ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1933.

<sup>2</sup> Л. В. Канторович, ДАН, XXVIII, № 3 (1940).

## Функциональный анализ и прикладная математика<sup>\*)</sup>

Данная статья посвящена обзору некоторых результатов исследований по функциональному анализу, полученных в основном за последние годы в Ленинградском университете, в связи с возможностями их использования в прикладной математике.

Классики математики Ньютон, Эйлер, Гаусс, наряду с теоретическими проблемами этой науки, систематически занимались и приложениями ее и в связи с этим разработкой эффективных, в частности, приближенных методов решения математических задач.

Такой интерес к прикладным вопросам наблюдается и в традициях великих русских математиков. Упомянем, что Н. И. Лобачевский является не только создателем геометрии Лобачевского, но и автором одного из весьма распространенных и эффективных методов численного решения алгебраических уравнений, так называемого метода Лобачевского — Грэффе.

В наибольшей мере сказанное относится к творчеству создателя петербургской математической школы П. Л. Чебышева. Ему, например, наряду с установлением закона распределения простых чисел, имеющего очень большое, но чисто теоретическое значение, принадлежат замечательные практические формулы интерполирования и механических квадратур.

Особенно яркий пример синтеза теории и практики в работах П. Л. Чебышева представляет созданная им теория полиномов, наименее уклоняющихся от нуля и, вообще, наилучшего приближения. Эта теория возникла в связи с задачами проектирования некоторых механизмов и в то же время явилась источником важной новой математической дисциплины — конструктивной теории функций.

Эти традиции единства теории и практики живы в ряде советских математических школ.

В частности, на кафедре математического анализа Ленинградского университета, возглавляемой проф. Г. М. Фихтенгольцем, двумя основными направлениями, в которых велась наиболее интенсивная работа за последние 15 лет, были абстрактный функциональный анализ, с одной стороны, и приближенные методы анализа, непосредственно связанные с приложениями, — с другой.

Следует отметить, однако, что до недавнего времени эти две области исследований не были в наших работах связаны между собой, и даже сама мысль о возможности такого контакта не возникала.

Известно, что функциональный анализ является триумфом современной математики — одной из наиболее абстрактных и в то же время многообещающих и

---

<sup>\*)</sup>Опубликовано в Вестн. Ленингр. ун-та. — 1948. № 6. — С. 3–18. На основе докладов, сделанных на 4-й научной сессии ЛГУ 4 ноября 1947 г. и на Отделении физ.-мат. наук АН СССР в декабре 1947 г.

центральных областей ее. Основанием для такого суждения являются не только стройность, богатство содержания и глубина ряда построений функционального анализа, но и те блестящие приложения, которые он нашел во многих проблемах классического анализа.

Особенно большое применение функциональный анализ получил в таких важных проблемах анализа, как теория моментов, общая теория аппроксимаций, теория рядов и интегралов Фурье, бесконечные системы алгебраических уравнений и интегральные уравнения, теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений и анализ свойств их решения, некоторые проблемы вариационного исчисления.

Многие важные результаты здесь получили советские математики: С. Л. Соболев, А. И. Плеснер, Л. А. Люстерник, М. Г. Крейн, И. М. Гельфанд и др.

Во всех указанных случаях применение функционального анализа позволяет, как правило, систематизировать и объединить прежние результаты и при этом обычно сильно упростить их получение. Так, например, прежде чрезвычайно сложные теоремы из теории моментов Гамбургера и Стилтъяса при использовании идей и новых результатов функционального анализа получаются чуть ли не в нескольких строках<sup>1)</sup>.

В то же время функциональный анализ позволяет обычно значительно расширить и углубить постановку проблем и добиться существенного продвижения в них, т. е. наряду с систематизирующей и в известной степени уничтожающей, «обесценивающей» прежней работой, без которой, однако, математика не могла бы двигаться вперед, он одновременно осуществляет и большую созидательную работу.

В этом смысле роль функционального анализа по отношению к задачам классического анализа может быть сопоставлена в известной степени с той ролью, которую в свое время сыграли методы аналитической геометрии и дифференциального и интегрального исчисления по отношению к задачам геометрии кривых.

Вместе с тем функциональный анализ наряду с топологией, теорией множеств и т. д. считался одной из наиболее абстрактных и удаленных от приложения областей современной математики. Те применения к математическому анализу, о которых шла речь выше, относятся к теоретическим вопросам, так что говорить о связи этой дисциплины с практикой можно было лишь в весьма условной и отдаленной перспективе, через ряд посредствующих дисциплин.

Напротив, приближенные методы анализа — одна из составных частей прикладной математики, которая непосредственно и чрезвычайно широко используется в технике и физике и даже создана в значительной степени в связи с задачами этих дисциплин и их деятелями.

Поэтому эти две области работы, хотя, как уже говорилось об этом, развивались у нас в университете в пределах одной и той же кафедры и даже отчасти персонально одними и теми же лицами, но рассматривались как две полярные противоположности — как небо и земля.

---

<sup>1)</sup>Имеется в виду работа Л. В. Канторовича «К проблеме моментов для конечного интервала» (Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 14, № 9. — С. 531–536). (Прим. ред.)



Тем неожиданнее даже для нас самих был тот выявившийся в результате работы последних лет факт, что методы и идеи функционального анализа могут быть с успехом и многообразно использованы в развитии приближенных методов анализа и в некоторых других вопросах прикладной математики и что, следовательно, функциональный анализ получает непосредственные практические приложения.

Следует, однако, отметить два вопроса, где уже известные факты функционального анализа позволяют получить ценные применения в прикладном анализе, хотя последние не были явно сформулированы.

Я имею в виду именно применения следующих теорем теории линейных операций Банаха [1, 2].

Как известно, эта теория строится для так называемых линейных нормированных пространств, или пространств Банаха [(B)-пространства]. Последние представляют абстрактное векториальное множество, т. е. аддитивную группу с оператором умножения на вещественное число, в котором определена длина вектора — норма  $\|x\|$ , обладающая обычными свойствами длины. Наличие нормы определяет в нем и понятие сходимости:

$$x_n \rightarrow x, \quad \text{если } \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

Например, таким является пространство  $C$ -непрерывных функций; здесь

$$\|x\|_C = \max_{0 < t < 1} |x(t)|,$$

или пространство Гильберта суммируемых с квадратом функций  $L_2$ , где

$$\|x\|_{L_2} = \left[ \int_0^1 x^2(t) dt \right]^{1/2}.$$

Линейной операцией называется аддитивная и непрерывная операция, переводящая одно такое пространство в другое. Или, что эквивалентно этому, — аддитивная операция, обладающая свойством:

$$\|U(x)\| \leq C \|x\|.$$

При этом наименьшая возможная здесь постоянная  $C$  называется *нормой операции*  $U$ :

$$\|U(x)\| \leq C_{\min} \|x\|.$$

Примером линейной операции, переводящей пространство  $C$  или  $L_2$  в себя, может служить интегральная операция:

$$y = U(x); \quad y(s) = \int_0^1 K(s, t)x(t) dt.$$

Известна теорема С. Банаха о сходимости последовательности линейных операций. Именно, что необходимым и достаточным условием для сходимости последовательности  $U_n(x)$  при всех  $x$  является совокупная ограниченность норм этих операций и наличие сходимости на плотном множестве  $D$ :

- 1)  $\|U_n\| \leq M$ ;
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x)$  существует при  $x \in D$ .

Из этой теоремы могут быть получены условия сходимости различных аппроксимативных процессов, например, интерполяционных полиномов, сингулярных интегралов. В качестве примера укажем на теорему о сходимости формул механических квадратур. Пусть мы имеем формулы вида

$$\int_0^1 p(t)x(t) dt \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) = f_n(x),$$

точные для полиномов степени  $\leq n$ . Тогда необходимым и достаточным условием сходимости этих формул для всех непрерывных функций будет ограниченность норм функционалов  $f_n$ , что для данного случая дает

$$\|f_n\| = \sum_k A_k^{(n)} \leq M.$$

Этот факт (далеко не тривиальный) сразу следует из теоремы Банаха, так как сходимость на плотном множестве (на полиномах) нам дана.

В качестве другого примера укажем на применения легко доказываемой в абстрактной форме теоремы о том, что уравнение

$$x - U(x) = b$$

имеет единственное ограниченное решение, получаемое процессом последовательных приближений

$$x_{n+1} = U(x_n) + b,$$

если норма операций  $U$  меньше 1:

$$\|U_n\| < 1.$$

Из этой теоремы получаются непосредственно необходимые и достаточные условия сходимости итерационного процесса для конечных алгебраических систем

$$x_i - \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

весьма часто используемого в практических приложениях для бесконечных систем и для интегральных уравнений, а также определяется быстрота сходимости этого процесса. Получаемые таким образом предложения покрывают результаты многих работ, опубликованных по данному вопросу<sup>2)</sup>.

Уже из этих двух примеров ясно, что при всяком применении теорем функционального анализа в конкретных вопросах нужно знать аналитическое представление линейной операции или функционала, а также уметь вычислять его норму.

Поэтому не лишен и практического значения, хотя и не был предпринят специально с этой целью, ряд работ ленинградских математиков: Г. М. Фихтенгольца [3],

<sup>2)</sup>Вероятно, речь идет о работе [7]. (Прим. ред.)

автора [4], Б. З. Вулиха [5] и др. (1934–1937 гг.), посвященных проблеме аналитического представления линейных функционалов для неисследованных еще случаев и в особенности представлению линейных операций. Для конкретных пространств такое представление получается обычно в форме интегрального, матричного или более сложного преобразования, подчиненного тем или иным условиям.

Приведем один пример применения такого представления. Б. З. Вулихом и мною было показано<sup>3)</sup>, что операция из пространства  $L$  суммируемых функций в  $L$ , вообще говоря, не допускает интегрального представления, но в случае, когда это так, норма вычисляется следующим образом:

$$\|U\| = \sup_t^* \int_0^1 |K(s, t)| ds,$$

$\sup^*$  означает, что верхняя граница берется с пренебрежением множества значений  $t$  меры нуль.

Отсюда следует, что для сходимости последовательности сингулярных интегралов

$$y(s) = \int_0^1 K_n(s, t)x(t) dt$$

к  $x(s)$  в среднем в  $L$ , кроме обычных условий в теории сингулярных интегралов, необходимым и достаточным является следующее:

$$\int_0^1 |K_n(s, t)| ds < M \quad \text{почти везде.}$$

Достаточность его была ранее доказана И. П. Натансоном и Б. Орlichem.

Так как теория сингулярных интегралов охватывает такие важные способы аппроксимации, как ряды Фурье, интеграл Пуассона, Стильтеса — Ландау и другие, то ясно, что подобная теорема может иметь и чисто практическое значение.

Я лишь частично, главным образом в интересующем нас аспекте, остановлюсь на большой области работы ленинградской школы функционального анализа, а именно на теории линейных полуупорядоченных пространств и операций в них.

При конкретных рассмотрениях важных для анализа линейных пространств функций, последовательностей существенную роль играют понятия положительности, неравенства, положительной операции. Между тем эти понятия и связанные с ними факты не находят никакого отражения в теории нормированных пространств Банаха.

Поэтому представилось естественным и важным изучение линейных множеств, в которых выделены положительные элементы, или, что то же самое, для некоторых пар элементов определено понятие неравенства с обычными его свойствами.

<sup>3)</sup>Подразумеваются результаты, опубликованные в их совместной работе «Sur la représentation des opérations linéaires» (Compositio Math. — 1937. — Vol. 5, Fasc. 1. — P. 119–165). (Прим. ред.)

Если в таком множестве еще выполнено условие, что каждое ограниченное сверху множество  $E$  имеет точную верхнюю границу  $\sup E$ , то такое множество было названо мною линейным полуупорядоченным пространством.

В таких пространствах само собой вводится понятие абсолютной величины, а также понятие сходимости. И при этих определениях такое множество во многом по своим свойствам близко к множеству вещественных чисел, хотя и охватывает довольно разнообразные классы объектов — векторы, последовательности, измеримые функции, функции ограниченной вариации.

Вслед за изучением основных свойств таких пространств, чему был посвящен ряд работ как у нас, так и за границей, за последние годы было предпринято глубокое исследование структуры таких пространств и вопроса о возможности их реализации системами конкретных объектов. Я имею в виду исследования А. Г. Пинскера, Б. З. Вулиха, А. И. Юдина, М. Г. Крейна, а также Г. Биркхофа, Ш. Какутани и др.

Также была развита в подобных пространствах теория линейных операций, которая имеет ряд существенных особенностей по сравнению с теорией операций в банаховых пространствах и содержит ряд новых фактов [6]. Например, очень важную роль в этой теории играет понятие положительной операции, которое в банаховой теории, естественно, отсутствует. С этим связан ряд новых применений этой теории, в том числе и в самом функциональном анализе.

В частности, отмечу вопрос о продолжении линейных операций, в котором за последнее время интересные результаты получены в диссертации Г. П. Акилова, недавно закончившего аспирантуру Ленинградского университета.

Я хочу несколько подробнее остановиться на приложении теории полуупорядоченных пространств к теории функциональных уравнений, что также относится к 1936–1937 гг. [7].

Как известно, первый общий метод доказательства существования решения дифференциальных уравнений есть классический метод мажорант Коши, применявшийся впоследствии и к другим видам уравнений, например, к бесконечным системам. Теория полуупорядоченных пространств позволяет дать общую трактовку метода мажорант, объединить многие прежние результаты и получить ряд новых теорем — о бесконечных системах уравнений, о системах интегральных уравнений, о нелинейных интегральных уравнениях.

Прежде всего замечу, что здесь оказывается удобным рассмотрение пространств, нормированных элементами некоторого полуупорядоченного пространства  $Z$ . Такую норму будем обозначать через  $|x|$ .

Этот общий класс пространств охватывает и пространства Банаха (тогда  $Z$  — вещественная прямая) и полуупорядоченные пространства (в этом случае  $Z$  совпадает с  $X$ ).

Итак, рассматривается наряду с данным уравнением в пространстве  $X$  мажорантное уравнение в пространстве норм  $Z$  и оказывается, что сведения о втором позволяют делать заключение о первом.

Я ограничусь записью этих уравнений для линейного случая. Тогда они имеют вид

$$x = U(x) + x_0, \quad z = v(z) + z_0,$$

причем условие мажорантности состоит в том, что

$$|U(x)| \leq V(|x|); \quad |x_0| \leq z_0.$$

Тогда наличие положительного решения у мажорантного — второго — уравнения позволяет заключить о наличии решения у данного. Для случая, когда  $z$  — вещественная прямая, второе уравнение принимает вид

$$z = \|U\| \cdot z + z_0,$$

где  $z$  — число, и имеет положительное решение, если  $\|U\| < 1$ , т. е. этот частный случай совпадает с упоминавшейся выше теоремой Банаха.

Однако абстрактная норма позволяет гораздо тоньше оценить элемент и операцию, чем одно число — числовая норма, и благодаря этому получить более точные (и широкие) границы применимости метода последовательных приближений.

Так, в качестве нормы непрерывной функции можно взять не границу ее во всем интервале, а совокупность ее границ в нескольких частичных интервалах (рис. 1). Это позволяет уточнить оценку границы сходимости метода последовательных приближений для интегральных уравнений.

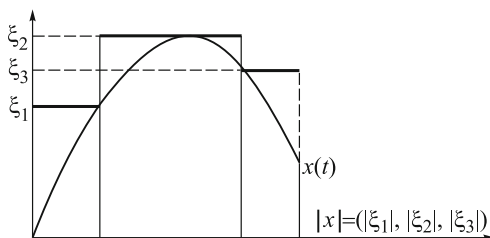


Рис. 1

В случае бесконечной системы уравнений неизвестным является последовательность, и в качестве ее нормы можно принять не одно число, а конечную систему, например, модули первых элементов и оценку остатка:

$$|(\zeta_1, \zeta_2, \dots)| = (|\zeta_1|, |\zeta_2|, \dots, |\zeta_{n-1}|, \sup_{k>n} |\zeta_k|) \in R_n.$$

Это позволяет уточнить условия применимости метода итераций для бесконечных систем.

Одновременно этот подход позволяет получить и приближенные решения указанных задач, при этом приближенные решения с избытком или с недостатком, с одновременной оценкой погрешности. Я полагаю, что и в ряде других случаев применение вместо вещественных чисел элементов линейных полуупорядоченных пространств в оценках может привести к существенному уточнению последних.

Был поставлен также вопрос об использовании общей теории функциональных уравнений для оценки погрешности при применении приближенных методов решения. Именно, рассматривался метод такого типа, что уравнение

$$U(x) = y$$

заменяется на уравнение

$$V(x) = y,$$

и тогда, если операторы  $U$  и  $V$  близки и свойства второго, приближенного уравнения известны, можно заключить о наличии решения у данного уравнения и о близости решений обоих уравнений — приближенного и точного.

Отсюда были получены некоторые прежде известные и новые оценки погрешности при применении приближенных методов<sup>4)</sup>.

Необходимо сказать, однако, что такой схемой охватываются лишь некоторые приближенные методы, например приближенное решение интегральных уравнений с помощью замены ядра на вырожденное, приближенное решение бесконечной системы редукцией к конечной. В то же время ряд других важных методов под эту схему не подходит.

Этот недостаток был преодолен в недавней работе<sup>5)</sup>, доложенной мною на последней научной сессии Ленинградского университета в 1947 г.

Основная идея ее состоит в том, что наряду с данным уравнением

$$U(x) = y, \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (1)$$

рассматривается приближенное уравнение:

$$V(\bar{x}) = \bar{y}, \quad (2)$$

где  $x$  и  $y$  — элементы другой пары пространств:

$$\bar{x} \in \bar{X}, \quad \bar{y} \in \bar{Y}.$$

При этом предполагается, что имеются линейные отображения  $\bar{x} = \psi x$ ,  $\bar{y} = \psi y$ , сопоставляющие элементам пространств  $X$  и  $Y$  элементы пространств  $\bar{X}$  и  $\bar{Y}$ .

Характерный пример такой ситуации дает наиболее употребительный метод приближенного решения интегрального уравнения, состоящий в замене его, в результате применения формулы механических квадратур и придания аргументу частных значений, системой линейных алгебраических уравнений:

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)x(t) dt = y(t),$$

$$x(s_i) - \lambda \sum_k A_k K(s_i, t_k)x(t_k) = b(s_i, t_k) \quad (s_i = t_i).$$

Иначе говоря, уравнение в функциональном пространстве заменено приближенно уравнением в конечномерном. При этом в данном случае можно принять  $X = Y = C$  (пространство непрерывных функций), а  $\bar{X} = \bar{Y} = R^{(n)}$  — евклидово пространство. Образом функции  $x(t)$  будет совокупность ее значений в  $n$  точках:

$$\varphi x = (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_k)).$$

<sup>4)</sup> Речь идет о работе «The method of successive approximations for functional equations» (Acta Math. Stockh. — 1939. — Vol. 71, N 1–2. — P. 63–97). (Прим. ред.)

<sup>5)</sup> Основные результаты содержатся в заметке [8]. (Прим. ред.)

И в этом случае, при наложении определенных условий на пару операторов  $U$  и  $V$ , можно гарантировать близость  $x$  к приближенному решению  $\bar{x}$ , построенному определенным образом по значению  $\bar{x}$ , найденному из уравнения (2). Точнее говоря, могут быть получены теоремы двух родов:

1. Теоремы, позволяющие на основании наличия решения данного уравнения заключить о разрешимости приближенного уравнения и о близости найденного на основании его приближенного решения к истинному, а таким образом, и о сходимости приближенных решений к точным, если рассматривается целая последовательность приближенных уравнений.

2. Теоремы, позволяющие на основании данных, полученных при решении приближенного уравнения, заключить о существовании решения данного уравнения и о близости его к полученному приближенному решению.

Такая схема охватывает уже все основные приближенные прямые методы анализа — вариационные, разностные и ряд других. Поэтому указанные общие теоремы могут служить источником целого ряда теорем об оценке погрешности и сходимости различных ранее применявшихся приближенных процессов. Они также позволяют выдвинуть и обосновать новые методы.

В частности, отсюда получается ряд прежних результатов, например, некоторые предложения об оценке погрешности и сходимости метода Рунге, покрывающие и уточняющие ряд теорем Н. М. Крылова по тому же вопросу, результат М. В. Келдыша о сходимости метода Галеркина для обыкновенных уравнений, а также новые результаты, относящиеся к приближенному решению интегральных уравнений и бесконечных систем.

Главное же — применение функционального анализа дает возможность от разрозненного изучения отдельных методов для различных типов уравнений перейти к единой общей теории приближенных методов анализа.

Мы рассматривали только что вопрос о линейных уравнениях. Теория нелинейных уравнений связана с теорией нелинейных операций, которая пока еще разработана не так полно, как теория линейных операций, однако все же содержит много фактов.

В частности, для нас будет играть роль дифференцирование нелинейных операций.

Согласно Фреше, нелинейная операция  $P(x)$ , переводящая одно  $(B)$ -пространство в другое, называется дифференцируемой, если ее приращение, с точностью до малых высшего порядка, линейно зависит от приращения аргумента, иначе говоря, существует такая линейная операция  $U$ , что она дает приращение  $P$  с точностью до бесконечно малых высшего порядка, именно:

$$\|\Delta Px - U\Delta x\| = \|[P(x + \Delta x) - P(x)] - U\Delta x\| = o(\|\Delta x\|).$$

В этом случае пишут

$$dP(x) = U\Delta x \quad \text{или} \quad P'(x) = U.$$

При этом значение производной принадлежит пространству линейных операций, переводящих  $X$  в  $Y$ :

$$P'(x) = U \in (X \rightarrow Y).$$

Таким же образом вторая производная  $P''(x)$  определяется как производная от  $P'(x)$ . Ее значения принадлежат пространству

$$P''(x) = [P'(x)]'; \quad P''(x) \in X \rightarrow (X \rightarrow Y).$$

Иначе,  $P''(x)$  можно рассматривать как билинейную операцию.

Именно в связи с этим фактом М. К. Гавуриным в его диссертации 1940 г. были введены и подвергнуты изучению  $k$ -линейные операции, зависящие линейно от  $k$  аргументов, и эта теория была приложена им к вопросам дифференциального и интегрального исчисления для нелинейных операций.

Дифференцирование нелинейных операций находит применение в следующем вопросе: пользуясь им, оказывается возможным построить для функциональных уравнений аналог метода Ньютона.

Метод Ньютона для нахождения корней алгебраического уравнения является одним из наиболее эффективных, благодаря чрезвычайно быстрой сходимости. Ему посвящено большое число работ, в частности, метод разработан для определения комплексных корней, а также для приближенного решения систем алгебраических уравнений.

Его сходимость для вещественных уравнений была исследована в нескольких мемуарах Коши, а в последнее время — для этого, а также для других случаев — в ряде работ А. Островского.

В методе Ньютона предполагается известным начальное значение  $x_0$ ; тогда следующее приближение определяется формулой

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)} f(x_0), \quad (3)$$

аналогичным образом определяются и дальнейшие приближения.

Применение тех соображений, с помощью которых выводится обычно эта формула, позволяет дать аналог метода Ньютона для общего функционального уравнения [9]

$$P(x) = 0.$$

Для него последовательные приближения должны определяться равенством

$$x_1 = x_0 - [P'(x_0)]^{-1} P(x_0),$$

где  $[P'(x_0)]^{-1}$  обозначает линейную операцию, обратную  $P'(x_0)$ .

Сходимость этого метода имеет место в случае, когда начальное значение  $x_0$  приближенно удовлетворяет уравнению. Точнее, может быть высказана следующая

**Теорема.** Если  $P(x)$  дважды дифференцируем и для некоторого значения  $x_0$ :

- 1) оператор  $P'(x_0)$  имеет обратный оператор  $\Gamma_0$  и известна оценка его нормы:  $\|\Gamma_0\| = \|[P'(x_0)]^{-1}\| \leq B$ ,
- 2)  $\|\Gamma_0 P(x_0)\| \leq \eta$ , т. е.  $x_0$  приближенно удовлетворяет уравнению,
- 3)  $\|P''(x)\| \leq K$ ,
- 4)  $h = B\eta K \leq 1/2$ ,



то уравнение  $P(x) = 0$  имеет решение  $x^*$ , которое может быть найдено методом Ньютона и лежит в области

$$\|x^* - x_0\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta.$$

Быстрота сходимости определяется неравенством

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{(2h)^{2^{n-1}}}{2^{n-1}} \eta$$

и решение единственно в более широкой области

$$\|x - x_0\| \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta.$$

Этот результат улучшению не подлежит, так как оценки достигаются для вещественного квадратного уравнения

$$\frac{1}{2}x^2 - x + h = 0.$$

Для случая вещественных уравнений аналогичная теорема, за исключением единственности, была получена А. Островским. Изложенная теорема включает также результаты его и некоторых других авторов относительно комплексных корней и систем алгебраических уравнений.

Но эта же теорема дает эффективный метод решения и для ряда других типов функциональных уравнений, например для нелинейных интегральных уравнений.

Для этого случая ранее метод Ньютона был применен по моему предложению Д. М. Загадским в его диссертации, защищенной в 1947 г. [10]. При этом ему удалось установить аналогичную теорему при более грубых условиях:  $h < 0, 1$ , что я склонен объяснить тем, что в абстрактной форме исследование вопроса легче — все оказывается более простым и отчетливым.

Метод Ньютона можно применять и к задаче о нахождении собственных значений и собственных векторов оператора, так как последнюю можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} y = Ax - \lambda x = 0 \\ t = \|x\|^2 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} (y, t) = P[(x, \lambda)] = 0,$$

т. е. в форме одного нелинейного уравнения.

Отметим, наконец, что данная теорема представляет довольно общего характера теорему существования и единственности для функциональных уравнений. При этом в ней существенным является требование наличия грубо приближенного решения задачи. После того как такое приближение найдено, посредством вычисления или, как это часто бывает в механике, посредством рассмотрения задачи в упрощенных предположениях, с помощью теоремы оно может быть использовано для доказательства существования решения, установления границ, в которых оно лежит, области единственности.

Таким образом, приближенное решение может прийти на помощь теоретическому исследованию!

Для применения метода Ньютона, как указывалось, необходимо иметь первое приближение. Для его нахождения может быть использован так называемый метод наискорейшего спуска.

Решение всякого уравнения может быть заменено некоторой экстремальной задачей, например о  $\min \|P(x)\|^2$ . Необходимость решения экстремальных задач возникает часто и сама по себе.

Для решения задач об экстремуме может быть использован следующий метод, о котором я докладывал на научной сессии Ленинградского университета в 1944 г. [11, 12].

Если требуется найти минимум нелинейного функционала  $F(x)$ , то начинаем с любого значения  $x_0$ . Находим направление градиента, т. е. такое направление, что производная по нему

$$\left[ \frac{d}{dt} F(x_0 + tz) \right] \Big|_{t=0}$$

для  $z = z_0$  будет наибольшей. Далее двигаемся по этому направлению до тех пор, пока функционал уменьшается, т. е. полагаем

$$x_1 = x_0 + \varepsilon_0 z_0,$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_0$  определено из условия

$$\min_{\varepsilon} F(x_0 + \varepsilon z_0).$$

Если построить линии уровня функционала  $F$ , последовательные приближения изобразятся геометрически, как указано на рис. 2.

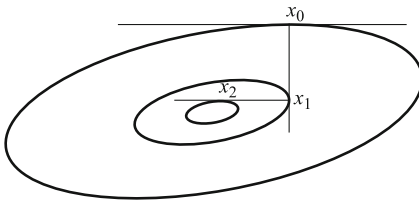


Рис. 2

Идея этого метода «наискорейшего спуска» была выдвинута еще Коши для случая функции нескольких переменных. Мной он был разработан для общих функционалов и в применении к решению функциональных уравнений. В частности, задача решения линейного уравнения в пространстве Гильберта

$$Lx = Ax - \varphi = 0,$$

где  $A$  — самосопряженный оператор, равносильна задаче об экстремуме функционала

$$H(x) = (Ax, x) - 2(\varphi, x).$$

Исходя отсюда, можно убедиться, что последовательные приближения согласно данному методу определяются формулами

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(z_n, z_n)}{(Az_n, z_n)}; \quad z_n = Lx_n = Ax_n - \varphi.$$

Можно доказать, что, если спектр оператора  $A$  лежит в конечном промежутке  $(m, M)$

$$0 < m(x, x) \leq (Ax, x) \leq M(x, x),$$

то последовательные приближения сходятся с быстротой геометрической прогрессии со знаменателем

$$\frac{M - m}{M + m}.$$

Это устанавливается с помощью использования спектрального разложения оператора  $A$ . Так же могут быть построены в общей форме последовательные приближения для задачи о собственных значениях, так как последняя сводится к вопросу об экстремуме функционала

$$Lx = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Такое общее рассмотрение показывает, что указанный процесс может быть применен к весьма широкому классу задач, в частности, к решению систем линейных алгебраических уравнений, нахождению собственных чисел и векторов матриц, решению линейных дифференциальных и интегральных уравнений и граничных проблем и нахождению собственных чисел и функций для них. При этом одновременно мы получаем условия сходимости метода для всех указанных задач и оценку быстроты ее. Таким образом, в результате получается новый общий процесс последовательных приближений для решения разнообразных задач анализа. Существенное отличие его от известных методов Пикара и Неймана в том, что он обладает более широкой областью сходимости, в ряде случаев совпадающей с областью существования решения.

Мы сейчас говорили о задачах разыскания обыкновенных — правильных — экстремумов от дифференцируемого функционала внутри области.

Между тем многие математические и практические задачи приводят к необходимости разыскания «особых» экстремумов. Это, с одной стороны, краевые экстремумы, когда экстремум достигается на границе области изменения аргумента. С другой стороны — это случай, когда функционал недифференцируем. Большое число такого рода вопросов встречается в самой математике и в ее приложениях, и общие методы оказываются здесь неэффективными.

Для решения подобного рода задач во многих случаях может быть успешно применен следующий метод [13].

Можно доказать для широкого класса случаев, что задача разыскания экстремума любого функционала  $\Phi$  в известном смысле может быть сведена к задаче об экстремуме линейного функционала, т. е. существует линейный функционал, достигающий экстремума одновременно данным — в том же пункте  $x_0$  (на рис. 3 это изображено для случая краевого экстремума в промежутке).

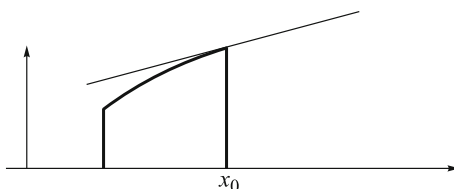


Рис. 3

Задача разыскания точки экстремума  $x_f$  для линейного функционала  $f(x)$  обычно не представляет затруднений.

Таким образом, задача разыскания точки  $x_0$ , где функционал  $\Phi$  достигает экстремума, может быть заменена задачей разыскания линейного функционала  $f$ , достигающего экстремума одновременно с данным функционалом, т. е. такого функционала  $f$ , что в точке его экстремальности функционал  $\Phi$  наибольший.

Эта задача может решаться, например, посредством последовательных приближений. Задавшись некоторым функционалом  $f_0$ , ищем точку, где он экстремален, и определяем значение функционала  $\Phi$  в ней. Если  $\Phi$  окажется не максимальным, то видоизменяем  $f$  с тем, чтобы значение  $\Phi$  возросло.

Примером математической задачи такого рода может служить задача о наилучшем решении системы несовместных уравнений

$$z_1 = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k - b_i \right)^2 = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad m > n.$$

Другой пример такого рода представляет задача Чебышева о нахождении полинома наилучшей аппроксимации. Следует сказать, однако, что наибольшие применения этот метод имеет в цикле производственных задач, в связи с одной из которых он и был предложен [14].

Речь шла именно о нахождении распределения нескольких номенклатур материала по станкам, обеспечивающего максимальную производительность. Математически вопрос приводится к экстремальной задаче именно указанного выше вида. Его решение обычным способом было неосуществимо, так как требовало решения более чем миллиарда систем уравнений. Анализ его с помощью применения метода приведения к линейному функционалу потребовал недельного расчета, как это изложено было в моей брошюре [14]. Впрочем, дальнейшее усовершенствование методики расчета позволяет такую задачу решить за 1–2 часа.

Тот же метод применим и к другим практически важным задачам подобного характера. Например, при возможности варьирования производственной программы такой является задача о подборе ее, обеспечивающем равномерную загрузку оборудования и максимальный выпуск продукции.

Другой цикл практических задач, в которых может быть использован тот же метод, — это задачи о наилучшем раскрое.

В несколько другом аспекте задачи раскроя рассматривал, как известно, еще П. Л. Чебышев и делал даже доклад «О кройке одежды» во Французском обществе ремесленников.

Я имею в виду задачи наиболее экономного раскроя. В известной части эти задачи связаны с вопросами наиболее плотного распределения, рассматриваемыми в дискретной геометрии.

Следует сказать, что даже некоторые наиболее простые задачи такого рода не имеют исчерпывающего решения. Такова, например, задача о раскрое прямоугольника заданных размеров на прямоугольники некоторого другого размера, где мне лично удалось указать некоторые практические способы, не гарантирующие, однако, что полученное решение невозможно улучшить.

В более сложных случаях имеются фигуры нескольких размеров, подлежащие раскрою, и несколько видов потребных фигур, например в лесопилении несколько размеров бревен и ряд сортов досок.

В этом случае речь идет о нахождении системы раскроев, позволяющей из данного сырья получить максимальную продукцию заданного ассортимента.

Эта задача, несмотря на свою сложность, также может быть решена применением названного метода.

Остановлюсь, наконец, на следующей любопытной задаче.

На железнодорожной сети имеется ряд пунктов, в которых производится некоторый продукт в определенных количествах, и ряд пунктов, где он потребляется. Требуется составить план перевозок — прикрепить пункты потребления к пунктам производства так, чтобы суммарные затраты по перевозкам оказались наименьшими.

Задача эта хорошо известна железнодорожникам. М. К. Гавурин и я показали, что эта и более сложные задачи такого рода допускают исчерпывающее решение с помощью метода, основанного на той же идее.

В 1942 г. я дал рассмотрение данной проблемы в более общем виде [15].

Предположим, что в компактном метрическом пространстве имеются два распределения масс, заданные аддитивными функциями  $\Phi(e)$  и  $\Phi(e')$ . Перемещением масс назовем функцию  $\Psi(e, e')$ , показывающую количество массы, перемещенной из множества  $e$  в  $e'$ . Наконец, если известна работа  $r(x, y)$  по перемещению единичной массы из пункта  $x$  в  $y$ , то работа по осуществлению данного перемещения будет

$$W(\Psi) = \iint_{RR} r(x, y)\Psi(de, de').$$

Легко показать, что существует наиболее выгодное перемещение  $\Psi_0$ , для которого

$$W(\Psi_0) = \min_{\Psi} W(\Psi).$$

Далее может быть дана характеристика такого наиболее выгодного перемещения. Именно, оно характеризуется тем, что имеется функция  $U(x)$ , своеобразный потенциал такого рода, что

- 1) всегда  $|U(y) - U(x)| \leq r(x, y)$ ;
- 2) если происходит перемещение из  $x$  в  $y$  (точнее, из любой окрестности  $x$  в любую окрестность  $y$ ), то

$$U(y) - U(x) = r(x, y).$$

Эта теорема в известном смысле и решает задачу, так как если имеется некоторое перемещение, то, строя потенциал согласно правилам 1) и 2), можно проверить, является ли данное перемещение минимальным. Если окажется, что это не так, то обнаруживается, как можно уменьшить работу по перемещению и таким образом постепенно перейти к минимальному перемещению.

Рассмотренная выше задача о железнодорожных перевозках есть, очевидно, частный случай этой. В ней  $r(x, y)$  — расстояние по железнодорожной сети или затрата по перевозке из  $x$  в  $y$ .

Другой частный случай этой задачи представляет задача о транспортировке земли, рассматривавшаяся еще Монжем, о чем я, впрочем, узнал лишь недавно в связи с его юбилеем.

Именно, в мемуаре Монжа 1781 г., в связи с вопросом о наиболее рациональных путях перевозки земли из насыпи в выемку поставлена задача разбить два равновеликих объема на бесконечно малые частицы и сопоставить их между собой так, чтобы сумма произведений длины путей на объем частиц была наименьшей.

Очевидно, эта задача есть частный случай рассмотренной выше, когда расстояние евклидово и плотность массы равна 1.

В связи с этой задачей Монжем была создана геометрическая теория конгруенций. Что касается самой этой задачи, то им была высказана, но не доказана строго теорема о том, что пути перемещения масс не пересекаются и что они образуют семейство нормалей к некоторому семейству поверхностей.

Тем же вопросом занимался впоследствии Дюпен, но доказательство теоремы Монжа было дано лишь через 100 лет, в 1884 г. в 200-страничном мемуаре Аппеля. Доказательство Аппеля, хотя впоследствии несколько упрощенное им самим, все же довольно сложно. Оно относится только к случаю правильных объемов и базируется на использовании тонких теорем вариационного исчисления.

Между тем из упомянутой выше теоремы, доказываемой просто и обще, предложения Монжа следуют сразу.

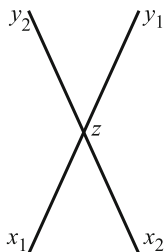


Рис. 4

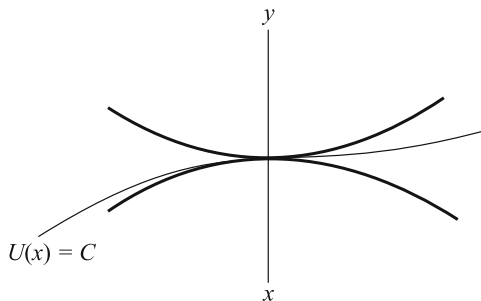


Рис. 5

Два пути не могут пересекаться, так как мы имели бы (рис. 4):

$$U(y_2) - U(x_1) = [U(y_2) - U(z)] + [U(z) - U(x_1)] = r(y_2, z) + r(z, x_1) > r(y_2, x_1)$$

вопреки правилу 2). Таким же образом ясно, что если мы возьмем поверхности уровня потенциала  $U(x) = C$ , то пути перемещения должны быть нормальны к ним. В самом деле, из условия 1) видно, что поверхность уровня должна пройти между сферами с центрами в точках  $x$  и  $y$ , проходящими через точку  $z$  пересечения пути  $xy$  с линией уровня. А тогда непременно путь является нормалью к линии уровня (рис. 5).

Отсюда могут быть получены и некоторые другие результаты, например, строго доказанная Сен-Жерменом теорема Монжа о характере очертаний насыпи, если ее форма заранее не определена.

Наконец, в этой связи возникают и новые математические вопросы, например, весьма интересно рассмотрение пространства распределений масс, если в качестве расстояния для них принять минимальную работу по перемещению масс.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Banach S.* Theorie des operations lineaires. — Warszawa, 1932.
2. *Люстерник Л. А.* Основные понятия функционального анализа // Успехи мат. наук. — 1936. — Вып. 1. — С. 77–140.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Об общей форме некоторых линейных функционалов и операций // Тр. 2-го Всесоюзн. мат. съезда. — 1934. — Т. 2. — С. 142.
4. *Канторович Л. В.* Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 3, № 3. — С. 101–106.
5. *Вулих Б. З.*  $K$ -нормированные пространства // Учен. зап. Пед. ин-та им. Герцена. — 1939. — Т. 28 — С. 11–14.
6. *Канторович Л. В.* Линейные операции в полуупорядоченных пространствах // Мат. сб. — 1937. — Т. 2. — С. 121–158.
7. *Канторович Л. В.* О функциональных уравнениях // Учен. зап. Ленингр. ун-та. — 1937. — Т. 3, № 7. — С. 24–50.
8. *Канторович Л. В.* К общей теории приближенных методов анализа // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 60, № 6. — С. 957–960.
9. *Канторович Л. В.* О методе Ньютона для функциональных уравнений // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 59, № 7. — С. 1237–1240.
10. *Загадский Д. М.* Аналог метода Ньютона для нелинейных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 59, № 6. — С. 1041–1044.
11. *Канторович Л. В.* Об одном методе решения задач о минимуме квадратичных функционалов // Докл. АН СССР. — 1945. — Т. 48, № 7. — С. 483–487.
12. *Канторович Л. В.* О методе наискорейшего спуска // Докл. АН СССР. — 1947. — Т. 56, № 3. — С. 233–236.
13. *Канторович Л. В.* Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // Докл. АН СССР. — 1940. — Т. 28, № 3. — С. 212–215.
14. *Канторович Л. В.* Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1939.
15. *Канторович Л. В.* О перемещении масс // Докл. АН СССР. — 1942. — Т. 37, № 7–8. — С. 227–229.

# Расчет рационального раскроя промышленных материалов<sup>\*)</sup>

*«...Мы должны достичь таких технико-экономических показателей использования оборудования, топлива, электроэнергии, сырья и материалов на единицу изделия, которые превышали бы по своему уровню задания пятилетнего плана и довоенные показатели...»*

Из письма работников промышленности, деятелей науки и техники города Ленинграда и Ленинградской области товарищу Сталину.

(«Ленинградская правда», 2 апреля 1949 г.)

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Большое практическое значение вопроса о рациональном раскрое промышленных материалов как важном источнике экономии затрат в производстве неоднократно отмечалось в технической литературе и периодической печати.

Однако с научной, теоретической стороны этот вопрос разработан чрезвычайно мало. Здесь можно назвать известную задачу о наиплотнейшем расположении кругов на плоскости, равносильную вопросу раскроя большого листа на круглые заготовки, а также некоторые другие задачи аналогичного характера из области дискретной геометрии, имеющие ограниченное практическое значение. Своеобразное и тонкое исследование, посвященное раскрою материала, принадлежит великому русскому математику П. Л. Чебышеву<sup>1)</sup>, однако в нем рассматривается не вопрос о наиболее экономном раскрое, что является предметом данной работы, а задача наиболее точного покрытия кривой поверхности плоскими выкройками из ткани.

Наконец, можно было бы назвать некоторые работы, связанные с обеспечением максимального выхода при раскрое, относящиеся специально к области лесопиления.

Постановка и некоторый общий подход к анализу вопроса о рациональном раскрое были даны в моей работе 1939 г.<sup>2)</sup>, где рассматриваются производственные вопросы различного характера, в которых требуется среди многих возможных вариантов решения выбрать наивыгоднейший. Использование развитого в этой работе общего метода разрешающих множителей в применении к вопросу о раскрое дает

---

<sup>\*)</sup>Совместно с В. А. Залгаллером. Выдержки из книги. Сохранена нумерация разделов, рисунков и таблиц. См. также второе исправленное и дополненное издание: Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Рациональный раскрой промышленных материалов. — Новосибирск: Наука, 1971. — 300 с.

<sup>1)</sup>Чебышев П. Л. О кройке платья // Успехи мат. наук. — 1946. — Т. 1, вып. 2. — С. 38–42. (Рукопись относится к 1878 г.)

<sup>2)</sup>Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1939.



характеристику наивыгоднейшего раскройного плана и устанавливает принципиальную возможность его нахождения. Специально вопрос раскроя был подвергнут дальнейшей разработке в нескольких других моих работах.

В 1948–1949 гг. в Ленинградском отделении Математического института АН СССР была поставлена задача более детальной разработки этих методов и их практической проверки на ленинградских предприятиях. Эта работа была проведена, под общим моим руководством, научным сотрудником института В. А. Залгаллером.

Основным местом осуществления этой работы был выбран Ленинградский орден Красной Звезды вагоностроительный завод им. Егорова, где при производстве цельнометаллических вагонов в большом количестве расходуется металл.

В осуществлении этих методов в производственных условиях активное участие принял ряд работников этого завода, в частности, сотрудники отдела главного технолога (руководитель отдела Г. А. Треубов), а также мастера и рабочие. Таким образом, эта книга является своеобразным итогом творческого содружества научных работников-математиков и работников промышленности.

Необходимо сказать, что хотя в процессе этой работы выяснилось, что метод разрешающих множителей (индексов) оказался весьма полезным при решении заводских задач, его пришлось подвергнуть развитию и приспособлению к производственным задачам и дополнить существенно новыми расчетными и техническими приемами. Из них следует отметить разработанные В. А. Залгаллером новые расчетные приемы: подбор целочисленных индексов, анализ задачи 2 (гл. I, § 2), решение плоской задачи с помощью вспомогательной линейной задачи, существенно разработанные им приемы раскроя материалов смешанных длин, в частности теория построения мерной линейки (см. приложение II), и предложенные им технические приспособления: использование сортировочного стеллажа, приспособление линейки к станку. Наконец, им отработана практическая методика использования всей совокупности приемов работы (последовательность расчета, выбор целесообразного метода, учет технологических требований, необходимые организационные мероприятия, документация и т. п.).

Помимо приемов, развитых в недавнее время при решении практических задач для завода им. Егорова и некоторых других предприятий, в книге использованы упоминавшиеся прежние материалы; наконец, отдельные вопросы были разработаны авторами в самом процессе написания книги.

Текст книги по плану, составленному обоими авторами, написан в основном В. А. Залгаллером. Мною проведена главным образом редакционная работа по ней.

Данная книга, объединяющая весь накопленный материал и опыт, имеет целью ознакомить инженерно-технических работников предприятий с предлагаемыми методами составления наиболее рациональных раскройных планов с тем, чтобы обеспечить возможность широкого распространения этих методов на предприятиях.

Книга предназначена в первую очередь для технологов групп материальных нормативов и заготовительных цехов машиностроительных предприятий.

*Проф. Л. В. Канторович*

## ВВЕДЕНИЕ

Экономия материалов представляет собою сложную комплексную проблему, зависящую от многих конструктивных, технологических и организационных факторов. Тщательный анализ каждого из них дает свои пути и средства для экономии материалов. Одним из таких средств является рациональный раскрой материалов.

В большинстве отраслей промышленности и строительства приходится встречаться с раскроем материала. Металл, дерево, фанера, стекло и другие промышленные материалы поступают на производство в виде некоторых целых единиц: доски, листы, трубы, полосы, профильный прокат, рулоны, бревна. При использовании этих единиц материала их приходится разделять (раскраивать) на части нужных размеров и формы, которые используются непосредственно или служат в качестве заготовок для отдельных деталей. При этом, как правило, оказывается невозможным полное использование материала, и некоторая часть его идет в отходы (концевые обрезки, остатки). Последние обычно либо не используются вовсе, либо используются неполноценно, поэтому настойчиво ставится задача максимального уменьшения отходов.

Актуальность вопроса об экономии материалов путем рационализации раскроя и большие возможности в этом направлении показывает широкий отклик, который получило начинание знатных работниц легкой промышленности Л. Корабельниковой и лауреата Сталинской премии О. Муштуковой по введению лицевых счетов экономии и выпуску сверхплановой продукции из сэкономленных материалов.

Опыт наших передовых машиностроительных заводов показывает, что внимательное отношение к планированию раскроя позволяет достигать значительной экономии материалов. В сборнике «Опыт Коломенского паровозостроительного завода в борьбе за экономию материалов» (Госнабиздат, 1949), отражающем первые успехи этого завода — одного из инициаторов социалистического соревнования за экономию на производстве, — среди больших успехов, достигнутых заводом в комплексном решении задач экономии материалов, видное место занимает применение рационального раскроя, позволившее, например, снизить на 1,6 т норму расхода листового металла на один паровоз, на 140 кг норму расхода дорогостоящих цельнотянутых труб и т. п.

Поэтому вопрос о научной разработке наиболее рациональных методов раскроя и создании обоснованных практических приемов решения возникающих при раскросе задач, представляется весьма важным и своевременным.

На количество образующихся в процессе раскроя отходов влияет ряд причин: технологические допуски на кромку, резы и перемычки между отдельными заготовками, сочетание конфигураций взаимно прилегающих заготовок, некратность размеров заготовки и размеров материала. Последний источник потерь оказывается особенно ощутительным при крупных заготовках.

Мерами борьбы за уменьшение потерь при раскросе являются: утилизация отходов, ужесточение технологических допусков, изменение заказываемых габаритов материала, конструктивный пересмотр размеров заготовок, применение совместных раскросов для различных заготовок.

Последняя из перечисленных мер очень существенна в решении задач рационального раскроя, но до сих пор она используется недостаточно.

Настоящая книга, далеко не претендующая на полное решение всех задач рационального раскроя материалов, посвящена в первую очередь детальному исследованию одного из вопросов раскроя — анализу возможностей экономии материала при раскрое за счет применения совместных раскroев различных заготовок при условии соблюдения необходимой для производства комплектности этих заготовок.

Для исследования этой задачи существенно использован метод разрешающих множителей (индексов), впервые предложенный в 1939 г.

Наглядный смысл этого метода в применении к данным задачам состоит в том, что одновременно с составлением плана раскроя выясняется, какая часть общего расхода материала вызывается наличием в комплекте каждой из требующихся заготовок. Именно, оказывается, что такой подетальный расход характеризуется вспомогательными числами — индексами заготовок, которые определяются совершенно конкретными условиями задачи: размерами материала и заготовок и соотношением количества различных заготовок в комплекте. Этот расход, размер которого очевиден, если каждая заготовка раскраивается самостоятельно, определяется далеко не так просто, когда используются совместные раскрои. Но для одновременного нахождения этих индексов и наивыгоднейшего плана раскроя может быть развит достаточно удобный расчетный метод.

На основе этого метода удается, прежде всего, дать общие признаки наиболее экономных планов раскроя, позволяющие проверить, является ли данный план наиболее экономным, а также указать пути нахождения таких планов для линейных материалов, раскраиваемых по длине, и листовых материалов, раскраиваемых на прямоугольные заготовки.

Результаты теоретического анализа использованы для построения конкретных приемов и рекомендаций определенного порядка работы при составлении планов раскроя.

Развиваемые методы могут найти непосредственное применение в первую очередь в практике крупногабаритного серийного машиностроения, где уже частично осуществляется планирование раскроя, выполняемое, однако, исключительно глазомерным образом. Кроме того, рекомендуемые методы могут быть использованы при решении отдельных задач раскроя, возникающих в самых разнообразных видах производства и строительства.

Все предлагаемые методы отрабатывались и уточнялись на конкретных задачах из практики Ленинградского ордена Красной Звезды вагоностроительного завода им. Егорова. Как правило, применение этих методов обнаруживало возможность значительной экономии и позволяло повысить использование материала при раскрое (так называемый «коэффициент раскроя») на 2–5% для линейных материалов и на 3–10% (а иногда и больше) для листовых материалов по сравнению с прежним фактическим расходом и раскройными картами, составленными первоначально для завода Ленинградским отделением института «Оргтрансмаш». Готовые планы раскроя проверялись их практическим выполнением. Ряд задач из практики этого завода использован в качестве иллюстративных примеров в этой книге.

Работа на заводе им. Егорова проводилась комплексной бригадой технологов и рабочих, созданной по инициативе партийного бюро завода. Активное участие в проведенной работе приняли технологи завода тов. Н. М. Храмцова и С. Д. Фалькович, а также ряд работников пресово-заготовительного цеха (начальник цеха тов. Е. С. Вельский). Работа комплексной бригады позволила составить значительное количество планов раскроя и провести много экспериментальных раскроев. Этот опыт положен в основу ряда содержащихся в книге практических рекомендаций, учитывающих специфику производств, подобных вагоностроению.

Книга состоит из трех глав и приложений. В главе I излагается постановка задачи о нахождении наиболее рационального плана раскроя и общие методы ее решения, иллюстрируемые простейшими примерами. В следующих главах даются приемы ее решения, приспособленные специально к случаю раскроя линейных материалов (гл. II) и раскроя листового материала на прямоугольные и круглые заготовки (гл. III). В этих главах изложен также ряд практических указаний, и они проиллюстрированы в основном примерами чисто производственного характера. Общие результаты главы I могут быть использованы и при раскрое листовых материалов на комплекты различных фасонных заготовок, поскольку с помощью этих методов и в этом случае вопрос о составлении целого раскройного плана сводится только к отысканию раскроев одного листа. Однако вопрос о раскрое листа на криволинейные заготовки в целом в этой книге не рассматривается.

Главы II и III сопровождаются упражнениями, благодаря которым читатель может проверить, насколько он усвоил методы решения.

Приложения I и II носят более специальный математический характер и содержат теоретическое обоснование предложенных методов.

Заключение резюмирует общие выводы. Своеобразие материала книги, рассчитанной на читателей самой различной квалификации, потребовало выделения в мелкий шрифт значительной части текста, которая может быть опущена при первом чтении.

Читатель, желающий практически использовать рекомендуемые методы, должен, прежде всего, ознакомиться с книгой в целом, пропуская подробности, изложенные мелким шрифтом, а затем, при конкретном решении задач, полностью разобрать интересующий его раздел.

Для математически хорошо подготовленного читателя, желающего в первую очередь ознакомиться с общей теорией вопроса, наиболее интересны будут первые два приложения; глава I; § 1 и 3 главы II и § 1, 2, 3 и 6 главы III.

## Глава I

## ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСКРОЕ

## § 1. Постановка задачи

Для выяснения постановки задачи уместно начать с рассмотрения простого примера.

**Вводный пример.** (Пример 1.) Допустим, что из полос профильного проката длиной 5000 мм необходимо раскраивать для серийного производства некоторого изделия следующие заготовки:

Номер детали	Длина заготовки,	Количество заготовок на 1 изделие
	в мм	
1	1655	1
2	1050	5
3	216	1

Обычным для заводской практики будет в подобном случае следующий порядок работы. Часть материала кроится на заготовки длиной 1655 мм. Их выходит по 3 штуки из полосы; остается концевой отход длиной 35 мм. Затем отдельно получают заготовки длиной 1050 мм. Их выходит 4 штуки из полосы; остается концевой отход 800 мм. Из образующихся в последнем случае отходов получают заготовки в 210 мм (из одного отхода выходит 3 таких заготовки). На каждые 12 изделий придется при этом раскроить 19 полос: на заготовки детали № 1 — 4 полосы, на заготовки детали № 2 — 15 полос. Для получения необходимого количества деталей № 3 достаточно будет использовать 4 из 15 отходов, полученных при раскросе заготовок детали № 2, остальные 11 остатков длиной по 800 мм окажутся фактически неиспользуемыми отходами.

Таким образом, в производстве будет соблюдаться следующий раскройный план (независимо от того, фиксируется этот план документально при расчете норм расходования материала или нет):

## РАСКРОЙНЫЙ ПЛАН № 1

№ п/п	Эскиз раскроя	Доля всего материала, разрезаемая по данному раскрою
1		$\frac{4}{19}$
2		$\frac{4}{19}$
3		$\frac{11}{19}$

Нетрудно подсчитать процент отходов. Общая длина одного комплекта заготовок на изделие составляет:

$$1655 \times 1 + 1050 \times 5 + 210 \times 1 = 7115 \text{ мм} = 7,115 \text{ м.}$$

Общая длина 12 комплектов заготовок:

$$7,115 \times 12 = 85,38 \text{ м.}$$

Общая длина израсходованного материала составит:

$$5 \text{ м} \times 19 = 95 \text{ м.}$$

Процент полезного использования материала при раскрое равен

$$100 \times \frac{85,38}{95} = 90\%.$$

Таким образом, отходы составят приблизительно 10%.

**Задача составления плана раскроя.** Обратим внимание на структуру составленного раскройного плана. Раскройный план состоит из перечня употребляемых способов раскроя одного целого исходного куска материала и указания на то, какая часть всего материала кроится по каждому из этих способов, причем употребительность каждого из этих способов должна быть подобрана таким образом, чтобы весь раскройный план в целом давал заготовки в нужном ассортименте.

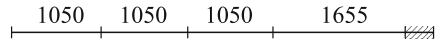
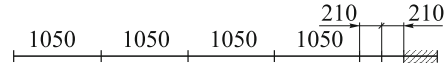
Такая структура раскройного плана сохраняется и в случае листового или любого иного материала; всякий раз, составляя план раскроя, мы должны получить перечень нескольких употребляемых способов раскроя исходного целого куска материала и указание — какая доля всего материала кроится по каждому из этих способов. Именно такой документ мы называем в дальнейшем планом раскроя.

Требуемая комплектность — соотношение между необходимым количеством заготовок каждого вида — в рассмотренном примере определялась числом изготавливаемых из одинакового материала деталей одного и того же изделия. Вместо этого речь может идти о любой группе заготовок, допускающих совместное изготовление, будь это лишь часть заготовок для одного изделия или, наоборот, заготовки для нескольких различных изделий, изготавливаемых на данном заводе. В последнем случае комплектность может обуславливаться такими обстоятельствами, как установленный по договору ассортимент в крупном заказе или, более широко, — соотношение долей различной продукции в общей программе завода. Вместо слова комплектность мы употребляем иногда слова необходимый ассортимент заготовок.

Возвратимся к рассмотренному примеру. После составления плана № 1 возникает естественный вопрос: нельзя ли, применяя какие-нибудь другие раскрои отдельных полос и употребляя эти раскрои в различном количестве, составить раскройный план таким образом, чтобы сохранить комплектность заготовок и получить меньший процент отходов?

В данном случае это возможно сделать. Вот такой план (ниже мы увидим, на основе каких соображений этот план был составлен):

## РАСКРОЙНЫЙ ПЛАН № 2

№ п/п	Эскиз раскроя	Доля всего материала, разрезаемая по данному раскрою
1		$\frac{2}{3}$
2		$\frac{1}{3}$

По этому плану из каждых 3 полос материала получается 2 комплекта заготовок. (Две полосы разрезаются по первому раскрою, что дает 2 заготовки 1655 мм и 6 заготовок 1050 мм. Одна полоса кроится по второму раскрою, что дает еще 4 заготовки 1050 мм и 2 заготовки 210 мм. Полученные заготовки: 1655 мм — 2 шт., 1050 мм — 10 шт., 210 мм — 2 шт. — комплектно обеспечивают 2 изделия.)

Процент полезного использования материала при раскрое в плане № 2 будет равен:

$$100 \times \frac{7,115 \times 2}{5 \times 3} \approx 95\%.$$

Следовательно, отходы составят примерно 5%.

По сравнению с первым планом количество отходов уменьшится вдвое. Если из 57 полос раньше выходило 36 комплектов заготовок, то теперь из тех же 57 полос их будет получаться 38.

Уже приведенный простой пример показывает, что к составлению раскройного плана следует подходить весьма продуманно, так как от выбора плана существенно зависит расход материала на единицу изделия.

В составлении плана раскроя по самой его структуре тесно связаны между собой две части задачи. Во-первых, выбор различных возможных раскроев одного куска материала; во-вторых, определение применимости каждого из этих раскроев с тем, чтобы полученный план обеспечивал необходимый ассортимент заготовок и одновременно давал наименьший процент отходов.

Наиболее важные общие соображения, развиваемые в этой книге, посвящены методике решения второй части задачи. В частности, в § 5 доказывается, что после того, как перечислены возможные раскрои целого куска материала, составление наиболее экономного плана раскроя, дающего заготовки в нужной комплектности, всегда может быть выполнено вполне определенными вычислительными приемами.

С ростом общей культуры производства планирование становится все более совершенным. Раньше каждая деталь раскраивалась независимо от остальных, т. е. вообще не привлекались к рассмотрению смешанные раскрои, затем появилось плановое использование отходов для получения некоторых более мелких деталей. Эта первая стадия рационализации раскроя уже реализована на большинстве наших заводов. Теперь необходимо применять более совершенные планы раскроя, которые должны охватывать, по возможности, все заготовки, использующие один и тот

же материал, во всяком случае, — наиболее устойчивые группы этих заготовок. Такие планы в ряде случаев уже находят себе применение. Это делает особенно актуальной вторую часть задачи.

Что касается решения первой части задачи, то обычно нахождение допустимых раскroев успешно производится на глаз. Однако, как будет показано во II и III главах, в случае линейного раскроя и при раскрое листа на прямоугольные заготовки и первая часть задачи, а вслед за нею и общая задача составления наиболее экономного раскройного плана могут быть решены вполне точно.

В практических примерах мы не будем специально подчеркивать разделение общей задачи на эти два этапа.

**Технологические требования.** Помимо основного условия — достичь возможно меньшего процента отходов, — раскройный план должен удовлетворять и ряду других требований.

Прежде всего каждый из указанных раскroев одного листа, полосы и т. п. должен быть, безусловно, технологически осуществим.

Нельзя, например, включить в план раскроя листов, предусматривающий работу на гильотинных ножницах, раскрой, изображенный на рис. 1. В этом раскрое невозможно осуществить первый разрез, так как по устройству станка он необходимо должен идти поперек всего листа. Точно так же невозможно на многих видах оборудования раскроить весь лист до самого конца на полосы шириной 10–30 мм, поскольку при обрезке последних полос закрепляющие материал приспособления не смогут удерживать остающуюся узкую ленту материала.

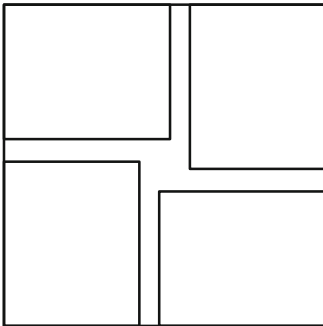


Рис. 1

От раскройного плана требуется не только выполнение каждого раскроя, но и возможно лучшая технологичность. Требования технологичности не всегда принимают форму абсолютно жестких ограничений, а иногда имеют характер пожеланий. Жесткость отдельных требований зависит от рода производства и оснащенности оборудования, на котором осуществляется раскрой. Перечислим основные из этих требований.

1. Желательно, чтобы из одного куска материала, по возможности, не кроились заготовки многих наименований, особенно для деталей разнородных узлов изделия.

2. Желательно, чтобы одни и те же заготовки, как правило, не повторялись в нескольких раскроях. Это упростит сортировку получаемых заготовок и их отправку от рабочего места.

3. Желательно, чтобы рабочий, выполняющий раскрой, по возможности, реже переставлял измерительные упоры на станке и не брал несколько раз в руки один и тот же кусок материала.

4. Желательно, чтобы одновременно раскраиваемая по данному плану партия заготовок была не слишком велика (соответствовала условиям производства).



Поясним последнее требование несколько подробнее. В индивидуальном и мелкосерийном машиностроении нет возможности постепенно выравнивать комплектность деталей за счет незавершенного производства. Поэтому в случае индивидуального производства необходимо, а в серийном производстве весьма желательно (для уменьшения незавершенного производства), чтобы необходимый ассортимент заготовок соблюдался при каждом запуске материала в раскрой. Число одновременно раскраиваемых комплектов всех или некоторой группы заготовок даже в условиях серийного производства в значительной степени ограничивается также в целях ритмичной организации производства. Поэтому раскройный план желательно составлять таким образом, чтобы на некоторую, по возможности небольшую, партию комплектов каждым из способов раскраивалось целое число исходных кусков материала. (В приведенном примере 1 по плану № 1 это достигается при партии в 12 комплектов, что дает возможность кроить материал партиями в 12, 24, 36 и т. д. комплектов, а в плане № 2 это достигается при партии в 2 комплекта, что дает возможность кроить материал партиями в 2, 4, 6, 8 и т. д. комплектов, т. е. любыми четными партиями.)

Перечень технологических пожеланий можно, конечно, продолжить и дальше. Мы еще будем возвращаться к технологическим условиям в конкретных задачах. В частности, в § 7 гл. III будет рассмотрен вопрос о выборе размера партии и средствах его уменьшения.

Из всего сказанного сделаем, прежде всего, следующий вывод: при составлении раскройного плана употребляемые раскрои одного куска материала должны избираться не из общей совокупности всех мыслимых раскroев на требуемые заготовки, а лишь из существенно меньшего числа технологически допустимых или целесообразных раскroев.

Как показывает практика, большинство дополнительных технологических требований обычно не трудно удовлетворить после того, как внимательно изучена задача составления раскройного плана с основным требованием о достижении минимальных отходов при соблюдении необходимой комплектности. Иногда этого удается достичь без увеличения отходов, только путем несущественных вариаций раскройного плана, иногда — путем совершенно незначительного, сознательно допускаемого увеличения отходов.

Все это позволяет первоначально отвлекаться от ряда не вполне определенных технологических ограничений и начинать с задач, поставленных математически более точно.

Основные типы задач. Произведенный анализ приводит нас к постановке следующих основных задач.

**Задача 1.** *Материал поступает в виде одинаковых кусков, размер которых задан. Даны размеры заготовок и число заготовок каждого вида, необходимое в комплекте. Требуется составить раскройный план, дающий наибольший коэффициент полезного использования материала при раскroе.*

В ряде случаев, при возможности использовать материал нескольких размеров, приходится решать несколько иные задачи.

**Задача 2.** Допускается заказ материала двух (или нескольких) габаритов. Даны размеры заготовок и состав комплекта. Требуется заказать наиболее рациональную смесь материала (т. е. указать, какую часть всего материала желательно получать одного размера, какую другого) и указать раскрой всего заказываемого материала так, чтобы в общем достигался минимальный процент отходов.

**Задача 3.** Материал поступает (или имеется на складе) двух (или нескольких) размеров во вполне определенных количествах (например,  $1/3$  от общего числа листов — листами одного размера и  $2/3$  — листами другого размера) и по-прежнему требуется составить наиболее экономный план раскроя.

Эта задача отличается от предыдущей отсутствием возможности выбирать соотношение между количествами материала разных габаритов.

В тех случаях, когда имеется возможность с самого начала выбрать заказ одного мерного материала, выбор, по существу, приходится делать лишь между 2–3 конкретными габаритами материала из числа предусмотренных ГОСТом. В этом случае для каждого из возможных размеров следует составить, хотя бы приближенно, свой план раскроя (задача первого типа), а затем выбрать наиболее благоприятный из размеров и для него уточнить план раскроя. При индивидуальном заказе материала, наиболее подходящего для какой-либо резко преобладающей заготовки, выбор габарита материала оказывается очевидным, после чего вновь возникает задача № 1.

Если при заказе материала одного размера процент отходов недопустимо высок, то можно использовать заказ материала двух или нескольких габаритов.

Обычно эти случаи связаны с наличием в комплекте нескольких весьма массовых крупных заготовок, требующих каждая своего заказа материала, а потому и в этом случае сами габариты материала легко выбираются, и задача сводится к задаче второго типа.

Задачи третьего типа возникают при плановой реализации наличных запасов материала, а также при решении вспомогательных промежуточных задач, которые оказываются полезными при планировании раскроя листа.

Таким образом, к указанным трем типам сводится широкий круг практически возникающих задач. В каждом конкретном случае полное решение такого рода задач должно, очевидно, состоять из готового плана и подтверждения того, что этот план в данных условиях нельзя заменить лучшим.

Следует сказать, что до сегодняшнего дня такого рода задачи решаются практиками весьма примитивно. Составляется какой-либо один раскройный план. Если процент отходов кажется большим, то предпринимается попытка составить заново весь раскройный план. Когда одна-две подобные попытки не приводят к существенному улучшению, то считается, что полученный план удовлетворителен.

Если учесть, что в реальных заводских задачах план раскроя состоит иногда из нескольких десятков раскройных карт, то становится очевидным, что уже пересмотр двух вариантов плана составляет большой труд. Поэтому не только умение составлять наиболее экономные планы раскроя, но и всякое указание, позволяющее без пересмотра плана в целом обнаружить возможности и пути его улучшения, будет весьма полезным.

Излагаемые далее методы в их самом общем виде могут применяться при решении целого ряда вопросов, технически значительно отличающихся от задач раскроя, но весьма близких к ним по математической постановке задачи. Широкий круг таких задач перечислен в брошюре Л. В. Канторовича (цит. на стр. 1).

Наиболее близкими к задачам раскроя являются задачи, возникающие при планировании целесообразной укладки грузов при их перевозке и складировании. В вопросах рациональной загрузки сушил, ванн, закалочных печей и т. п. отдельные этапы анализа могут также потребовать решения сходных задач.

### **§ 5. Первый метод нахождения максимально экономного плана раскроя. (Метод последовательных улучшений раскройного плана)**

Допустим, что в результате применения указанного выше способа контроля к некоторому раскройному плану обнаружился неиспользованный в плане раскрой целого куска материала, дающий заготовки с большей суммой индексов, чем у использованных в плане раскроев, причем нет возможности за счет изменения индексов уравнивать этот раскрой с примененными. Тогда, как уже говорилось, введение этого раскроя позволяет прийти к более экономному раскройному плану. Чтобы осуществить это введение, придется решить два вопроса: 1) вместо какого из ранее употребленных раскроев ввести этот новый раскрой и 2) указать для вновь полученного списка раскроев, какая часть всего материала кроится по каждому из этих способов.

{...Пример...}.

Следует отметить тот принципиальный вывод, что ... метод последовательных улучшений готового раскройного плана при наличии перечня возможных раскроев ... дает возможность строго определенными математическими операциями заведомо дойти до максимально экономного раскройного плана. При этом основной операцией является решение несложных систем уравнений первой степени.

Последовательность операций такова:

1. Составляется некоторый план.
2. Находятся индексы из условия равенства сумм индексов в примененных раскроях<sup>3)</sup>.
3. С помощью найденных индексов проверяются различные другие раскрои.
4. Если найден более рациональный раскрой, чем использованные ранее, то определяется, какой из раскроев следует им заменить.
5. Составляется улучшенный раскройный план, и действия повторяются.

В качестве исходного плана всегда может быть взят план, состоящий из отдельных раскроев каждой из заготовок. С помощью таких раскроев можно удовлетворить любой комплектности. Практическое выполнение метода будет, конечно,

---

<sup>3)</sup>В предыдущем параграфе упоминалось, что система уравнений, которая при этом решается, может оказаться несовместной, и индексов с желаемым свойством выбрать нельзя. Однако это значит, что план допускает улучшение еще более простым способом — в этом случае план можно улучшить, просто устранив некоторые из примененных в нем раскроев.

тем проще и быстрее, чем лучше будет первоначальный план. Поэтому глазомерным подбором отнюдь не следует пренебрегать, особенно при составлении первоначального плана.

### **§ 6. Второй общий метод отыскания максимально экономного раскроя. (Метод последовательного расширения множества условно-максимальных раскроев)**

Второй метод приближения к наилучшему раскройному плану заключается в постепенном переходе от наиболее экономных раскроев отдельных целых кусков исходного материала, раскроев, которые сами по себе не обеспечивают желаемой комплектности, к плану раскроя, обеспечивающему комплектность, с одновременным уточнением индексов заготовок.

Этот метод состоит в следующем. Первоначально выбираются какие-то значения индексов, затем составляется раскройный план, состоящий только из условно-максимальных (при этих индексах) раскроев. Конечно, такой план, как правило, не даст желаемой комплектности. Если при этом есть возможность выбирать между несколькими условно-максимальными раскроями, то ее можно использовать для получения желаемой пропорции между количеством 2–3 видов заготовок. Остальные виды заготовок в таком раскройном плане будут получаться в избытке или недостатке. Затем индексы несколько изменяются: прежде всего, индекс какой-либо недостающей заготовки увеличивается настолько, чтобы некоторый новый раскрой, в котором фигурирует эта заготовка, вошел в число условно-максимальных (или, наоборот, индекс заготовки, имеющейся в избытке, несколько уменьшается, чтобы достичь такого совпадения). После того как такое совпадение достигнуто, пересматривается раскройный план, в нем по-прежнему применяются только условно-максимальные раскрои, а комплектность приближается к желаемой.

После ряда шагов такого рода (как это можно строго доказать) получается план, в точности удовлетворяющий желаемой комплектности. Поскольку этот план целиком составлен из условно-максимальных раскроев, он будет наиболее экономичным.

В качестве исходных значений индексов удобно взять веса заготовок, их площади или длины, а еще лучше — несколько округленные значения этих величин или небольшие числа, соотношения которых близки к соотношению этих величин.

При имеющемся перечне возможных раскроев этот метод точно так же, как и первый, может быть дан в виде жестко определенной математической схемы, заведомо ведущей к результату. (...).

Этот метод имеет ряд преимуществ при решении общей задачи 3 (§ 1), особенно, когда имеется довольно много различных габаритов исходного материала и немного видов заготовок. Ряд задач такого рода возникает при распиловке древесины. Изложение метода применительно к последним задачам на ряде примеров дано в статье Л. В. Канторовича «Подбор поставок, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте» (журн. «Лесная промышленность», 1949, № 7 и 8).

### § 7. Общая схема приближенных методов, ускоряющих нахождение наиболее экономного плана раскроя

Если бы при составлении плана раскроя окончательные значения индексов заготовок были заранее известны, то значительно упростилось бы отыскание максимально экономного плана. В этом случае план мог бы быть построен только из условно-максимальных (при этих значениях индексов) раскроев.

Возникает естественный вопрос: нельзя ли хотя бы приближенно определить индексы из каких-либо косвенных соображений?

Мы назовем приближенными значениями индексов числа, не обязательно близкие к окончательным индексам по величине, но весьма близкие к ним по свойствам.

Окончательные значения индексов обладают следующими свойствами:

1. Не существует раскроев одного исходного куска материала на заготовки с суммой индексов, большей некоторого числа. Обозначим это число  $C$ .

2. Есть ряд раскроев на заготовки с суммой индексов, равной  $C$ , причем каждая заготовка фигурирует хотя бы в одном из таких раскроев.

3. Раскрой с суммой индексов, равной  $C$ , достаточно, чтобы только из них составить план, дающий нужную комплектность заготовок.

Допустим теперь, что нам удастся найти индексы, удовлетворяющие первым двум из перечисленных свойств. Если при таких индексах только из «полноценных» раскроев (раскроев с максимальной суммой индексов, равной  $C$ ) удастся составить раскройный план, значит, будет соблюдено и свойство 3. Задача будет полностью решена.

Если такого плана составить не удастся, то можно перейти на второй метод — изменять индексы с целью расширения в желаемом направлении множества условно-максимальных раскроев. То обстоятельство, что таких раскроев уже было несколько, ускорит проведение второго метода (§ 6).

Практически лучше поступать иначе. После того как найдены индексы, удовлетворяющие условиям 1 и 2, можно сразу составлять план раскроя, полностью удовлетворяющий нужной комплектности, по возможности употребляя при этом лишь «полноценные» раскрои. Закончить план придется, применяя в небольшом количестве раскрои уже «неполноценные». Затем, в случае надобности, следует перейти к улучшению уже готового плана по первому методу (§ 5). Свойство 1 выбранных индексов позволяет оценить возможное несовершенство составленного плана. Достаточно посмотреть, насколько число расходуемых в этом плане на единицу изделия кусков материала превосходит отношение суммы индексов всех деталей одного комплекта к числу  $C$ . Заметим, что эта оценка обычно несколько преувеличивает несовершенство плана. Дальнейший пересмотр индексов по методу § 5 может иногда обнаружить, что план был вообще наилучшим, или привести к совсем незначительным улучшениям этого плана.

В большинстве практических задач именно этот путь (предварительное приближенное нахождение индексов, обладающих свойствами 1 и 2, а затем сразу составление плана) наиболее быстро ведет к цели. Нахождение индексов, обладающих свойствами 1 и 2, следует вести с использованием особенностей конкретных задач.

Мы не приводим отдельного примера, поясняющего этот общий путь, потому что в дальнейшем изложении именно по этой общей схеме дается несколько более детализированных отдельных приемов приближенного решения задачи планирования рационального раскроя мерных материалов. В § 2 следующей главы изложен прием приближенного выбора индексов с помощью округления отношений длин заготовок при решении задач линейного раскроя. В § 3, гл. III изложен прием приближенного определения индексов с помощью вспомогательной линейной задачи при раскрое листов на прямоугольные заготовки. В § 3, гл. II и в § 2, гл. III изложен прием, удобный в случаях, когда некоторые из нужных заготовок требуются в значительно большем количестве, чем все остальные.

### § 8. Пределы возможных значений индексов и приемы уточнения этих пределов

Несмотря на то что при составлении плана раскроя индексы заготовок первоначально неизвестны, некоторые неравенства для их возможных значений нетрудно получить, рассматривая отдельные раскрои.

Чтобы устранить неопределенность выбора общего множителя у окончательных значений индексов, условимся в пределах этого параграфа считать, что в используемых в окончательном плане раскроях суммы индексов равняются 1.

При таком условии сумма индексов любого раскроя одного целого куска материала не может превосходить единицы<sup>4)</sup>. Это, а также некоторые другие приведенные ниже соображения позволяют получить целый ряд ограничений для возможных значений индексов:

1. Рассматривая раскрои, состоящие только из одного вида заготовок, легко получим ограничение сверху для индекса этой заготовки из условия, что сумма индексов меньше 1.

2. Если уже известны ограничения сверху для индексов всех заготовок и мы рассмотрим всевозможные раскрои с участием некоторой определенной заготовки и в каждом из раскроев подсчитаем долю остатка суммы индексов до 1, принадлежащую на одну данную заготовку, то наименьшая из полученных величин даст нижнюю границу индекса данной заготовки. Действительно, среди рассматриваемых раскроев должен быть хотя бы один, используемый в окончательном решении, и для него сумма индексов должна достигнуть 1. Целесообразно одновременно вести уточнение не только индексов отдельных заготовок, но и общей суммы индексов всех заготовок комплекта, которую обозначим через  $K$ .

3. Из того факта, что процент использования материала при раскрое не может превосходить 100%, легко получить ограничение снизу для  $K$ . Для этого достаточно разделить общий вес заготовок всего комплекта на вес одного целого куска материала. Если учесть еще, что коэффициент использования материала во всем плане заведомо не может быть выше, чем наилучший из коэффициентов использования в отдельных раскроях, то это позволяет несколько уточнить указанную оценку снизу для  $K$ .

<sup>4)</sup>Предполагается, что рассмотрение ведется в условиях задачи 1 (ср. § 1).

4. В последнем виде оценка может производиться, когда вместо весов берутся любые (но одни и те же) оценки продукции в комплекте и в отдельных раскроях. Именно, при любом выборе значений индексов число расходуемых кусков материала на комплект не может быть меньше отношения суммы индексов заготовок комплекта к максимальной среди сумм тех же индексов, составленных для различных раскроев.

Это позволяет, выбрав значения индексов, после некоторой предварительной их оценки затем еще уточнить нижнюю границу суммы индексов всего комплекта.

5. Всякий обеспечивающий комплектность раскройный план, даже если он не является наиболее экономным, дает оценку сверху для величины  $K$ . (За эту оценку может быть взято число кусков материала, расходуемых на один комплект по этому плану, так как оно, очевидно, не меньше, чем то же число для наиболее экономного плана, которое равно  $K$ .)

6. Если отказаться от обеспечения комплектности по одной из заготовок и составить план, дающий комплектность всех остальных заготовок и значительный избыток первой заготовки, то из ограничения сверху суммы индексов всех получаемых заготовок (она ограничена числом расходуемых кусков материала) и ограничения снизу для  $K$  (суммы индексов всего комплекта) можно получить оценку сверху для индекса заготовки, полученной в избытке.

7. Из рассмотрения раскройного плана, дающего недостаток одной и полный комплект всех остальных заготовок, можно сделать два вывода: во-первых, используя оценку снизу для  $K$  (суммы индексов всего комплекта), можно получить оценку снизу для индекса недостающей заготовки; во-вторых, исходя из оценки сверху для индекса недостающей заготовки, можно получить оценку сверху для суммы индексов всего комплекта.

8. Соображения, подобные перечисленным, можно применять для уточнения границ индексов не только отдельных заготовок или всего комплекта в целом, но и любых групп заготовок. Кроме того, эти соображения можно повторять, используя одни из уже полученных оценок для уточнения других. Несмотря на то что все эти соображения не обязательно приводят к полному уточнению всех индексов, они могут оказаться весьма полезными: во-первых, границы для суммы индексов всего комплекта удается обычно существенно сблизить, а верхние из них служат достаточным основанием для назначения нормы расходования материала. Это обстоятельство особенно важно, так как появляется возможность в значительной мере обоснованного нормирования материала до составления окончательного плана раскроя; во-вторых, после того как уточнены пределы возможных значений индексов каждой заготовки, можно выбрать в качестве индексов несколько округленные значения из этих пределов и перейти к ранее рассмотренным общим методам (§ 6 и 7), при этом дальнейшее решение значительно ускоряется, так как при уточнении индексов уже был учтен в значительной мере необходимый ассортимент заготовок (...).

## Глава II

## РАСКРОЙ ЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО ДЛИНЕ (ПРОФИЛЬНЫЙ ПРОКАТ, ТРУБЫ, БРУСКИ, ПОЛОСЫ)

### § 3. Некоторые замечания о свойствах индексов. Планирование линейного раскроя при значительном преобладании нескольких заготовок

Шкала индексов. После того как индексы заготовок выбраны, каждой комбинации заготовок соответствует определенная сумма индексов. Для всякого куска материала среди уместяющихся в нем различных комбинаций заготовок найдутся такие, которые дают наибольшую сумму индексов. Если сопоставлять эту сумму длине куска материала, то каждой длине от 0 до полной длины поступающих полос будет поставлено в соответствие определенное число — наибольшая сумма индексов заготовок, получающихся из этой длины.

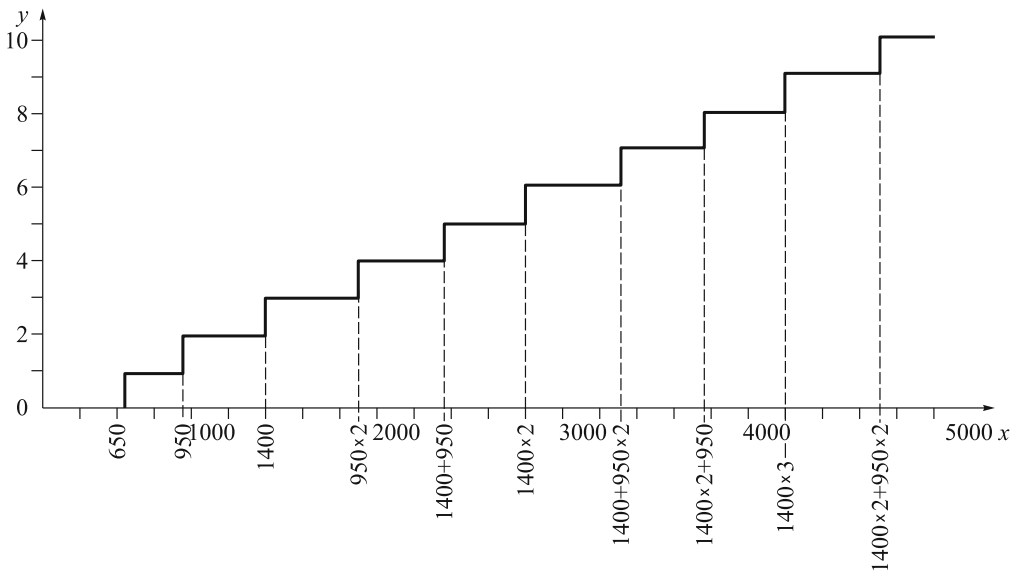


Рис. 8

Изобразим эту зависимость в виде графика. Вдоль оси  $OX$  откладываем длину, а вдоль оси  $OY$  — соответствующую ей максимальную сумму индексов. Такой график мы называем шкалой индексов. Пример такой шкалы, составленной при окончательном значении индексов примера 6, приведен на рис. 8.

Такого рода график всегда будет иметь вид возрастающей ступенчатой линии. Каждый переход к следующей ступени соответствует по своему положению наименьшей длине комбинации, дающей следующую, несколько большую сумму индексов. Максимальная сумма индексов заготовок, получающихся из целой полосы, соответствует наиболее высокой точке в конце графика. Таким образом, если все



употребленные в плане раскрои давали одинаковую сумму индексов  $C$ , то подтвердить отсутствие раскроев с суммой индексов большей, чем в примененных раскроях, можно, построив шкалу индексов: график, в самом конце его, не должен подняться выше, чем на  $C$ . Необходимо, однако, проверить, правильно ли составлена такая шкала, т. е. все ли комбинации заготовок были учтены при ее составлении. Для контроля может служить следующий (необходимый и достаточный) признак:

Если шкала составлена с учетом всех возможных комбинаций, то будут соблюдены два условия:

1. Длине каждой заготовки соответствует на графике ее индекс<sup>5)</sup>.
2. Если от начала любой ступени графика отложить влево по оси  $OX$  длину любой заготовки, то график должен при этом понизиться не меньше, чем на индекс этой заготовки.

Наоборот, если эти два условия соблюдены, шкала индексов составлена правильно.

Как же строить шкалу индексов? Конечно, можно пересматривать всевозможные комбинации заготовок и отмечать наиболее короткие из них, дающие уже следующее значение суммы индексов. Такие комбинации, как правило, состоят преимущественно из заготовок, для которых отношение длины к индексу наименьшее. (В примере 6 — заготовка 1400 мм.)

Однако можно указать более простые графические приемы проверки и построения шкалы индексов.

ПРИЕМ 1. На графике откладываются длины и индексы для каждой заготовки отдельно. (Кроме того, полезно отметить комбинации из повторенных несколько раз одинаковых заготовок, для которых отношение длины к индексу минимально.)

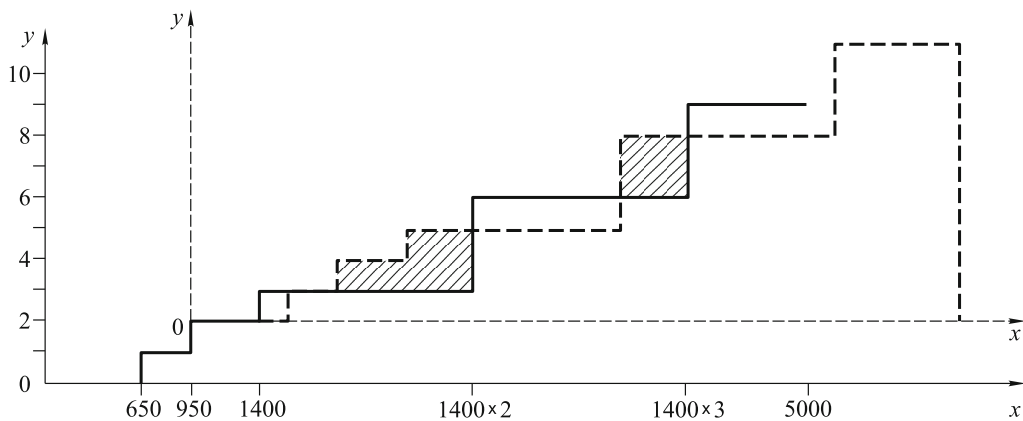


Рис. 9

<sup>5)</sup>Длине некоторых заготовок могла бы, вообще говоря, соответствовать на графике величина бóльшая, чем индекс заготовки. Однако если бы это имело место, то такая заготовка не фигурировала бы ни в одном полноценном раскрое. Этого не может быть при окончательных значениях индексов и при выбираемых приближенно индексах, обладающих свойствами 1 и 2.

Исходя только из рассмотренных комбинаций, строится приближенно шкала индексов, и весь график копируется на наложенную кальку. Затем калька сдвигается параллельно самой себе так, чтобы начало координат (на кальке) совпало с одним из выступающих углов графика на основном чертеже. На рис. 9 сплошными линиями изображено первое приближение графика, полученное с помощью лишь основных заготовок и различных кратностей заготовки в 1400 мм. Пунктиром показано смещенное положение того же графика, нанесенного на кальку. Если бы шкала уже была правильной, то весь график на кальке уместился бы под графиком основного чертежа. Если в каком-либо месте график на кальке выступает выше основного графика (заштрихованные места на рис. 9), то такой выступ дополняется в основной чертеж. Калька переносится обратно, и этот же выступ дополняется и на ней. После этого операция сдвига повторяется.

Когда при перемещении по всем выступам основного графика никаких дополнений вносить не придется, шкала будет готовой и проверенной. Это утверждение не требует специального доказательства, поскольку указанное построение представляет собою, по существу, не что иное, как систематизированный и упрощенный до ряда однотипных графических действий пересмотр всех возможных комбинаций.

**ПРИЕМ 2.** Другой прием графического построения шкалы индексов состоит в том, что сначала уточняется начало шкалы (на участке небольших длин материала), а затем с помощью уже известного участка шкалы последовательно уточняется шкала для все больших длин, вплоть до полной длины материала.

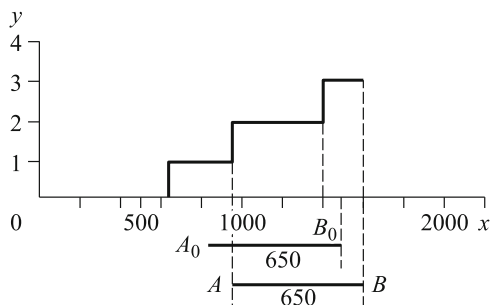


Рис. 10

Допустим, что нам уже известно начало шкалы до некоторой длины. На рис. 10 изображена часть шкалы индексов (до длины 1500 мм), составленная в условиях примера 6. Чтобы определить дальнейший ход графика на ближайшем участке, поступим следующим образом. От конца участка, на котором график известен, отложим назад длину одной из заготовок (заготовка в 650 мм в положении  $A_0B_0$  на рис. 10), а затем сдвинем эту заготовку вправо до тех пор, пока ее левый конец поравняется с одним из подъемов графика (положение  $AB$ ). Правый конец  $B$  указывает длину той комбинации с участием выбранной заготовки (в данном случае в 650 мм), которая наиболее близка к длине, до которой был раньше доведен график, и которая может дать некоторое увеличение суммы индексов. Сумму индексов такой комбинации легко подсчитать, прибавляя к индексу, указанному

в графике против точки *A* (в данном случае 2), индекс отлаженной заготовки (в данном случае 1).

Аналогично откладываем и сдвигаем другие заготовки. Получаем другие положения точки *B* и другие суммы индексов. До ближайшей из точек *B* график будет идти на прежнем уровне, а в этой точке поднимется до значения соответствующей суммы (в данном случае ближайшей будет точка 1600; подъема не произойдет). После того как график несколько продлен, повторяем построение (в данном случае при втором продолжении получим график до 1800, где произойдет подъем от индекса 3 к индексу 4) и т. д. Продолжая такое построение, можно последовательно получить всю шкалу.

В § 1 уже приводился прием, дающий иногда возможность доказать отсутствие раскроев с суммой индексов, большей определенного числа. Шкала индексов дает другой, более универсальный, но довольно громоздкий прием такого доказательства. Шкала индексов может оказаться полезной и при ответе на другие вопросы. Так, например, если среди большой партии материала постоянной длины поступило небольшое количество полос более коротких, то их следует кроить по одному из раскроев, дающих максимальную для данной длины сумму индексов; последняя же сумма для любой длины материала легко определяется по шкале.

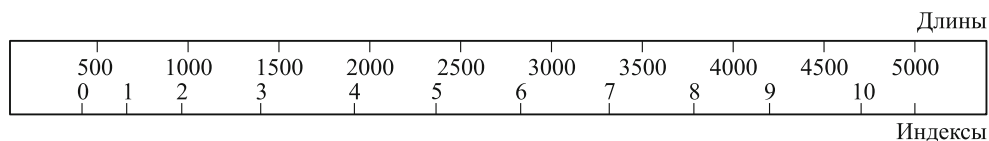


Рис. 11

Шкале индексов можно придавать различный вид. Вместо плоского графика можно изобразить две расположенные друг против друга линейные шкалы, на одной из которых отмечена длина, а на другой — индексы, точнее, места перехода от одних значений к другим. Можно вообще опустить первую линейную шкалу и лишь указать масштаб, в котором изображена вторая шкала. На рис. 11 дан линейный вид шкалы индексов для примера 6. Указанные графические приемы можно проводить и на линейно изображенной шкале. Наконец, можно вместо шкалы указать список комбинаций, упорядоченных по возрастанию суммарных длин, и для каждой из них указать сумму индексов. Комбинации, для которых есть другие, более короткие, с большей суммой индексов, ни из каких длин делать нецелесообразно; такие комбинации следует в списке пропустить.

### РАСКРОЙ МАТЕРИАЛОВ СМЕШАННЫХ ДЛИН

Вопрос о том, как следует кроить материал, который поступает в виде полос не одной или нескольких определенных длин, а в виде смеси полос, длины которых колеблются в некоторых пределах, весьма важен для решения ряда задач, часто встречающихся в работе заготовительных цехов. Этот вопрос играет также существенную роль при заказе материалов. Поставка материалов мерных длин

связана с выполнением дополнительных работ и увеличением отходов на заводе-поставщике. Поэтому государственная система снабжения предусматривает надбавку порядка 8–15% к основной отпускной цене материала при заказе кратных или мерных длин<sup>6)</sup>. Умение рационально планировать раскрой материала не мерных, а так называемых «торговых» длин позволяет в ряде случаев отказаться от заказа мерного материала и тем самым уменьшить общие расходы на материал<sup>7)</sup>. Существенно отметить, что рациональное использование материалов смешанных длин понижает в таких случаях суммарные отходы на заводе-поставщике и на заводе-потребителе.

Следующие два параграфа посвящены некоторым приемам выполнения рационального раскроя материалов смешанных длин. Поскольку речь идет о конкретных новых приемах практической работы, изложение имеет целью разъяснить главным образом эту сторону вопроса<sup>8)</sup>.

С необходимыми для применения этих методов расчетами после небольшой практики, как показывает опыт, легко справляется специалист со средним техническим образованием, знакомый с технологией заготовительного цеха.

#### § 4. Сортировка материала

Чтобы раскроить наиболее экономным образом партию материала смешанных длин, следовало бы, вообще говоря, действовать в следующем порядке:

1. Рассортировать большую партию материала на несколько групп по длине. При этом сортировку произвести настолько подробно, чтобы в пределах каждой группы все полосы допускали одни и те же раскрои на заготовки нужных длин.

2. После сортировки подсчитать, какая часть материала оказалась в каждой группе.

3. Составить план раскроя имеющегося материала, удовлетворяющий всем требованиям, предъявляемым к решению общей задачи 3 (§ 1, гл. I).

Однако непосредственное проведение всех этих мероприятий практически нецелесообразно по следующим соображениям. Во-первых, сортировка крупных полос затруднительна и не всегда окупится достигаемой экономией материала. Поэтому если и необходимо произвести сортировку, то следует связать ее с какой-либо неминуемой укладкой материала; причем ставить вопрос о сортировке следует лишь в том случае, когда она приведет к значительной экономии. Во-вторых, сортировка будет приводить в каждой партии материала к новому распределению материала по группам разных длин. Точный план раскроя пришлось бы составлять всякий раз заново. Поэтому сортировку целесообразно производить или для весьма большой

---

<sup>6)</sup> Точные данные о доплатах за мерные, кратные и приближенно мерные длины по отдельным сортам материала даются в общих справочниках об отпускных ценах материалов.

<sup>7)</sup> Беглое ознакомление авторов с одним проектом заказа материалов для вагоностроительного завода показало, что примерно в 50% случаев, когда первоначально намечался заказ мерных длин, оказалось возможным с таким же или почти таким же успехом использовать материал торговых длин.

<sup>8)</sup> Более точное рассмотрение тех же самых вопросов требует последовательного проведения статистической точки зрения. Читатель, знакомый с теорией вероятностей, без особого труда сделает сам необходимые уточнения. Одно из таких уточнений дано в конце книги в приложении II.

партии материала, или, при возможности, указать какие-либо простые правила, заменяющие составление в каждом случае точного плана раскроя рассортированного материала.

Наконец, если значительная часть необходимых заготовок невелика по размерам, то шкала длин возможных комбинаций заготовок становится весьма густой, и сортировку пришлось бы делать очень подробной. В этом случае сортировать длинные полосы нецелесообразно, так как можно достичь снижения отходов другими, более простыми по исполнению приемами. (Последние изложены в следующем параграфе.)

Несмотря на сказанное, в некоторых случаях сортировка материала рациональна. Приведем пример, в условиях которого, очевидно, следует воспользоваться сортировкой материала.

**ПРИМЕР 10.** Из брусков, которые поступают различными длинами в пределах от 2,2 до 2,8 м с преобладанием длин около 2,5 м, изготавливаются заготовки длиной в 800 и 1100 мм, нужные заводу примерно в одинаковом количестве.

Если рассортировать материал по трем группам (от 2,2 до 2,4 м — первая группа, от 2,4 до 2,7 м — вторая и от 2,7 до 2,8 м — третья), то из брусков первой группы можно делать или две заготовки по 1100 мм, или две по 800 мм; из брусков второй группы — две по 1100 мм или три по 800 мм; из брусков третьей группы — две по 1100 мм или три по 800 мм, или одну в 1100 мм вместе с двумя по 800 мм.

При сортировке большая часть материала попадет во вторую группу. Допустим, что мы будем составлять план раскроя рассортированного материала вторым из указанных в главе I общих методов. Рассуждения будут при этом вестись в следующем порядке. Допускаем, что в каждой группе бруски разрезаются по раскройам, наиболее полно использующим материал. Тогда в первой группе материал кроится на заготовки в 1100 мм, во второй (преобладающей) на  $800 \times 3$  и в третьей на  $1100 + 800 \times 2$ . Заготовки в 800 мм получаются при этом в избытке. Начнем понижать индекс избыточной заготовки (первоначально за индексы были взяты сами длины заготовок). Тогда первым наступит совпадение во второй группе: раскрой  $800 \times 3$  уравнивается по сумме индексов с раскром  $1100 \times 2$ .

Таким образом, даже не зная точно, сколько будет брусков в каждой группе, мы знаем, за счет эквивалентности каких раскромов и в какой группе будет регулироваться комплектность. Это позволяет точный раскройный план заменить простой инструкцией.

#### *Инструкция*

1. Резать бруски длиной 2,2–2,4 м на заготовки  $1100 \times 2$ .
2. Резать бруски длиной 2,7–2,8 м на заготовки  $1100 + 800 \times 2$ .
3. После этого резать бруски длиной 2,4–2,7 м на  $1100 \times 2$  или  $800 \times 3$  по мере надобности.

Очевидно, что в подобном случае сортировка вполне целесообразна. При этом, конечно, нет необходимости обязательно сортировать материал на складе или специально перекладывать его в цехе. Можно каждый очередной брусок непосредственно перед разрезанием обмерить линейкой, на которой будут нанесены всего три деления: 2,2 м, 2,4 м, 2,7 м — и кроить его по определенному правилу, если он

принадлежит к первой или третьей группе, и резать на те заготовки, которые в данный момент преимущественно нужны, если очередной брусок относится ко второй группе. Нет даже необходимости отдельно изготавливать такую линейку и прикладывать ее к каждому куску материала. У раскройного станка (будь то пресс-ножницы, пила, трубоотрезной станок или др.) доставленный материал складывается в определенном месте, иногда на землю, чаще на стеллаж, состоящий из двух крепких изогнутых балок (рис. 14, а).

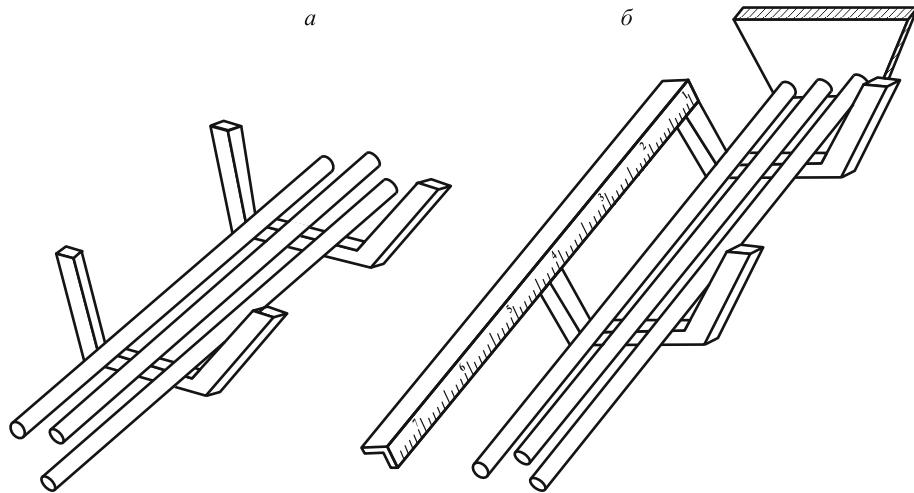


Рис. 14

Если оснастить этот стеллаж стенкой из прочного листа и складывать материал до упора к этой стенке, а вдоль стеллажа укрепить постоянную линейку в виде поручня с четко отмеченными через каждые 10 см делениями (рис. 14, б), то рабочий, берущий очередную трубу, полосу или брусок, сразу будет видеть ее примерный размер и сможет сначала использовать куски материала определенной группы длин.

Подобный сортировочный стеллаж должен быть обычным оборудованием рабочего места у раскройных станков. {...}

Чтобы проверить эффективность описанного приема, на ленинградском вагоностроительном заводе им. Егорова был проведен следующий опыт. После одного из очередных раскросов труб для трех вагоно-комплектов были обмерены концевые отходы. Они составили 2200 мм на вагон. (Столь большие отходы не случайны. Бессистемность в раскрое приводит к тому, что отходы копятя, и даже куски более 710 мм оказывались ненужными, так как эта заготовка была уже ранее укомплектована.)

Затем был повторен раскрой с использованием приведенного списка комбинаций и соблюдением описанного порядка работы. Это не занимало специального времени, но потребовало большего внимания в работе. Отходы на этот раз состави-

ли всего 604 мм на вагон, что соответствует экономии около 4% материала. Кроме того, последними раскраивались две заготовки по 710 мм; они могли быть получены не из очередной трубы, а из ранее накопленных в цехе отходов, которые частично идут в утиль, а частично используются на детали, не требующие по техническим условиям оцинкованного материала.

Таким образом, сортировочный стеллаж и несложная инструкция о порядке работы и в подобных случаях дают возможность выполнять раскрой, близкий к наиболее экономному, который был бы получен полной сортировкой и последующим точным расчетом раскройного плана. Составление такой инструкции требует лишь правильного понимания того, что произошло бы при составлении подобного плана. До составления инструкций такого рода необходимо предварительно на складе завода выяснить, в каких пределах колеблются длины материала и в какие более узкие пределы попадает основная часть этих длин.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При большой партии материала задача может решаться более точно. Среднее распределение длин по группам при сортировке может быть уточнено статистически, а на основе этих данных отработан план раскроя материала «среднего» состава, и уже по длинам употребляемых в плане комбинаций должна затем вестись сортировка материала.

### **§ 5. Работа по специальной сменной линейке, закрепляемой на станке**

Обычный прием раскроя материалов смешанных длин состоит в том, что от произвольно взятой очередной полосы материала отрезается многократно одна и та же заготовка до тех пор, пока остаток станет короче этой заготовки. Тогда остаток откладывается. Когда таким способом укомплектовано необходимое количество заготовок данного размера, рабочий переходит к заготовкам следующего размера. Прежде всего, он старается использовать некоторые наиболее крупные из ранее образовавшихся отходов, а затем начинает кроить целые полосы.

Предназначенное для массового раскроя оборудование, будь это пресс, пила, отрезной станок, гильотинные ножницы и т. п., имеет одинаковую схему устройства: на некотором расстоянии за кромкой режущего инструмента помещается упор, настраиваемый на очередной необходимый размер; несколько впереди помещается зажимное устройство, удерживающее материал.

При работе на таких станках описанным выше методом накопление концевых отходов вызывается тремя причинами<sup>9)</sup>. Во-первых, от каждой полосы остается некоторый минимальный остаток, необходимый для зажима материала. Величина доли отхода, которая вызывается этим фактором, определяется конструкцией зажима. Во-вторых, ввиду несовпадения кратности длины заготовки с длиной полос материала остаются различные концевые отходы. Доля отхода, вызываемая этим фактором, составляет в среднем примерно половину длины наименьшей из нужных заготовок; если же самых мелких заготовок нужно немного, то выбрасываются и

---

<sup>9)</sup>Мы не упоминаем здесь о потерях на пропили, плюсовые допуски размеров заготовок, чистовую торцовку концов полос, брак заготовок или материала и останавливаемся на тех причинах, влияние которых может быть ослаблено указанными ниже приемами работы.

более крупные отходы. Эта часть отходов зависит главным образом от размеров и необходимой комплектности заготовок. Наконец, подбор рабочим крупных отходов на глаз приводит к тому, что он выбирает для очередных заготовок остатки «с запасом». Это увеличивает число мелких остатков и ускоряет преждевременное укомплектование мелких заготовок, что, в свою очередь, ведет к укрупнению неиспользованных отходов. Последний фактор в известной мере зависит от квалификации резчика.

Таким образом, в процессе раскроя рабочий по существу производит сортировку, но не целых полос материала, а лишь последних остающихся кусков этих полос.

Однако вопрос о том, что можно сделать из каждого остатка, ставится слишком поздно, когда остался уже небольшой конец полосы, и никакого выбора в том, что именно из него следовало бы сделать, уже нет. Если бы вопрос о раскрое остатка ставился несколько раньше, когда остаток был длиной 1–1,5 м, то имелся бы широкий выбор — какую именно комбинацию нужных заготовок сделать из этого остатка? Можно было бы подбирать каждый раз комбинации, наиболее полно использующие материал остатка. Конечно, рабочий не может измерять остатки, помнить длины разных комбинаций нужных размеров, многократно переставлять упор. Сказанное носит, казалось бы, отвлеченный характер, но очень просто используется при следующем приеме работы, который мы опишем сначала схематически.

На станке жестко закрепляется специальная линейка, на которой отмечены длины различных комбинаций нужных заготовок<sup>10)</sup>. Линейка закреплена в таком положении, что началом отсчета нанесенных на ней делений служит кромка режущего инструмента; направлена линейка в ту сторону, откуда происходит подача материала. От очередной целой полосы, как обычно, многократно отрезается одна и та же заготовка, на размер которой настроен задний упор. Свободный конец полосы, приближаясь по мере отрезания заготовок к режущему инструменту, входит, наконец, в зону линейки (схема 1, рис. 15). Своим положением против делений линейки этот свободный конец ясно указывает, какая самая длинная комбинация может быть из него получена. Если среди заготовок, фигурирующих в этой комбинации, имеется та, на которую в данный момент настроен задний упор, от остатка следует отрезать еще одну заготовку. Конец полосы опять указывает, как следует использовать остающуюся часть. Если остаток предназначен только на другие размеры, его следует отложить и использовать в первую очередь при переходе к одному из этих размеров. Если остаток предназначается всего на одну, безразлично какую заготовку, то эту заготовку следует отрезать сразу, используя закрепленную линейку в качестве передней мерки. Последний этап вполне поясняется схемой 2 (рис. 15).

Рассмотрим пример.

---

<sup>10)</sup> Использование вспомогательной линейки с указанием длин комбинаций ряда заготовок предложено в выполненной в 1941 году работе Л. В. Канторовича «Методы рационального раскроя материала».



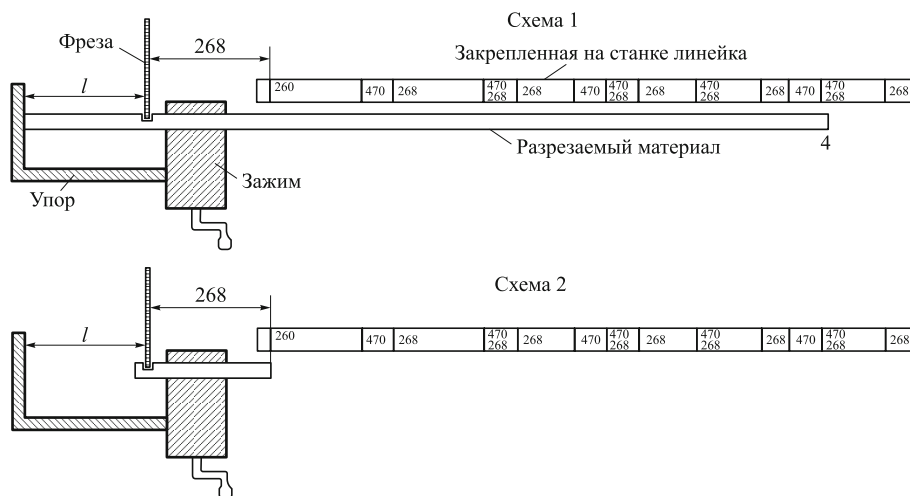


Рис. 15

ПРИМЕР 13. Из алюминиевой трубки  $\varnothing 25 \times 19$  мм на заводе им. Егорова для деталей модернизированного пассажирского вагона кроются следующие заготовки:

Длина заготовки,	Количество
в мм	на вагон
268	21
470	20

Составим перечень различных комбинаций этих длин:

Комбинация	Длина всей комбинации с учетом пропилов в 5 мм	Разность между длинами соседних комбинаций
—	0	268
268	268	202
470	470	71
268×2	541	202
470 + 268	743	71
268×3	814	131
470×2	945	71
470 + 268×2	1016	71
268×4	1087	71
470×2 + 268	1218	131
470 + 268×3	1289	71
268×5	1360	71
470×3	1420	60
470×2 + 268×2	1491	71
470 + 268×4	1562	71
268×6	1633	71
470×3 + 268	1693	60
470×2 + 268×3	1764	71

Соответствующая этим комбинациям линейка изображена на рис. 15. При работе описанным методом полностью отпадают первая и третья из перечисленных выше причин, увеличивающих концевые отходы. Влияние второй причины сводится до минимума. Работа с таким приспособлением не вызывает дополнительной затраты времени, но требует от резчика несколько большего внимания. Следует отметить, что при проведении экспериментальных раскroев в механическом цехе завода им. Егорова с выполнением такой работы легко справлялись самостоятельно молодые рабочие — выпускники ремесленного училища.

Обеспечение желаемой комплектности несколько усложняется. Необходимость обеспечить комплектность должна учитываться уже при расчете специальной линейки и планировании порядка выполнения работы. Речь об этом будет идти ниже. Во всяком случае, предлагаемый метод работы безусловно целесообразен в серийном производстве, так как, не требуя систематических дополнительных затрат, он дает в целом ряде случаев экономию от 2 до 5% расходуемого материала по сравнению с обычными методами<sup>11)</sup>.

Для того чтобы рассчитать, изготовить и использовать описанное приспособление, необходимо в каждом конкретном случае выяснить следующие вопросы:

1. Какой длины выбрать линейку?
2. Какие деления нанести на линейке и какие надписи делать около наносимых делений?
3. Какая продукция будет получаться в среднем на одну затрачиваемую полосу при работе по составленной линейке для каждой из возможных установок заднего упора?
4. Можно ли, пользуясь этой линейкой, получать требуемую комплектность заготовок?
5. Как, в случае надобности, следует видоизменить линейку, чтобы обеспечить возможность получения необходимого ассортимента заготовок?
6. В каком порядке вести выполнение раскроя?
7. Какое количество материала будет фактически расходоваться в среднем на один комплект заготовок?

**Длина линейки.** Две причины ограничивают возможную длину линейки. Во-первых, сама организация рабочего места не позволяет делать линейку слишком длинной — вся она должна находиться в поле зрения рабочего. Это конструктивно ограничивает ее длину величиной 1–2 м. Во-вторых, чем длиннее будет линейка, тем труднее будет вести укомплектование необходимого ассортимента заготовок, поскольку попадающая в пределы линейки последняя часть каждой полосы кроится не на очередной желаемый размер, а на указанные линейкой случайные комбинации, зависящие от длины остатка полос. С другой стороны, по мере удлинения линейки разнообразие возможных комбинаций увеличивается, что дает возможность достигать меньших отходов.

<sup>11)</sup>В разобранном примере экономия составила 2,3% (что несколько меньше рассчитанной далее возможной экономии). Это связано с тем, что ранее последний кусок материала иногда обрезался по разметке, чем несколько уменьшались потери. При раскрое в том же цехе стальной трубки  $\varnothing 19 \times 2$  мм экономия от использования аналогичного приспособления составила 5,3% расходуемого материала.

Чтобы показать, как рационально выбирать длину линейки, вернемся к рассмотренному примеру и обратим внимание на интервалы между длинами различных комбинаций (последний столбец таблицы). Если нанести на линейку длины всех комбинаций, то в начале линейки между делениями будут иногда значительные интервалы (в примере 13 это интервалы 268, 202, 131 мм). Затем интервалы несколько сужаются. В ряде случаев они быстро достигают некоторого минимума (в примере 13 это 60–71 мм) и далее с удлинением линейки убывают уже медленно. Выбор комбинации, на которую будет использован остаток материала, происходит в тот момент, когда его конец впервые попадает в зону линейки. Если в нашем примере остаток трубы окажется длиной в 1215 мм, то ее конец остановится в одном из больших интервалов между делениями 1087 и 1218 мм. Наилучшей комбинацией, которую можно сделать из этого остатка, будет комбинация  $470 + 268 \times 2$ ; концевой отход составит при этом  $1215 - 1087 = 128$  мм. Чтобы избежать подобных попаданий в большие интервалы, желательно сделать линейку настолько длинной, чтобы выбор комбинаций всегда происходил раньше, чем конец материала сможет попасть в один из больших интервалов. Это, очевидно, будет достигнуто, если мы продолжим линейку за последний большой интервал на величину наибольшей из нужных заготовок. В рассмотренном примере именно так и выбрана длина линейки:  $1218 + 5 + 470 = 1693$  мм. Если конструктивное ограничение длины линейки не позволяет избежать всех больших интервалов, то следует устранить возможность попадания хотя бы в некоторые из них<sup>12)</sup>.

Такого рода соображения позволяют выбрать желательную длину линейки, учитывая характер сгущения возможных делений и конструктивную ограниченность длины линейки.

**Наносимые деления и надписи.** Заготовка, которая отрезается от куска материала последней, должна быть достаточно большой, чтобы ее можно было отрезать по передней мерке. Слишком короткую заготовку отмерить по передней мерке нельзя, так как она не будет выступать из зажимного устройства. На крупных прессах нельзя отрезать по передней мерке заготовки меньше 170–200 мм; на большинстве других видов оборудования размер заготовки, отрезаемой последней, не должен быть меньше 60–100 мм. Поэтому на линейку не следует наносить делений, соответствующих комбинациям только мелких заготовок, ни одну из которых нельзя отрезать последней<sup>13)</sup>.

Около каждого из нанесенных делений нет необходимости надписывать состав комбинации, достаточно после каждого деления указать лишь длины заготовок, которые в этой комбинации фигурируют. Так, за делением, соответствовавшим в примере 13 комбинации  $470 \times 2 + 268$ , достаточно написать цифры 470 и 268, указывающие, какие размеры от куска такой длины следует отрезать. Если сразу же вслед за одной комбинацией следует другая, в которой фигурируют в точности те

<sup>12)</sup> При наличии одного большого интервала между делениями наибольший эффект при раскрое может дать сочетание работы по линейке с предварительной сортировкой материала, позволяющей избежать попаданий длин остатков в наиболее неблагоприятную зону линейки.

<sup>13)</sup> При малом разнообразии заготовок и невысоких требованиях к точности их длин можно иногда отрезать по передней мерке суммарную длину двух заготовок, а затем по заднему упору отрезать одну из них, что позволяет избежать потери в зажимном устройстве.

же самые размеры, нет необходимости наносить второе из делений. Так, в рассмотренном примере нет смысла наносить деление, соответствующее комбинации  $470 + 268 \times 3$ , которая следует сразу же за комбинацией  $470 \times 2 + 268$ .

Если в комбинации фигурируют все размеры, то целесообразно за соответствующим делением написать просто слово «любой».

Если комбинация состоит из одной крупной заготовки и другой мелкой, которая не может отрезаться последней, то необходимо сначала отрезать меньшую заготовку. В этом случае целесообразно за делением, соответствующим такой комбинации, написать лишь длину меньшей заготовки. После того как меньшая заготовка будет отрезана, линейка укажет, что делать с остающейся частью.

Все ли мыслимые комбинации нужных заготовок следует учитывать при составлении линейки?

Ниже мы увидим, что для обеспечения возможности получать необходимую комплектность заготовок может потребоваться убрать с линейки некоторые деления. Это позволит избежать возможного перепроизводства отдельных мелких заготовок.

Наконец, в ряде случаев, когда уже на короткой линейке происходит достаточное сгущение делений и соблюдение комплектности очевидным образом не вызывает затруднений, можно нанести на линейку не все возможные деления специально для того, чтобы упростить выполнение работы.

Сколько видов заготовок фигурирует в использованных при составлении линейки смешанных комбинациях, на столько кучек придется сортировать откладываемые в процессе раскроя остатки, которые используются при переходе к последующим размерам. Поэтому при одновременном раскрое 5–6 и более видов заготовок оказывается целесообразным нанести на линейку только различные комбинации, составляемые из 3–4 видов систематически используемых заготовок<sup>14</sup>).

Перечисленные соображения позволяют составить желательный перечень комбинаций, используемых при составлении линейки. (. . .).

Проверить, не получается ли определенная заготовка в избытке только из концевых остатков при раскрое прочих заготовок, можно также следующим грубо приближенным подсчетом, который оказывается достаточным в большинстве практических задач.

Процент отходов при работе по уже составленной линейке зависит от густоты нанесенных в конце линейки комбинаций, поэтому приблизительно известно количество полос, расходуемых в среднем на комплект. Кроме того, можно приблизительно (лучше с некоторым избытком) подсчитать, сколько раз в среднем получается эта заготовка из каждого раскраиваемого по линейке концевого остатка. Произведение полученного числа на количество расходуемых полос не должно превосходить нужного количества рассматриваемых заготовок.

В нашем примере длина одного комплекта заготовок равна примерно 15 м. Средняя длина труб около 3,5 м. Деления линейки сгущаются до 70 мм, так что

---

<sup>14</sup> При большом разнообразии самих длин заготовок (например, при раскрое рессорных полос) можно отметить на линейке только размеры заготовок, без их кратных или совместных комбинаций с тем, чтобы каждая полоса материала обрабатывалась сразу, без откладывания остатков.

отходы будут весьма невелики. Израсходовано будет на комплект 4–5 труб. Достаточно взглянуть на перечень различных комбинаций, имеющих в конце линейки, — а именно на эти комбинации и будут кроиться остатки, — чтобы увидеть, что в них заготовка 268 мм фигурирует 0; 2; 4; 5 и 6 раз. Перед каждым из делений имеются примерно одинаковые интервалы, поэтому в среднем каждая из этих комбинаций будет употребляться одинаково часто. Значит, в среднем заготовка 268 мм будет получаться примерно 3–4 раза из каждой трубы. Очевидно, избытка заготовок 268 мм только за счет раскроя остатков не получится. Легко аналогично проверить, что только за счет остатков не может образоваться и избыток заготовок 470 мм. Значит, при работе с этой линейкой можно соблюсти требуемую комплектность.

**Изменения линейки, обеспечивающие возможность получения требуемого ассортимента заготовок.** Что следует предпринять, если некоторые заготовки все же получаются в избытке из одних только отходов? Остановимся для простоты на случае, когда в избытке получается всего лишь одна заготовка. Внимательное рассмотрение этого вопроса (приложение II) показывает, что в этом случае надо удалить с линейки некоторые комбинации, дающие получающуюся в избытке заготовку, причем в первую очередь следует устранить такое деление, в непосредственной близости от которого (несколько ближе к началу линейки) имеются другие комбинации.

Выбор снимаемого деления наиболее целесообразно производить следующим образом. Если мысленно укорачивать получающуюся в избытке заготовку, то все деления, в которых она фигурирует, будут как бы смещаться к началу линейки; то из них, которое первым совпадает при этом с каким-либо другим делением, и надо устранить.

Если при измененной линейке эта заготовка все еще будет получаться в избытке, то таким же приемом следует выбрать и устранить еще одно или несколько делений.

Не будем специально останавливаться на случае избытка нескольких заготовок (сказанного уже достаточно для решения подавляющего большинства практических задач); заметим только, что процесс внесения в линейку наиболее целесообразных изменений, позволяющих обеспечить возможность получения нужного ассортимента заготовок, совершенно аналогичен общему методу, описанному в § 6, гл. I.

**Рациональный порядок выполнения раскроя.** Прежде всего, безусловно, следует раскроить полностью все заготовки, которые вообще не фигурируют в делениях, нанесенных на линейке. Если бы в приведенном выше примере из той же трубки, из которой изготавливались детали 470 и 268 мм, необходимо было получать, например, небольшое количество заготовок длиной в 1,5 м, то можно было бы сохранить прежнюю линейку. При выполнении работы надо получить сначала все заготовки длиной 1500 мм, отрезая их до попадания остатка трубы в зону линейки. Затем кроить остальные заготовки, используя в первую очередь ранее оставшиеся концы труб.

Когда мы переходим к раскрою заготовок, фигурирующих на линейке, то можно вести работу несколькими различными приемами.

**ПЕРВЫЙ ПРИЕМ.** В крупносерийном производстве при наличии заделов можно, по мере надобности, получать очередную необходимую заготовку по упору, одновременно получая небольшое количество прочих заготовок. Комплектность будет при этом постепенно выравниваться за счет наличия некоторого задела заготовок. Некоторым неудобством этого простого по выполнению способа будет необходимость всякий раз сортировать и учитывать одновременно с большим числом основных заготовок некоторое количество других заготовок.

**ВТОРОЙ ПРИЕМ.** Если необходимо строго соблюдать комплектность при каждом запуске материала в раскрой и мы будем кроить один размер за другим, то при раскрое последующего размера остатки могут в некотором (обычно незначительном) количестве предназначаться для уже полученного ранее размера. В подобных случаях целесообразно первоначально раскраиваемые размеры получать в неполном количестве, а затем доукомплектовать их. Для этого следует составить инструкцию о порядке работы.

При наличии статистических сведений или экспериментальных наблюдений, позволивших установить средний состав заготовок, получающихся при работе с каждой установкой заднего упора, можно с большой степенью точности предвидеть, сколько заготовок каждого вида будет получаться из позже разрезаемого материала, и примерно такое количество заготовок первоначально недополучить.

В рассмотренном выше примере, как мы установили, на единицу материала получается заготовок в 470 мм при работе с упором 470 мм в среднем  $5,26 \times 0,734$  шт. и при работе с упором 268 мм в среднем еще  $1,56 \times 0,266$  шт. Доля общего числа заготовок в 470 мм, которая выходит из концевых остатков при раскрое заготовок другого размера, равна:

$$\frac{1,56 \times 0,266}{5,26 \times 0,734 + 1,56 \times 0,266} = 0,096 \times 0,1.$$

Таким образом, примерно 10% необходимого числа заготовок в 470 мм следует первоначально недополучить. Это служит основанием для составления следующей инструкции о целесообразном в данном случае порядке работы.

#### *Инструкция о порядке работы*

1. Кроить заготовки в 470 мм в количестве по 18 штук на вагон.
2. Кроить все заготовки 268 мм (в первую очередь из ранее отложенных концов).
3. Докроить заготовки в 470 мм из концов, отложенных на предыдущем этапе работы. (В случае надобности начать новую трубу.)

Количество первоначально недополучаемых заготовок можно определять и приближенно, лучше с некоторым преувеличением. Незначительное расхождение в комплектности всегда можно выровнять при раскрое последних полос материала.

Недостатком этого приема работы является необходимость дважды устанавливать упор на один и тот же размер, возвращаясь к ранее раскроенным размерам; однако при мелкосерийном производстве этот прием является наиболее выгодным,

так как позволяет свести до минимума незавершенное производство и одновременно с этим использовать все разнообразие нужных заготовок для максимального уменьшения отходов.

**ТРЕТИЙ ПРИЕМ.** Наконец, можно при раскросе последующих размеров пропускать комбинации, содержащие ранее полученные заготовки; это приведет к упрощению работы ценою некоторого увеличения отходов по сравнению с предыдущими способами. Чтобы упростить укомплектование, не увеличивая отходов, целесообразно отпускать материал для раскроя партии заготовок с некоторым запасом. Тогда при последовательном укомплектовании размеры большие куски материала, предназначенные на уже укомплектованный размер, могут быть сохранены и использованы в первую очередь при раскросе следующей партии. При этом резерв материала как бы заменяет собою наличие задела заготовок; но этот резерв благодаря крупным размерам хранящихся кусков может быть всегда использован и по другому назначению.

#### **§ 6. Пример рационального раскроя необрезных досок на заготовки для изготовления ящиков<sup>4)</sup>**

К задачам раскроя материала смешанных размеров относится большинство задач по раскросу пиловочного леса. Полное и точное рассмотрение таких задач требует самостоятельного исследования, далеко выходящего за рамки настоящей книги.

Мы ограничимся приближенным рассмотрением одного примера, близкого к задачам раскроя линейных материалов по длине. В условиях этого примера применение смешанных раскросов при торцовке досок позволяет не только добиваться возможно более полного использования длины доски в целом, но и более полного использования необрезной доски по длине нескольких зон ее ширины.

**ПРИМЕР 14.** На одном из заводов из бревен изготавливаются ящики под тару с наружными размерами  $184 \times 380 \times 520$  мм. Заготовки для набора ящиков строганные, для верхнего и нижнего днища заготовки из дощечек шириной не менее 7 см, боковые доски допускаются клееные, толщина досок в пределах 14–22 мм.

При раскросе бревен принята распиловка на доски толщиной 17 мм. Ширина заготовок не менее 8 см. Допускается обзол<sup>15)</sup> на одной пласти до 2 мм с каждой стороны.

Существующий порядок раскроя следующий: распиловка на раме (преимущественно брусовка), обрезка на обрезном станке, сушка, обработка (строжка и нанесение шпунта и гребня) на четырехстороннем станке, торцовка, набор. Для днища и крышки брусовка обеспечивает (частично) размеры, равные целой доле ширины ящика. Боковые доски (ширина 150 мм) набираются и склеиваются (или

---

<sup>15)</sup>Этот параграф составлен по рукописи работы Л. В. Канторовича 1942 г., выполненной для ярославского завода «Парижская коммуна» по трудовому соглашению (см. примечание в конце текста). (Прим. ред.)

<sup>16)</sup>При разборе этого примера мы позволили себе без пояснений использовать принятые в лесопилении технические термины.

торцуются) без обработки на четырехстороннем станке, строгаются на рейсмусных станках и обрезаются на циркульных пилах.

Такой порядок работы приводит к значительным отходам в виде опилок, горбылей, реек, отторцованных концов. Не останавливаясь на всех желательных изменениях в технологии, выборе поставов, порядке набора дощечек для днищ и боковых стенок, мы остановимся на экономии, которая может быть достигнута за счет предварительной торцовки необрезных досок и комбинирования при торцовке заготовок различных длин. Можно принять следующий порядок работы: раскрой бревна в цель, разметка необрезных досок по длине, торцовка на 2–3 части, обрезка, сортировка по ширине, сушка, обработка на четырехстороннем станке, окончательная торцовка, набор требуемой ширины, склеивание (для боковин) и обрезка на циркульной пиле.

Для того чтобы оценить увеличение в выходе, которое может быть получено при таком порядке работы, определим расчетный выход при том и другом порядке для раскроя досок при одном определенном поставе и диаметре бревна.

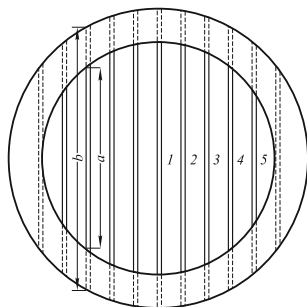


Рис. 18

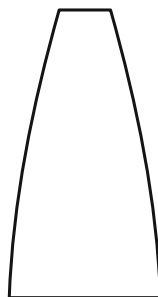


Рис. 19

Возьмем, к примеру, бревно диаметром 20 см, длиной 5,5 м, сбег 1 см на метр (диаметр в нижнем сечении 25,5 см). Объем такого бревна равен 0,226 м<sup>3</sup>. Постав «в цель — четный» из 10 досок по 17 мм; пропилы 3 мм (рис. 18). Отметим, что меньшая плоть каждой доски находится от центра на расстоянии, равном 18,5 мм для первой доски, 38,5 мм — второй, 58,5 мм — третьей, 78,5 мм — четвертой, 98,5 мм — для пятой. Принимаем, как это обычно считают при расчете в среднем на одно бревно, что бревно имеет вид параболоида вращения. Тогда меньшая плоть каждой доски имеет вид параболической трапеции (рис. 19). На рисунке продольный масштаб сокращен. Меньшее основание доски обозначаем через  $a$ , а большее — через  $b$  (для каждой доски  $a$  и  $b$  имеют свои значения).

Ввиду того что нам придется раскраивать преимущественно дощечки длиной 52 см и лишь около 1/4 части (по числу досок одинаковой ширины) дощечки длиной 38 см, мы приведем таблицу длин различных наборов таких досок.

Составим раскрой первой доски. Легко подсчитать, что для первой доски:

$$a = \sqrt{20^2 - (2 \cdot 1,85)^2} = 19,8 \text{ см}, \quad b = \sqrt{25,5^2 - (2 \cdot 1,85)^2} = 25,2 \text{ см}.$$

Таким образом, ширина доски в разных частях 20–25 см. Длина доски 550 см. Выбираем подходящее число в табл. 1. Это 544 см. Доску будем раскраивать сначала по длине на 3 части, каждая из которых обрезается потом по ширине. Ширину



Таблица 1

Состав набора	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
$52n$		52	104	156	208	260	312	364	416	468	520
$38 + 52n$	38	90	142	194	246	298	350	402	454	506	558
$38 \times 2 + 52n$	76	128	180	232	284	336	388	440	492	544	
$38 \times 3 + 52n$	114	166	218	270	322	374	426	478	530		

частей после обрезки принимаем равной 20, 22 и 24 см. Далее находим, что ширину 20 см доска имеет в начале, ширину 22 см — на расстоянии 215 см, ширину 24 см — на расстоянии 415 см.

Заменяем эти расстояния на подходящие числа в таблице: 415 — на 402, 215 — на 208 (числа берем из строк, предшествующих той, из которой взят размер 544, чтобы обеспечить полное использование материала по длине<sup>17)</sup>). Каждая из полученных при такой торцовке частей может быть раскроена точно на дощечки нужных размеров: первая часть даст 4 дощечки  $52 \times 20$ , вторая — 3 дощечки  $52 \times 22$  и одну  $38 \times 22$ , третья — 2 дощечки  $52 \times 24$  и одну  $38 \times 24$ .

Общая площадь получаемых дощечек:

$$S = 20 \times 208 + 22 \times 194 + 24 \times 142 = 11\,836 \text{ см}^2.$$

При обычном раскрое мы получили бы одну обрезную доску шириной 20 см, из которой после торцовки было бы сделано 10 дощечек по 52 см с общей площадью:

$$S_0 = 20 \times 520 = 10\,400 \text{ см}^2.$$

Вторая доска:

Ширину обрезки для трех участков доски принимаем равной 18, 20, 22 см. Расстояния от начала доски до места с соответствующей шириной — 0; 130; 310 см, длина доски — 550 см. Принятые по таблице расстояния для первой торцовки 101, 298, 544 см. В результате раскроя получим:

$$S = 18 \times 104 + 20 \times 194 + 22 \times 246 = 11\,164 \text{ см}^2,$$

$$S^0 = 18 \times 520 = 9360 \text{ см}^2.$$

Третья доска:

$$a = 16,2 \text{ см}, \quad b = 22,6 \text{ см}.$$

<sup>17)</sup> Можно брать и несколько меньшее число, поскольку допускается частичный обзол, а также ввиду того, что общая длина доски используется не совсем полно, и вся группа заготовок будет отрезаться, начиная от широкого конца доски. (Практически эти расстояния могут отмечаться на самой доске при ее разметке.)

Длина доски 550 см. Используемая длина 544 см.

$$S = 16 \times 104 + 18 \times 194 + 20 \times 246 = 10\,076 \text{ см}^2,$$

$$S_0 = 16 \times 520 = 8320 \text{ см}^2.$$

Четвертая доска:

$$a = 12,4 \text{ см}, b = 20,5 \text{ см}.$$

Расстояние	Ширина		
	12	15	18
Точное	0	156	374
Принимаемое	0	156	364

Длина доски 550 см. Используемая длина 544 см.

$$S = 12 \times 156 + 15 \times 208 + 18 \times 180 = 8232 \text{ см}^2,$$

$$S_0 = 12 \times 520 = 6240 \text{ см}^2.$$

Пятая доска:

$$a = 3,5 \text{ см}, b = 16,1 \text{ см}.$$

Поскольку минимально допустимая ширина заготовок 8 см, принимаем ширину обрезки первоначально отторцованных участков 8, 11, 14 см.

Длина доски 550 см. Используемая длина 440 см.

Расстояние	Ширина		
	8	11	14
Точное	115	240	405
Точное за вычетом первого отторцованного куска	0	125	290
Принимаемое	0	104	298

$$S = 8 \times 104 + 11 \times 194 + 14 \times 142 = 4954 \text{ см}^2.$$

При обычном раскрое выгоднее всего обрезную доску делать длиной 4 м и шириной 9 см. Из нее выйдет 7 дощечек  $52 \times 9$  см:

$$S_0 = 9 \times 364 = 3276 \text{ см}^2.$$

Суммируя площадь по всем 10 доскам и учитывая толщину доски 17 мм, найдем общий объем продукции при целесообразном и примитивном методе раскроя:

$$V = 0,157 \text{ м}^3; \quad V_0 = 0,128 \text{ м}^3.$$

Полезный выход соответственно равен 69,5 и 56,5%.

В данном случае рациональный раскрой дает из бревна  $0,029 \text{ м}^3$  дополнительной продукции, что составляет по сравнению с примитивным раскромом увеличение на 22,6%.

В рассмотренном примере приведено сравнение крайних вариантов. Практикуемое применение брусочки и частичной обрезки на более широкие доски с использованием получающихся дилен может несколько поднять полезный выход по отношению к принятому для сравнения способу.

Но и по сравнению с такими более совершенными способами работы предлагаемый порядок раскроя сохранит существенное преимущество в полезном выходе.

Отметим, что, поскольку бревна имеют различия по толщине, сбегу, длине и форме, в производственных условиях использование табл. 1 придется заменить работой по специальной линейке, используемой разметчиком. Тот же порядок работы может быть принят, когда пиловочник идет не полностью на тару, а центральные доски используются для каких-либо других надобностей. С некоторыми изменениями те же соображения могут найти применение и в тех случаях, когда по производственным условиям вместо распиловки вразвал используется брусочка.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### I. Доказательство существования индексов, связанных с максимально экономным планом раскроя.

(Теоретическое добавление к гл. I)

В § 1, гл. I поставлены три основные задачи, к которым приводит ряд вопросов раскроя, введено понятие индекса и сформулированы свойства плана и индексов, соблюдение которых достаточно для того, чтобы план был максимально экономным в условиях соответствующей задачи. Там же были указаны пути отыскания такого плана и индексов. Однако оставался открытым вопрос о существовании плана и индексов, обладающих требуемыми свойствами. Между тем установление существования индексов важно, так как оно показывает возможность применения индексов в каждой задаче. Поскольку отсутствие приводимых ниже доказательств не могло помешать использованию общих методов в практических целях, эти доказательства помещены отдельно.

**Задача I.** Из одинаковых кусков материала раскраиваются комплекты заготовок  $n$  наименований. Каждая из заготовок требуется соответственно в количестве  $m_1, m_2, \dots, m_n$  штук на комплект. Требуется составить наиболее экономный план раскроя.

**Анализ задачи.** Очевидно, есть лишь конечное число способов раскроить целый кусок материала на заготовки нужных наименований. Пусть существует  $N$  различных технически допустимых раскrojов  $R_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Обозначим через  $a_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, N$ ) число заготовок  $i$ -го наименования, получающихся при раскrojе  $R_k$ . Каждому раскroю  $R_k$  можно сопоставить вектор  $\overline{R}_k(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве.

Допустим теперь, что составлен некоторый план раскроя, согласно которому по каждому раскroю  $R_k$  разрезается определенная доля  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N; \sum_{k=1}^N \lambda_k = 1; \lambda_k \geq 0$ ) всего материала. Средний состав заготовок, получаемых по этому плану на единицу израсходованного материала, характеризуется проекциями вектора:

$$\overline{M} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \overline{R}_k.$$

Различным планам раскроя соответствуют всевозможные системы чисел  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), удовлетворяющие условиям:

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N). \quad (*)$$

Как известно из общей теории выпуклых тел, совокупность концов векторов  $\overline{M}$  в условиях (\*) образует выпуклый многогранник  $P$ , являющийся выпуклой оболочкой концов векторов  $\overline{R}_1, \overline{R}_2, \dots, \overline{R}_N$ . Вершины многогранника  $P$  лежат на концах некоторых из векторов  $\overline{R}_k$ <sup>18)</sup>.

<sup>18)</sup>См., например, Александров А. Д. Выпуклые многогранники. — М.: Гостехиздат, 1950. — Гл. 1, § 3.

По смыслу задачи: 1) все числа  $a_{ik} \geq 0$ ; 2) все числа заготовок в комплекте  $m_i > 0$ ; 3) если из куска материала можно получить некоторые заготовки, то можно получать и часть из них; 4) раскрой, не дающий ни одной заготовки, всегда выполним; 5) из целого куска материала может быть получена одна заготовка любого наименования (иначе, вообще, раскрой невозможен).

Отсюда следует, что  $P$  представляет собою многогранник, прилегающий к началу координат [в силу (4)], не вырождающийся в фигуру меньшего чем  $n$  числа измерений (5), представляющий часть первого октанта (1), отсеченную многогранной поверхностью. Любая опорная плоскость к этой поверхности либо пересекает положительную часть каждой из осей, либо параллельна некоторым из них (3).

Для того чтобы план раскроя давал требуемый ассортимент заготовок, необходимо, чтобы вектор  $\bar{M}$  был параллелен вектору  $\bar{m}(m_1, m_2, \dots, m_n)$ . Концы векторов, удовлетворяющих этому условию, лежат на луче  $L$ :

$$\bar{r} = \bar{m}t \quad (t \geq 0). \quad (**)$$

Этот луч проходит внутри первого октанта (2). Очевидно, среди всех планов, обеспечивающих необходимый ассортимент, наибольшее количество комплектов на затрачиваемую единицу материала будет давать тот план, для которого конец вектора  $\bar{M}$  лежит в точке  $M$ , где луч  $L$  пересекает границу многогранника  $P$ .

Через каждую точку границы выпуклого тела проходит хотя бы одна опорная плоскость. Пусть  $T$  — опорная плоскость к  $P$  в точке  $M$ .

Всякая точка границы выпуклого многогранника принадлежит выпуклой оболочке тех вершин многогранника, которые попали в проходящую через эту точку опорную плоскость. Поэтому найдутся такие числа  $\lambda_k$ , что:

$$\bar{M} = \sum_{k=1}^l \lambda_k \bar{R}_k \quad \left( k = 1, 2, \dots, l; \lambda_k \geq 0; \sum_{k=1}^l \lambda_k = 1 \right),$$

где  $\bar{R}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) — те векторы, концы которых попали в плоскость  $T$ . Таким образом, существует наиболее экономный план раскроя, использующий все или некоторые из раскroев  $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_l$ . Запишем уравнение плоскости  $T$ :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = C$$

и соотнесем каждой из заготовок в качестве индекса соответствующее число  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Для векторов  $\bar{R}_k$ , лежащих в плоскости  $T$ ,

$$\sum_{i=1}^n p_i a_{ik} = C,$$

т. е. в соответствующих раскroях  $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_l$  сумма индексов получаемых заготовок равна  $C$ . Для остальных

$$\sum_{i=1}^n p_i a_{ik} < C.$$

Таким образом, существуют индексы, при которых все раскroи наиболее экономного плана дают одинаковую сумму индексов  $C$ , а любой другой раскрой дает сумму индексов, не бoльшую  $C$ .

**Задача 2.** Допускается заказывать в произвольном количестве материал нескольких размеров; остальные условия те же, что в задаче 1.

В новых условиях можно почти дословно повторить анализ, проведенный для задачи 1. Придется только перечислить все раскрои для каждого габарита материала и соотносить каждому раскрою  $R_k$  вектор  $\bar{R}_k(a_{1k}/v_j, a_{2k}/v_j, \dots, a_{nk}/v_j)$ , где  $v_j$  — вес<sup>19)</sup> того куса материала, из которого выполняется раскрой  $R_k$ . Вектор  $M$  в этом случае характеризует состав заготовок, получаемых на 1 кг затраченного материала. Соображения, совершенно аналогичные приведенным для задачи 1, в условиях задачи 2 показывают существование наиболее экономного плана раскроя и индексов  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , обладающих свойствами, сформулированными в § 3, гл. I.

**Задача 3.** Материал поступает нескольких размеров во вполне определенных количествах: доли от общего числа целых кусков материала, в которых поступает каждый из размеров, соответственно равны  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$  ( $\sum_{j=1}^l \mu_j = 1$ ; все  $j > 0$ ). Остальные условия те же, что в задаче 1.

Каждый из габаритов материала допускает свои способы раскроя на нужные заготовки. Обозначаем:  $R_k^j$  ( $k = 1, 2, \dots, N_j$ ) — раскрой  $j$ -го габарита материала.

По существу, мы имеем один вид материала — «смесь», причем в среднем на каждый кусок «смеси» доля  $\mu_1$  допускает раскрои  $R_k^1$  ( $k = 1, 2, \dots, N_1$ ), доля  $\mu_2$  — любой из раскроев  $R_k^2$  ( $k = 1, 2, \dots, N_2$ ) и т. д. При этом можно считать, что к смеси применяются различные комплексные раскрои  $(R_{k_1}^1, R_{k_2}^2, \dots, R_{k_l}^l)$ , где  $1 \leq k_i \leq N_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, l$ . Продукцией каждого комплексного раскроя «единицы смеси» следует считать суммарную продукцию, которая получится, если часть  $\mu_1$  разрезать по соответствующему раскрою  $R_{k_1}^1$ , часть  $\mu_2$  — по  $R_{k_2}^2$  и т. д. Поскольку комплексный раскрой «смеси» получается из комбинации любых раскроев каждого из габаритов, число вводимых таким образом в рассмотрение комплексных раскроев будет  $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_l$ .

Используя анализ задачи 1, можно утверждать, что существуют наиболее экономный план раскроя и такая система индексов заготовок  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , при которых каждый использованный комплексный раскрой дает в среднем на «единицу смеси» одинаковую сумму индексов  $C$ , а всякий другой комплексный раскрой дает сумму индексов, не бóльшую  $C$ .

Возьмем один из фактически используемых в наиболее экономном плане комплексных раскроев  $(R_{k_1}^1, R_{k_2}^2, \dots, R_{k_l}^l)$  и подсчитаем сумму индексов заготовок отдельно для каждого из фигурирующих в нем раскроев  $R_{k_1}^1, R_{k_2}^2, \dots, R_{k_l}^l$ . Получим некоторые числа  $C_1, C_2, \dots, C_l$ , причем, очевидно, будет соблюдено равенство:

$$\sum_{j=1}^l \mu_j C_j = C.$$

Ни при каком раскрое  $R_k^j$  нельзя получить из соответствующего габарита материала заготовки с суммой индексов, бóльшей  $C_j$ . Иначе бы комплексный раскрой

<sup>19)</sup> Или стоимость, объем или иной показатель, по которому желательно достичь минимального расхода материала.

$(R_{k_1}^1, R_{k_2}^2, \dots, R_{k_{j-1}}^{j-1}, R_{k_j}^j, R_{k_{j+1}}^{j+1}, \dots, R_{k_l}^l)$  дал сумму индексов, большую  $C$ , что невозможно.

В каждом отдельном раскрое  $R_k^j$ , используемом в наиболее экономном плане, сумма индексов равна  $C_j$ . (Допустим, что хоть в одном раскрое эта сумма меньше соответствующего  $C_j$ . Поскольку в комплексном раскрое, содержащем  $R_k^j$ , сумма индексов равна  $C$ , должен найтись другой, входящий в него частный раскрой  $R_k^{j'}$ , для которого сумма индексов больше соответствующего  $C_{j'}$ , что по доказанному выше невозможно.)

Итак, в условиях задачи 3 установлено существование плана и индексов, обладающих перечисленными в § 3, гл. I свойствами<sup>20)</sup>.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Все рассмотренные задачи можно формулировать чисто аналитически. Так, например, задача 1 ставится следующим образом. Найти числа  $\lambda_k$ , удовлетворяющие условиям:

- 1)  $\lambda_k \geq 0$ ;

- 2)  $\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$ ;

- 3) если ввести обозначение

$$z_l = \frac{1}{m} \left( \sum_{k=1}^N a_{lk} \lambda_k \right),$$

то  $z_1 = z_2 = \dots = z_n$  и их общее значение должно быть максимальным.

Более общие экстремальные задачи, к которым приводят многие технические вопросы и для решения которых также оказывается полезным применение метода индексов (разрешающих множителей), рассмотрены в цитированной брошюре Л. В. Канторовича.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На геометрической схеме задачи 1 легко проследить сущность изложенных в § 5 и 6 главы I общих методов. Первому методу соответствует монотонное приближение к точке  $M$  по лучу  $L$ . Второму методу соответствует приближение к точке  $M$  по поверхности многогранника  $P$ .

Общая трактовка и использование второго метода для ряда математических задач даны в работе Л. В. Канторовича «Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем», ДАН, 28 (1940), стр. 212–215.

<sup>20)</sup> Доказательству можно придать ту же геометрическую ясность, которую имел анализ задачи 1. Если построить многогранники  $P_1, P_2, \dots, P_l$ , характеризующие продукцию, получающуюся при различных планах раскроя в среднем на один кусок материала соответствующего габарита, то продукция, получаемая в среднем на один кусок материала из имеющейся смеси: материалов при всевозможных планах раскроя, характеризуется многогранником  $P = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_l P_l$ , где сумму следует понимать в смысле теории смешанных объемов (Ср. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. — М.: Гостехиздат. — Гл. IV, § 2). Тогда индексы заготовок соответствуют коэффициентам уравнения опорной плоскости к многограннику  $P$  в той точке, где луч  $mt$  ( $t > 0$ ) пересекает границу  $P$ .

## II. О линейке для раскроя линейных материалов смешанных длин.

(Теоретическое добавление к § 5, гл. II)

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Для массового раскроя поступает материал смешанных длин  $l$  (от  $l_{\min}$  до  $l_{\max}$ ), закон распределения которых  $\varphi(l)$  считается известным. Необходимо получать комплекты заготовок определенных длин:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . В каждом комплекте должно быть соответственно по  $m_1, m_2, \dots, m_n$  каждого из видов заготовок. Допустимыми считаются лишь те раскрои, при которых от полосы материала отрезается одна и та же заготовка до тех пор, пока остаток не станет короче определенной длины  $L^{21)}$ , после чего остаток может кроиться на любую уместающуюся в нем комбинацию заготовок. Требуется составить наиболее экономный план раскроя, учитывая, что материал предварительно не сортируется, но, как только остаток стал короче  $L$ , допускается выбор раскроя остатка.

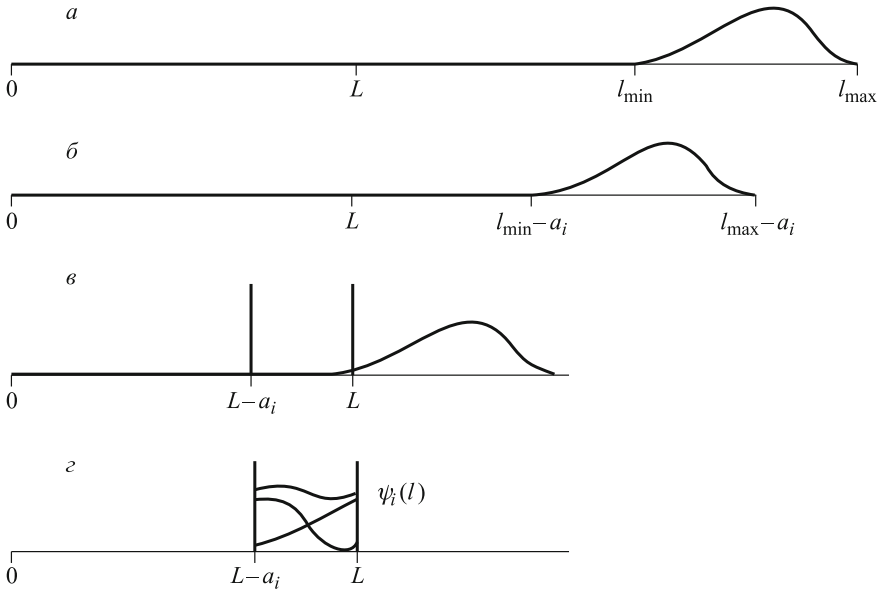


Рис. 49

**АНАЛИЗ ЗАДАЧИ.** Можно считать, что кроится один вид материала — заданная смесь с известным законом распределения длин. Выясним, какие раскрои этой смеси возможны и какова их продукция в среднем на одну разрезаемую полосу?

Допустим, что раскрой начинается с многократного отрезания заготовок длиной  $a_i$ . Если, например, исходным материалом служит смесь полос с законом распределения длин, изображенным на рис. 49, а, то после отрезания одной заготовки закон распределения длин остатков будет несколько иным (рис. 49, б). Затем, после того как отрезано несколько заготовок, часть полос уже станет короче длины  $L$ , а часть допустит отрезание еще одной-двух заготовок  $a_i$  (рис. 49, в). В результате получаются остатки с новым, но также вполне определенным (по исходному закону

<sup>21)</sup>Предполагается, что величина  $L$  существенно меньше длины материала.



и длине  $a_i$ ) законом распределения длин  $\psi_i(l)$  в пределах от  $L - a_i$  до  $L$  (рис. 49, з). Заметим, что наложение частей исходного закона распределения обычно приближает окончательное распределение к равномерному, как это случилось в примере, изображенном на рис. 49.

Пусть составлен перечень всех комбинаций заготовок с суммарными длинами, меньшими  $L$ . Длины этих комбинаций обозначим в порядке возрастания:  $b_1, b_2, \dots, b_N$ . Допустим теперь, что остатки с законом распределения  $\psi_i(l)$  рассортированы по длинам, попадающим в интервалы  $(b_1, b_2), (b_2, b_3), \dots, (b_{N-1}, b_N)$ . В каждый интервал их попадает определенное [законом  $\psi_i(l)$ ] количество. Остатки, попавшие в каждый из интервалов  $(b_k, b_{k+1})$ , можно кроить на комбинацию  $b_k$  или любую, ей предшествующую.

Если всеми способами сочетать различные раскрои остатков из каждой группы, для каждого сочетания подсчитать получающуюся продукцию и добавить к ней ранее полученное число заготовок  $a_l$ , то мы получим всевозможные комплексные раскрои смеси, начинающиеся с заготовки  $a_l$ . Повторяя те же соображения для каждой заготовки  $a_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ), мы получаем в итоге конечное число комплексных раскросов одного материала (смеси), причем для каждого раскроя продукция вполне определена.

Таким образом, задача сводится к разобранной уже в теоретическом добавлении к гл. I задаче 1<sup>22)</sup>.

Согласно полученным там выводам, можно утверждать, что существует максимально экономный план раскроя. Кроме того, каждой заготовке может быть отнесено некоторое число (ее индекс) таким образом, что все примененные в этом плане комплексные раскрои дают одинаковую сумму индексов заготовок, получаемых в среднем на одну полосу при раскрое имеющейся смеси. Все остальные раскрои дают не ббльшую сумму индексов.

Рассмотрим только те из комбинаций  $b_1, b_2, \dots, b_N$ , которые употребляются в наиболее экономном плане при раскрое хотя бы одного концевое остатка, и подсчитаем сумму индексов заготовок для каждой такой комбинации. Эта сумма должна монотонно возрасть вместе с длиной избранных комбинаций (иначе немедленно обнаружился бы раскрой с суммой индексов большей, чем в примененных раскроях).

Допустим теперь, что будет сделана линейка длиной  $L$ , на ней отмечены длины избранных комбинаций и за каждым делением указан список заготовок, фигурирующих в отмеченной комбинации, а также в более коротких комбинациях, равноценных ей по сумме индексов. Легко проследить, что работа по такой линейке методом, изложенным в § 5, гл. II, дает возможность реализовать при массовом выполнении раскроя наиболее экономный план.

Такая линейка отличается от линейки, получаемой нанесением всех комбинаций  $b_1, b_2, \dots, b_N$ , лишь отсутствием некоторых, как бы снятых с линейки делений, и указанием на равноценность некоторых следующих друг за другом делений. Составление такой линейки может проводиться совершенно аналогично общему решению задач 1 и 3 методом, описанным в § 6, гл. I. Именно, сначала предполагается, что используется линейка с нанесением всех комбинаций (т. е. каждый остаток

---

<sup>22)</sup> Число раскросов при этом чрезвычайно велико, однако все сказанное имеет целью лишь принципиальный анализ и не должно практически выполняться при решении конкретных задач.

Таблица 1

Таблица 2

№ п/п	Номер детали	Размеры <sup>1</sup> заготовки в мм	Количество на 1 вагон	Приближенное значение индексов <sup>2</sup>			
1	2-09-36-10	513×650	1			½	
2	2-09-36-11	513×1020	1			1	
3	2-09-36-12	513×1250	1			1	
4	2-09-36-13/14	513×886	38	1			
5	2-09-36-16	513×875	1			1	
6	2-09-36-17	513×1105	1			1	
7	2-09-36-20	988×310	1				1
8	2-09-36-21	988×680	1				2
9	2-09-36-22	988×225	1				½
10	2-09-36-23	988×345	39	1			
11	2-09-36-25	988×35	1		0		
12	2-09-36-26	988×160	1		0		
13	2-09-36-27	988×180	1				0
14	2-09-36-28	988×240	1				½
15	2-09-36-30	433×650	1			½	
16	2-09-36-31	433×1020	1			1	
17	2-09-36-32	433×1250	1			1	
18	2-09-36-33/34	433×886	38	1			
19	2-09-36-36	433×875	1			1	
20	2-09-38-37	433×1105	1			1	
21	2-09-38-07	360×792	1			½	
22	2-09-45-03	1310×255	1				1
23	2-09-45-04	990×255	1				1
24	2-09-45-05	300×805	1			½	
25	2-09-45-06	300×757	1			½	
26	46-41-1-08	1085×290	18	1			
27	46-42-1-01	485×290	3		0		
28	2-41-1-81	78×62	20		0		
29	2-42-3-05	75×520	1		0		
30	2-25-22	1182×429	1				1
31	2-25-23	772×429	1				½
32	2-25-41	1182×322	1				1
33	2-25-42	772×322	1				½
34	51-39-04	252×402	2		0		
35	51-00-17	772×675	4				1½
36	51-05-04	772×581	2				1
37	2-41-5-01	143×60	10		0		
38	2-44-6-38	674×315	2				½
39	2-44-4-20	375×255	4		0		
40	2-44-4-35	455×546	1		0		
41	2-44-4-39	1260×400	1				1
42	2-44-3-01	652×466	1				½
43	2-44-15-01	165×600	1		0		
44	2-61-52/53	750×215	2				¼
45	2-61-54	390×215	2		0		
46	2-47-2-10	236×115	1		0		
47	2-46-10	600×60	1		0		

<sup>1</sup> Первый из размеров направлен вдоль волокна.

<sup>2</sup> Столбцы в табл. 2 разделены исключительно для того, чтобы сделать нагляднее последовательность выбора индексов.

раскраивается на комбинацию, наиболее полно использующую длину остатка). Если при этом окажется, что некоторые заготовки неминуемо получаются в избытке, следует последовательно понижать индексы избыточных заготовок (первоначально роль индексов играли длины заготовок). Каждый раз линейка изменяется: устраиваются комбинации, дающие меньшую сумму индексов, чем некоторая, по длине предшествующая им комбинация, а при наличии комбинаций, равноценных по сумме индексов, разрешается вместо большей кроить меньшую из комбинаций. Как и в общем методе § 6, гл. I, эти преобразования обязательно приводят, в конце концов, к линейке, обеспечивающей выполнение плана максимально экономного в условиях поставленной задачи.

### III. Пример решения задачи раскроя с использованием листов нескольких размеров.

(Добавление к § 2, гл. III)

**ПРИМЕР 24.** Из венированной фанеры толщиной 10 мм для деталей модернизированного пассажирского вагона выкраиваются заготовки, перечисленные в табл. 1.

Листы фанеры могут быть заказаны в любом соотношении размерами  $1525 \times 1525$ ,  $1525 \times 1220$  и  $1220 \times 1525$  мм (первый размер указывает направление волокна дубового шпона, которым облицована фанера). Ширина пропилов 4 мм. Допуск на возможную неточность размеров листа  $\pm 10$  мм. Необходимо выбрать наиболее рациональный заказ материала и указать его раскрой так, чтобы достичь наиболее экономного (по кубатуре) расхода фанеры.

#### Ход решения задачи

1) Поставленная задача относится к типу задачи 2 (§ I, гл. I): в ней есть возможность выбирать три габарита листов, два из которых имеют одинаковую кубатуру. Поэтому в окончательном плане раскроя суммы индексов в примененных раскроях листов  $1525 \times 1220$  и  $1220 \times 1525$  мм должны быть одинаковы ( $C_1$ ), а в листах  $1525 \times 1525$  мм — другими ( $C_2$ ). При этом отношение  $C_1 : C_2$  должно равняться отношению объемов этих листов:

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{1525 \cdot 1220 \cdot 10}{1525 \cdot 1525 \cdot 10} = \frac{4}{5}.$$

Примем для простоты  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 5$ . (Если это окажется неудобным, мы можем увеличить затем  $C_1$  и  $C_2$  в одинаковое число раз.)

**Таблица 3**

Номер детали	Размеры заготовки в мм	Количество на 1 вагон
2-09-36-13/14	513×886	38
2-09-36-23	988×345	39
2-09-36-33/34	433×886	38
46-41-1-08	1085×290	18

2) Рассмотрим только преобладающие заготовки и выберем их индексы так, чтобы из листов  $1525 \times 1220$  и  $1220 \times 1525$  нельзя было получать эти заготовки с суммой индексов, большей 4, из листа  $1525 \times 1525$  — с суммой индексов, большей 5, а из полноценных раскроев можно было получить основную массу этих заготовок.

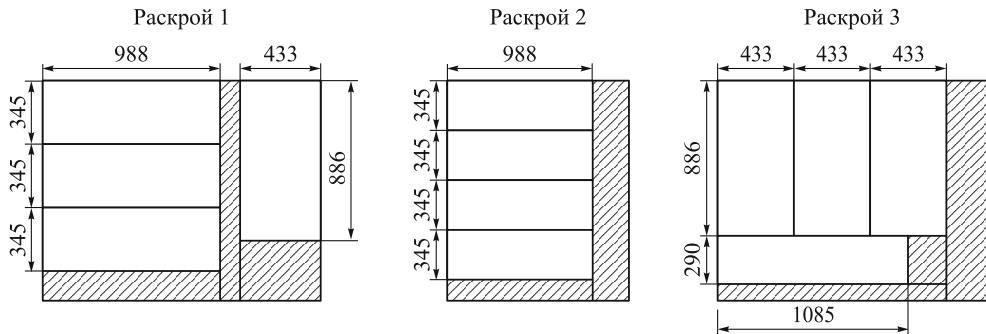


Рис. 50

Для этого выберем сначала индексы так, чтобы несколько самых естественных раскроев были полноценными. (Затем можно уменьшить какой-либо из индексов, если найдется раскрой с суммой, большей допустимой.)

Возьмем несколько целесообразных раскроев (рис. 50).

Заготовка  $513 \times 886$  будет иметь тот же индекс, что и заготовка  $433 \times 886$ , так как в любом из раскроев 1–3 эти заготовки могут частично или полностью замещать друг друга. Если обозначить индексы перечисленных в табл. 3 заготовок  $x, x, y, z$  и потребовать, чтобы приведенные три раскроя были полноценными, то мы получим условия:

$$3x + z = 4, \quad 4y = 4, \quad 3x + y = 4,$$

откуда  $x = 1, y = 14, z = 1$ .

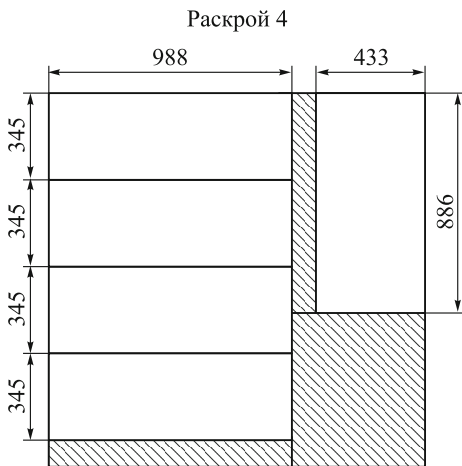


Рис. 51

Несложный пересмотр ряда вариантов обнаруживает еще целый ряд полноценных раскроев этих заготовок, например, рис. 51.

Но ни одного раскроя с суммой, большей 4 и 5, для соответствующих листов не находится. Полученные индексы вносим в табл. 2 (первый столбец).

3) Установим индексы некоторых полос.

Полосы с индексом 0. Крупные прямоугольные остатки, заштрихованные в раскроях 1, 2, 3, 4, очевидно, имеют индекс 0.

Полоса А. Если от листа  $1525 \times 1525$  отрезать четыре заготовки  $345 \times 988$ , то остающаяся полоса А (рис. 52)

будет иметь индекс  $5 - 4 = 1$ . Размер полосы А равен  $537 \times 1525$ , а с учетом допусков и пропилов —  $523 \times 1515$ .

Полоса В. Если от листа  $1525 \times 1525$  отрезать три заготовки  $345 \times 988$  и одну  $433 \times 886$ , то остающаяся полоса В (рис. 53) будет иметь индексы  $5 - 3 - 1 = 1$ . Размер полосы В равен  $1525 \times 490$ , а с учетом допусков и пропилов —  $1515 \times 468$ . Мы отмечаем эти две полосы как наиболее крупные, имеющие сравнительно небольшой индекс.

4) Выберем индексы других заготовок. Каждой заготовке приписываем возможно меньший индекс, при котором ее еще можно получить хотя бы в одном полноценном (по сумме индексов) раскрое из полосы или нового листа.

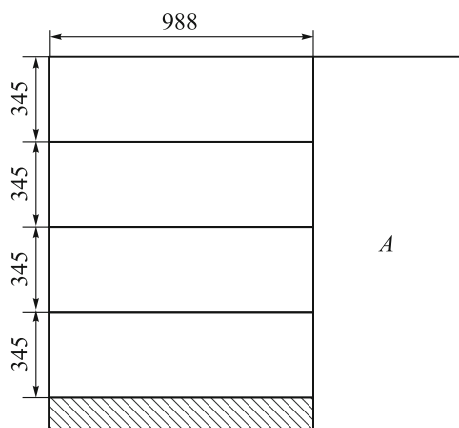


Рис. 52

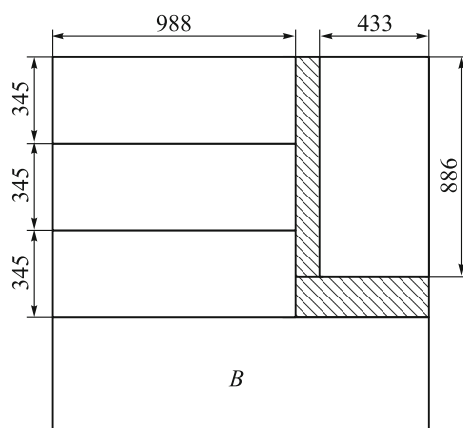


Рис. 53

Прежде всего, заготовкам, уместяющимся в полосах, имеющих индекс 0, приписываем индекс 0. Получающиеся индексы вносим в табл. 2 (второй столбец).

Затем приписываем индекс 1 заготовкам, которые могут быть получены с небольшими отходами из полосы *A*, и индекс  $1/2$  тем заготовкам, которые дважды укладываются в полосе *A*.

Результаты внесены в табл. 2 (третий столбец).

ЗАМЕЧАНИЕ. Заготовкам  $360 \times 792$  и  $300 \times 805$  приписан индекс  $1/2$ , так как они могут уместиться в полосе *A* вместе с заготовкой  $433 \times 650$ , имеющей индекс  $1/2$ .

Затем приписываем индекс 1 заготовкам, хорошо уместяющимся в полосе *B*, и индекс  $1/2$ , уместяющимся в ней дважды.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Заготовке  $988 \times 240$  приписан индекс  $1/2$ , так как она уместится в полосе *B* вместе с заготовкой  $988 \times 225$ , имеющей индекс  $1/2$ .

2. Заготовкам  $772 \times 429$  и  $772 \times 322$  приписан индекс  $1/2$  потому, что они уместятся в полосе *B* вместе с заготовками  $652 \times 466$  или  $674 \times 315$ , имеющими индекс  $1/2$ .

3. Заготовке  $988 \times 180$  приписываем индекс 0, так как она уместится в полосе *B* вместе с заготовками  $1305 \times 255$  или  $990 \times 255$ , имеющими индекс 1.

4. Заготовке  $215 \times 750$  приписываем индекс  $1/4$ , так как она уместится в полосе *B* четыре раза.

Полученные результаты вносим в табл. 2 (четвертый столбец).

Переходим к оставшимся заготовкам. Заготовка  $988 \times 680$  занимает место двух заготовок  $988 \times 345$ , припишем ей индекс 2. Испробовав несколько раскроев, убеждаемся, что заготовке  $772 \times 675$  нельзя приписывать индекс меньше чем  $1\frac{1}{2}$ , а при таком индексе она может быть получена в полноценном раскрое (рис. 54).

В качестве наименьшего индекса заготовке  $772 \times 581$  можно приписать 1. При таком индексе она еще может быть получена в полноценном раскрое (рис. 55).

2 листа  $1220 \times 1525$

Из отхода кроить  $433 \times 1250$  и

$433 \times 650 + 360 \times 792$

Карта № 1

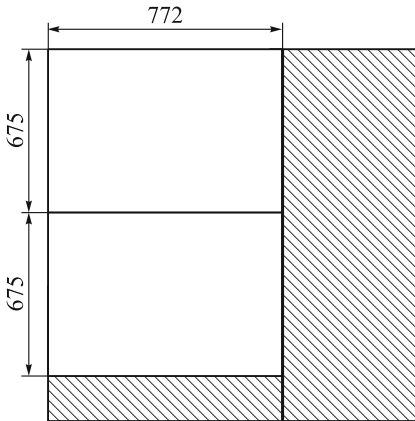


Рис. 54

1 лист  $1525 \times 1220$

Карта № 2

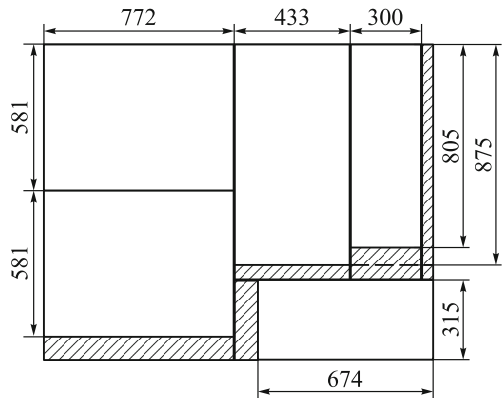


Рис. 55

5. Приступаем к составлению плана раскроя. Постараемся обходиться лишь полноценными раскроями. Начинаем с тех заготовок, которые требуют вполне определенных раскроев — карты № 1 и 2. Затем составляем карты с участием заготовок, необходимо требующих полосы *A* полной длины.

1/2 листа  $1525 \times 1525$

(1 лист на 2 вагона)

Карта № 3

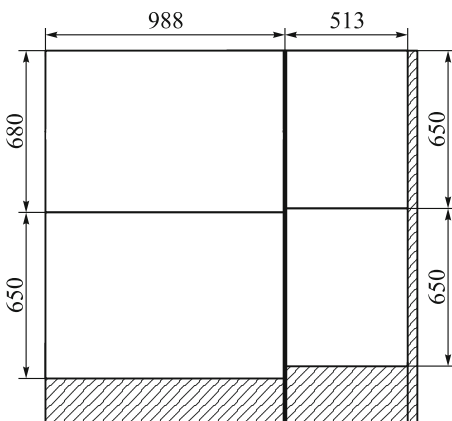


Рис. 56

2 листа  $1525 \times 1525$

Из отходов *A* кроить заготовки  
 $513 \times 1250$  и  $513 \times 875 + 455 \times 546$

Карта № 4

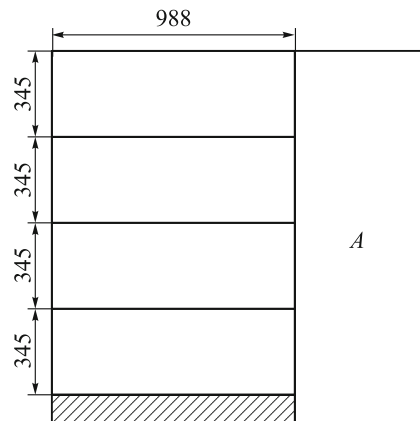


Рис. 57

Теперь раскроем заготовки, требующие также полосы *A*, но могущие уместиться в более короткой полосе:

Раскрой полос *A*:

$513 \times 1105 - 1$  шт.,  $513 \times 1020 - 1$  шт.,  $513 \times 875 - 1$  шт.,  
 $433 \times 1105 - 1$  шт.,  $433 \times 1020 - 1$  шт.,  $433 \times 886 + 485 \times 290 - 3$  шт.

8 листов  $1525 \times 1220$

6 раз. Из одного отхода  
 кроить заготовку  
 $988 \times 160$

2 раза. Из одного  
 отхода I кроить:  
 $988 \times 300 + 988 \times 180$ .  
 Из второго отхода:  
 $988 \times 240 + 988 \times 225$   
 $988$



Рис. 58

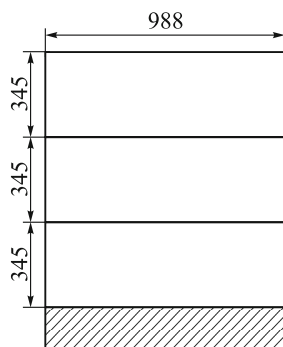


Рис. 59

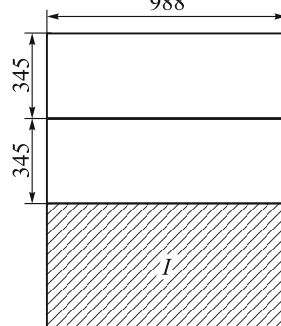


Рис. 60

Затем кроим заготовки, обязательно требующие полосы *B* полной ширины (рис. 61), потом кроим заготовку  $513 \times 886$  (рис. 62).

3 листа  $1525 \times 1525$ . Из отхода *B*  
 кроить:  $772 \times 429 + 652 \times 466$   
 $1260 \times 400 + 252 \times 402$   
 $1182 \times 429 + 252 \times 402$

19 листов  $1525 \times 1220$ . Из отходов  
*C* кроить  $108 \times 5290 - 18$  шт. (из 4  
 отходов кроить  $375 \times 255$ ) и 1 шт.  
 $1182 \times 322$

Карта № 6

Карта № 7

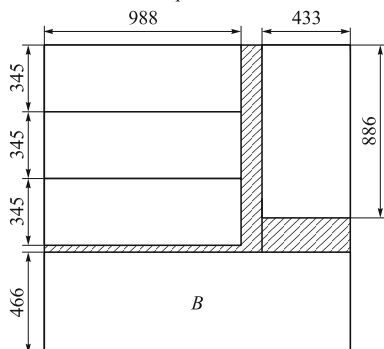


Рис. 61

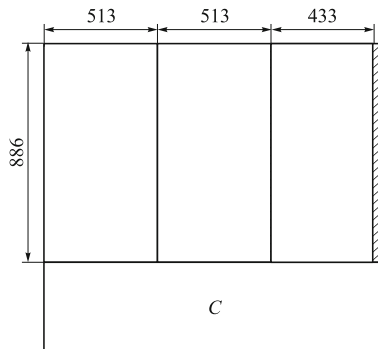


Рис. 62

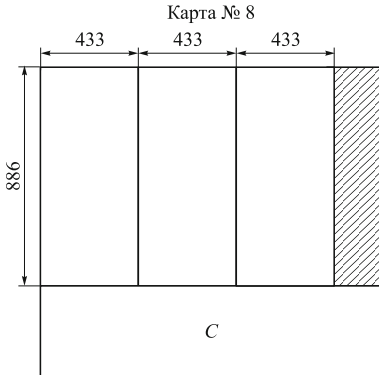


Рис. 63

Наконец, кроим оставшиеся заготовки  $433 \times 886$  (рис. 63):

4 листа  $1525 \times 1220$   
 Из отходов  $C$  кроить:  
 $990 \times 255$   
 $772 + 322 + 674 \times 315$   
 $1310 \times 255$   
 $750 \times 215 + 750 \times 215$

Последнюю полосу  $C$  уже пришлось заполнить заготовками с несколько меньшей суммой индексов.

Теперь нам осталось раскроить лишь заготовки  $300 \times 757$ . (Большинство заготовок с индексами 0 уже размещено, а остальные, очевидно, выходят из любых отходов.)

Заготовки  $300 \times 757$  можно либо получить один раз на 10 вагонов из листа  $1525 \times 1525$  или же один раз на два вагона, если один из четырех листов, раскраиваемых по карте 1, заменить листом  $1525 \times 1525$  и кроить его, как указано на рис. 64.

Остановимся на втором варианте, не требующем большой партии.

План раскроя готов. Является ли он наиболее экономным?

В одном из раскroев (в карте № 8) употреблен неполноценный раскрой с суммой индексов  $3\frac{1}{3}$  вместо 4. Кроме того, при выборе индексов заготовок  $988 \times 310$ ,  $1310 \times 255$  мы несколько преувеличенно взяли их индекс за 1. При таком индексе возможен, например, раскрой по рис. 65, дающий сумму индексов 5 вместо 4. Чтобы устранить это, надо понизить индексы этих заготовок до  $3/4$ . Те раскрои, где эти заготовки получены в нашем плане, оказываются тогда не вполне полноценными.

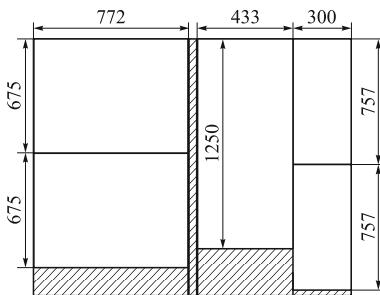


Рис. 64

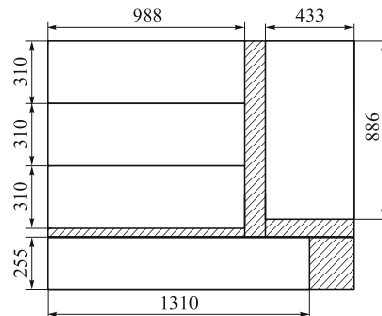


Рис. 65

Таким образом составленный план если и может быть улучшен, то не больше, чем на  $(1/2 + 3/4)/4 = 5/16$  листа на вагон.



Попытки улучшения плана, направление которых указывается неполноценными раскроями полученного плана, приведут, по-видимому, к резкому увеличению партии и совершенно незначительной экономии (фактически много меньшей, чем 5/16 листа на вагон) и к пересмотру индексов, которые установят максимальную экономичность нового плана.

Пересматривать план практически не имеет смысла. Составленный раскрой остается оформить по установленной на заводе форме.

Приведем экономические показатели составленного плана.

Размер листа в мм	Количество заказываемых листов на 1 вагон
1525×1525	6
1525×1220	32
1220×1525	1,5

Расход в переводе по кубатуре на листы 1525 × 1220 — 41 лист на вагон. Партия — 2 вагоно-комплекта. Процент полезного использования материала при раскрое равен 87,5%. Расход материала — 0,763 м<sup>3</sup> на вагон.

Утвержденный ранее заводом раскрой предусматривал расход 45,1 листа и не обладал какими бы то ни было технологическими преимуществами перед новым планом. Партия была 10 вагонов. Разница между методически отработанным и составленным на глаз планом раскроя составила в этом случае около 9% материала.

## О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели<sup>\*</sup>)

При изучении экономических явлений существенную помощь может оказать анализ математических моделей, позволяющих при упрощенных условиях изучать рассматриваемое явление. Ниже будут указаны некоторые простейшие математические модели, описывающие процесс роста основных фондов и продукции в однопродуктовой динамической модели при оптимальном плане.

1. Пусть  $T(t)$  — ресурсы труда в момент  $t$  (заданная функция), а  $R(t)$  — основные фонды на момент  $t$ . Возможные производственные способы будем характеризовать технологической функцией  $U(R, T)$ , которая дает количество чистого продукта, создаваемого трудом  $T$  при использовании основных фондов  $R$  в единицу времени.

Остановимся на структуре функции  $U(R, T)$ . Естественно считать ее однородной функцией; учитывая это условие, можно функцию  $U$  записать в виде

$$U(R, T) = \int_0^n R^\alpha T^{n-\alpha} dp(\alpha), \quad (1)$$

где  $n$  — степень однородности, а  $p(\alpha)$  — вес. Тогда все производство можно рассматривать как составленное из отдельных «производственных ячеек», отличающихся различным соотношением затрат труда и фондов на производство единицы продукта; в ячейке, отвечающей параметру  $\alpha$ , продукция равна  $R^\alpha T^{n-\alpha}$ . В дальнейшем делаем естественное предположение, что  $n = 1$ .

Итак, располагая в момент времени  $t$  трудом  $T(t)$  и основными фондами  $R(t)$ , производим в расчете на единицу времени  $U(R(t), T(t))$  единиц продукции. Имеется в виду, что функция  $U$  дает оптимальные способы; в предположении допустимости использования линейных комбинаций способов это требует выпуклости кривых  $U(R, T) = \text{const}$ ; для последнего достаточно, чтобы функция  $p(\alpha)$  в (1) была неубывающей.

Часть произведенной продукции направляется на потребление, а оставшаяся часть на накопление. Рассмотрено два предположения:

а) потребление пропорционально ресурсам труда  $aT$ ; тогда уравнение, описывающее изменение основных фондов, запишется в виде

$$\frac{dR}{dt} = U(R(t), T(t)) - aT(t); \quad (2)$$

б) некоторая доля  $(1 - \gamma)$  продукции потребляется, а оставшаяся часть идет на накопление — приращение основных фондов. В этом случае имеем

$$\frac{dR}{dt} = \gamma U(R(t), T(t)). \quad (3)$$

---

<sup>\*</sup>) Опубликована в Докладах Академии наук СССР. — 1959. — Т. 129, № 4. — С. 732–735. Поступила в редакцию 22 августа 1959 г. Соавтор Л. И. Горьков.

Написание уравнений (2) и (3) существенно опирается на гипотезу о мгновенной превращаемости фондов из одной формы в другую, именно в ту, которая является оптимальной при имеющемся соотношении объема фондов и ресурсов труда в данный момент.

2. Усложним модель, снимая гипотезу мгновенной превращаемости фондов одной структуры в другую. Будем считать, что произведенное вложение имеет срок службы  $\alpha$  лет, в течение которого оно полностью изнашивается.

Введем в рассмотрение функцию  $r(t, \tau)$ , которая дает распределение фондов по сроку службы в момент  $t$ , именно,  $r(t, \tau)d\tau$  означает номинальный объем фондов со сроком службы от  $\tau$  до  $\tau + d\tau$  на момент  $t$ . Через  $m(t, \tau)$  обозначим связанную с этими фондами рабочую силу. Тогда фонды, которые мы вкладываем в течение элемента времени  $(t, t + dt)$ , будут  $r(t, 0) dt$ . Эти фонды слагаются из доли продукции, идущей на накопление, и амортизационных отчислений.

Продукцию, получаемую при использовании фондов  $r(t, \tau) d\tau$ , можно принять равной

$$U((1/2)r(t, \tau), m(t, \tau)) d\tau dt$$

в соответствии с фактическим размером фондов срока службы  $\tau$  в момент  $t$  (за вычетом амортизации). Сюда надо присоединить амортизационные отчисления, равные  $\frac{1}{\alpha}r(t, \tau)$ , также направляемые на создание новых фондов. (Впрочем, могут быть приняты и другие предположения о характере амортизации и производительности амортизированных фондов.)

«Суммируя» по всем срокам службы и сокращая на  $dt$ , получим

$$r(t, 0) = \gamma \int_0^{\alpha} U((1/2)r(t, \tau), m(t, \tau)) d\tau + \int_0^{\alpha} \frac{r(t, \tau)}{\alpha} d\tau, \quad (4)$$

где  $\gamma$  — доля продукции, идущей на накопление (это уравнение соответствует случаю б) в разделе 1).

$R(t)$  — полный фактический размер фондов к моменту  $t$  дается формулой

$$R(t) = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha - \tau}{\alpha} r(t, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Общие ресурсы труда к моменту  $t$  должны равняться

$$\int_0^{\alpha} m(t, \tau) d\tau = T(t).$$

Исходя из экономического смысла функции  $r(t, \tau)$ , нужно считать выполненным условие

$$r(t, \tau + \Delta\tau) = r(t - \Delta\tau, \tau),$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \tau} = 0 \quad (6)$$

аналогично:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial \tau} = 0. \quad (7)$$

Из (6) следует, что  $r(t, \tau) = r(t - \tau)$  (сохраняем прежнее обозначение), а из (7)  $m(t, \tau) = m(t - \tau)$ . Учитывая это, (4) и (5) перепишем следующим образом:

$$r(t) = \gamma \int_0^{\alpha} U((1/2)r(t - \tau), m(t - \tau)) d\tau + \int_0^{\alpha} \frac{r(t - \tau)}{\alpha} d\tau, \quad (8)$$

$$R(t) = \int_0^{\alpha} \frac{\alpha - \tau}{\alpha} r(t, \tau) d\tau. \quad (9)$$

Подставляя в (8) продифференцированное (9), получим

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \int_0^{\alpha} U((1/2)r(t - \tau), m(t - \tau)) d\tau.$$

3. Рассмотрим теперь несколько иную схему. Для этого введем следующее понятие. Фонды имеют структуру  $u$ , если на единицу труда приходится  $u$  единиц фондов, так что  $u = R/T$  (иначе говоря, структура определяет органическое строение капитала).

Пусть  $\lambda(u)$  — спектр распределения труда по фондам, так что  $\lambda(u) du$  — число единиц рабочей силы, связанных с фондами структуры от  $u$  до  $u + du$ ; при этом

$$r(u) du = u\lambda(u) du \quad (10)$$

дает объем основных фондов указанной структуры. Срок службы фондов принимаем бесконечным — они не изнашиваются (и не преобразуются).

Составим уравнения, описывающие следующий процесс. Вновь создаваемый продукт за вычетом доли, идущей на потребление, используется для новых фондов, что позволяет повысить органическое строение капитала; труд для новых фондов выделяется за счет снятия некоторого числа работающих с фондов самой низкой органической структуры. Высвободившиеся таким образом фонды остаются в дальнейшем, как правило, неиспользованными.

Число работающих во все моменты времени представляет собой заданную функцию, т. е.

$$\int_{m(t)}^{M(t)} \lambda(u) du = T(t), \quad (11)$$

где  $M(t)$  и  $m(t)$  — границы изменения структуры  $u$  в момент  $t$ . Поскольку повышение органического строения идет только за счет вновь создаваемого продукта (старые фонды мы оставляем), то

$$r(M) dM = \gamma \int_{m(t)}^{M(t)} U(r(u), \lambda(u)) dudt, \quad (12)$$

где  $\gamma$  — доля продукции, идущей на накопление.

Производительность рабочей силы при наименьшей органической структуре на единицу труда составит

$$\frac{U(r(m), \lambda(m))}{\lambda(m)}. \quad (13)$$

Эффективность добавляемой единицы рабочей силы на вновь создаваемых фондах

$$\frac{\partial U}{\partial T}, \quad (14)$$

где в качестве первого аргумента следует взять  $r(M) dM$ , а в качестве второго —  $\lambda(M) dM$ . Ввиду однородности функция (14) зависит только от отношения своих аргументов, т. е. от  $M$ .

Очевидно, что должно выполняться равенство

$$\frac{U(r(m), \lambda(m))}{\lambda(m)} = \frac{\partial U}{\partial T}. \quad (15)$$

Это уравнение ввиду однородности  $U$  носит алгебраический характер. Если принять  $U(R, T) = R^\alpha T^{1-\alpha}$ , уравнение (15) примет вид

$$m = \beta M, \quad (16)$$

где  $\beta = (1 - \alpha)^{1/\alpha}$ .

Таким образом, система уравнений для функций  $\lambda(u)$  и  $M(t)$  окончательно будет

$$\int_{\beta M(t)}^{M(t)} \lambda(u) du = T(t), \quad M \lambda(M) \frac{dM}{dt} = \gamma \int_{\gamma M(t)}^{M(t)} u^\alpha \lambda(u) du. \quad (17)$$

Система уравнений (17) теряет силу, если  $\lambda(u)$  становится отрицательным.

4. Все написанные дифференциальные и интегродифференциальные уравнения допускают пошаговое численное интегрирование. В каждом случае могут быть найдены различные экономические показатели модели: оценка труда  $\partial U / \partial T$ , нормальная эффективность капиталовложений  $\partial U / \partial R$ , кривая роста основных фондов  $R(t)$ , изменение производительности труда  $U/R$ . Сопоставление этих показателей позволяет изучать влияние различных факторов (параметров модели) и принятых гипотез на эти показатели. В частности, можно ввести в модель учет технического прогресса и изучить его влияние на экономические показатели. Для этого достаточно заменить функцию  $U(R, T)$ , скажем, на  $e^{\delta t} U(R, T)$  в первом случае и на соответствующие измененные выражения в двух других.

Сопоставление модели с данными реальной экономической системы может позволить по одним показателям такой системы делать ориентировочные заключения о других показателях. На модели может испытываться точность и обоснованность различных методов экономического расчета.

# О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений<sup>\*)</sup>

## Введение

Имевшие место сдвиги в развитии математики и вычислительных средств должны иметь следствием коренные изменения в технике, а возможно и теории численных методов и обработки наблюдений. В той или иной форме отдельные высказываемые ниже соображения встречались в литературе, но не разрабатывались систематически. В частности, мы считаем, что существенное значение имеют следующие моменты:

1. Большая ответственность за результаты расчетов, на которых сейчас нередко базируются решения, касающиеся сложных дорогостоящих объектов современной физики и техники. Наличие больших ненаблюдаемых этапов при машинных вычислениях повышает требования к надежности окончательных и промежуточных данных, получаемых в процессе применения численных методов и при обработке данных наблюдений. Это обуславливает систематический переход от построения приближенных значений и результатов к получению точных двусторонних границ для искомых величин или, если говорить о нечисловых величинах, областей расположения искомых и наблюдаемых величин; иначе говоря, возникает задача возможно более точного описания расположения этих величин в соответствующих пространствах их значений. Идеи теорий полуупорядоченных пространств и операций в них, а также некоторых других абстрактных систем объектов дают определенную теоретическую базу для реализации этой точки зрения.

2. В качестве основного аппарата в численных алгоритмах после сведения задачи к конечномерной до сих пор служили системы линейных (иногда и нелинейных) алгебраических уравнений и аналитический аппарат линейной алгебры в целом. Широко использовались также итеративные процессы характера разностных уравнений. Развитый в связи с экономической проблематикой новый математический аппарат (линейное, нелинейное и динамическое программирование) делает возможным систематическое использование в численных методах, с не меньшей эффективностью, систем линейных неравенств и новых типов итеративных процессов. Этот аппарат, в частности, существен при решении поставленной выше задачи о построении двусторонних приближений и характеристики области расположения решений. В частности, он дает возможность эффективного оперирования с многогранными областями в конечномерных пространствах, описывающими характерные области расположения объектов векторного типа.

---

<sup>\*)</sup>Опубликована в Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 701–709. Поступила в редакцию 2.VII.1962 г. Работа представляет несколько дополненный текст докладов, прочитанных автором в мае 1962 г. в Ленинградском и Новосибирском университетах и в Московском математическом обществе.

3. Систематическое использование в численных методах, при нахождении определяемых величин и в обработке наблюдений, возможно полной (количественной и качественной), а иногда и избыточной информации о данном объекте, может существенно способствовать уточнению границ расположения объекта и его количественных характеристик. В ряде случаев ограниченное, неполное использование имеющейся информации вызывалось стремлением сократить и упростить расчеты и обработку данных, а также недостатки используемого для этих целей традиционного математического аппарата, создававшегося в другое время, в других условиях и требованиях, для других объектов. Имеющийся новый математический аппарат, а также малая трудоемкость вычислительных работ при использовании электронных машин по сравнению со сбором информации, производством наблюдений и статистических выборок, делают осуществимой и оправданной гораздо более тщательную и полную обработку информации, позволяя меньше считаться с объемом вычислительной работы.

В частности, в ряде случаев существенное использование в численных алгоритмах может найти полученная теоретическим путем информация о расположении и свойствах решения (границы самого решения и его производных и т. п.). В результате, как это уже не раз имело место в прошлом, в частности, в связи с применением функционального анализа в теории приближенных методов, для численных методов приобретает значение ряд теоретических результатов теории функций, функционального анализа, теории уравнений математической физики. При этом на сей раз они проникают еще более глубоко в численные методы, не только в теорию их — исследование сходимости, оценки, общий качественный анализ методов, но и в саму структуру численных алгоритмов.

4. Наконец, обратим внимание еще на несколько вопросов, связанных с влиянием машинной техники на развитие численных методов.

Широкое использование современной вычислительной техники и опыт решения с ее помощью объемных вычислительных задач привели к переоценке различных численных методов. Некоторые из них оказались скомпрометированными и отвергнутыми при этой проверке (неустойчивость, плохая обусловленность). Представляется, что такое доверие к «выводам» машинной техники в данном вопросе является неосновательным, так как при этой машинной проверке не учтены доступные человеку и постоянно применявшиеся при вычислениях вручную возможности внесения различных модификаций в форму применения методов, их улучшения и контроля результатов в процессе счета, позволяющие устранить подобные недостатки. Иначе говоря, не учтено, что с помощью надлежащей модификации соответствующих методов, основанной, в частности, на тех же, указанных выше идеях и средствах, некоторые из этих методов допускают реабилитацию.

Машинное проведение объемных задач, связанное с необходимостью систематического внесения вычислительных погрешностей, делает постоянный их учет при выборе методов организации вычислительного плана и в самом процессе вычислений важным и совершенно необходимым элементом численного анализа. В частности, это делает часто мало приемлемыми многие традиционно использовавшиеся формы записи математических выражений и осуществления преобразований, так как они в ряде случаев оказываются не безобидными (скажем, упрощение много-

члена). В то же время сами средства машинной математики и уже разработанные приемы ее использования для описания, хранения и обработки математической информации (машинный математический язык, например, схемы, величины, списки и пр.) открывают возможность систематического использования других, нетрадиционных форм записи математических выражений.

Все сказанное приводит к выводу о целесообразности ревизии всей данной области с точки зрения высказанных общих установок.

Такой пересмотр потребует проведения ряда исследований и представляет дело будущего. Мы не ставим задачей в этой статье дать даже основы такой новой теории, а хотим только на нескольких примерах проиллюстрировать те возможности, которые дают эти новые подходы.

Приводимые ниже конкретные примеры, иллюстрирующие эти общие положения, взяты по преимуществу из близких мне областей численного анализа на основании главным образом опыта, накопленного в практике применения численных методов в Ленинградском отделении Математического института Академии наук СССР.

## § 1. Первые иллюстративные примеры

1. Начнем с самой элементарной задачи вычисления значения полинома в данной точке. Она становится, однако, совсем нетривиальной, если поставим ее, например, по отношению к полиному Чебышева с большим номером, скажем,  $T_{51}(x)$ , нормированному, со старшим коэффициентом 1.

Его отклонение от нуля равно  $1/2^{n-1} = 1/2^{50} \approx 10^{-15}$ .

При вычислении его значения мы будем иметь слагаемые порядка 1. Если мы производим вычисления с десятью знаками, то в полученном результате должно было бы пропасть 15 знаков, но фактически знаки с 11-го по 15-й должны остаться, т. е. первые пять цифр в результате все неверны. Ошибка примерно в  $10^5$  превосходит результат! Конечно, полином Чебышева можно сосчитать достаточно точно иным путем (например, по формуле  $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$ ). Такие возможности имеются и для других специальных полиномов. Однако если дан произвольный, мало отклоняющийся от нуля полином высокой степени, то вычисление его значения представляется безнадежным. Если при этом коэффициенты известны с 10-ю значащими цифрами, то это нетрудно доказать. Действительно, в этом случае в пространстве коэффициентов мы имеем не точку, а  $(n+1)$ -мерный куб с размерами  $10^{-10}$ , поэтому значение полинома в точке, представляющее линейную форму от коэффициентов, фактически будет меняться в пределах порядка  $10^{-10}$  и, следовательно, действительные значащие цифры многочлена получить невозможно.

Однако положение меняется, если нам известна дополнительная информация о данном многочлене. Скажем, то, что он отклоняется от нуля не более чем на  $3 \cdot 10^{-15}$ , производная его или неопределенный интеграл не превосходят таких-то границ и т. п. Тогда уже далеко не всякая точка в упомянутом кубе пространства коэффициентов определит полином, который удовлетворяет указанным условиям. Область в пространстве коэффициентов сужается, превращается из куба в тонкий многогранник, в связи с чем значительно сужаются границы линейной формы,



определяющей значение полинома, и оно может быть определено значительно точнее. Аналитически задача определения границ этой формы приводит к нахождению максимума и минимума линейной формы

$$L(a) = \sum_{i=0}^n a_i x_0^i$$

при следующих условиях:

$$\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i x_j^i \right| \leq C, \quad j = 1, \dots, m,$$

где  $\underline{a}_i, \bar{a}_i$  — границы коэффициентов,  $C$  — граница полинома,  $x_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) — сетка точек, в которых записаны ограничения. Задача нахождения максимума или минимума линейной формы при линейных ограничениях есть задача линейного программирования, для решения которой имеется ряд эффективных методов.

ПРИМЕР.

$$\frac{\pi}{3} T_5(x) = \frac{\pi}{3} (5x - 20x^3 + 16x^5), \quad P_5(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5,$$

$$0,327 \leq a_1 \leq 0,328, \quad -1,31 \leq a_3 \leq -1,30, \quad 1,047 \leq a_5 \leq 1,048.$$

Границы значения  $P_5(-0,37)$ , вычисленные по схеме Горнера:

$$-0,062778347 \leq P_5(-0,37) \leq -0,061894882,$$

с использованием аппарата линейного программирования:

$$-0,062287676 \leq P_5(-0,37) \leq -0,061899476.$$

2. Задача интерполирования также может рассматриваться как задача нахождения значения полинома в данной точке, принимающего точные или приближенные значения в некоторой системе точек.

Относительно коэффициентов полинома это опять задача нахождения границ линейной формы при некоторых условиях.

Задача интерполирования может ставиться и иначе, когда заранее не выбирается форма интерполирующей функции, а именно, на основании границ функции в заданной сетке точек разыскиваются значения функции в некоторой более густой сетке при определенных требованиях гладкости (границы для I-х, II-х, III-х разностей).

При нахождении границ искомой функции в более густой сетке нам вновь приходится решать задачу линейного программирования.

3. При решении систем линейных алгебраических уравнений наиболее часто применяются те или иные разновидности метода исключения Гаусса, при этом точность получаемых решений существенно зависит не только от степени обусловленности системы, но и от порядка, в котором ведется исключение. С нашей точки

зрения, более эффективным представляется другой порядок вычислений. Полученные в процессе исключения уравнения с учетом вносимых при этом погрешностей вычислений должны записываться в виде неравенства для линейных форм от верхних и нижних границ неизвестных. Поэтому в результате счета должны получаться строго устанавливаемые границы для неизвестных. Если получаются удовлетворительные границы, то процесс решения можно считать законченным. Если они не удовлетворительны, то можно пытаться строить более точные оценки за счет изменения порядка операций.

## § 2. Принципы исчисления двусторонних границ

Рассмотрения естественно вести в полуупорядоченном пространстве. В дальнейшем, как правило, имеется в виду, что  $X$  — линейное полуупорядоченное пространство или множество. Величина  $x_j$  задана приближенно, если указаны некоторые множества ее верхних и нижних границ,  $\underline{x}_j \leq x_j \leq \bar{x}_j$ .

Под  $\underline{x}_i$  и  $\bar{x}_i$  будем понимать как отдельных представителей этих множеств границ, так и сами эти множества. Будем обозначать их также  $\underline{x} = \underline{\Lambda}(x)$ ,  $\bar{x} = \bar{\Lambda}(x)$ , под  $\Lambda(x)$  будем разуметь любую из этих границ, но одну и ту же в пределах одного соотношения. Отметим некоторые очевидные свойства этих границ:

$$\underline{\Lambda}(-x) = -\bar{\Lambda}(x), \quad \bar{\Lambda}(-x) = -\underline{\Lambda}(x). \quad (1)$$

Введем оператор  $\sigma$ , определяемый соотношением

$$\sigma \underline{\Lambda} = \bar{\Lambda}, \quad \sigma \bar{\Lambda} = \underline{\Lambda},$$

тогда, очевидно,  $\sigma^2 = I$ , где  $I$  — тождественный оператор. Пользуясь этим обозначением, предыдущее соотношение можно записать в виде

$$\Lambda(-x) = -\sigma \Lambda(x),$$

где  $\Lambda = \underline{\Lambda}, \bar{\Lambda}$ ,

$$\Lambda(x_1 + x_2) = \Lambda(x_1) + \Lambda(x_2). \quad (2)$$

Это следует из правила сложения неравенств;

$$\Lambda(cx) = c \sigma^{\text{sign } c} \Lambda(x), \quad (3)$$

где  $c = \text{const}$ , а  $\text{sign } c = \begin{cases} 1, & c < 0, \\ 0, & c > 0. \end{cases}$

Пусть для элементов пространств  $X_1$  и  $X_2$  определено произведение  $x_3 = x_1 \cdot x_2$ , принадлежащее некоторому полуупорядоченному пространству  $X_3$ , так что выполнены обычные свойства произведения. Тогда для границ произведения имеем следующую формулу:

$$\Lambda(x_1 \cdot x_2) = \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 + |\tilde{x}_1| \Lambda(\alpha_2) + |\tilde{x}_2| \Lambda(\alpha_1) + \Lambda(\alpha_1 \cdot \alpha_2), \quad (4)$$

где

$$\tilde{x}_i = \frac{\underline{x}_i + \bar{x}_i}{2}, \quad d_i = \frac{\underline{x}_i - \bar{x}_i}{2};$$

$$\underline{\Lambda}(\alpha_i) = -d_i, \quad \overline{\Lambda}(\alpha_i) = d_i, \quad i = 1, 2; \quad \underline{\Lambda}(\alpha_1\alpha_2) = -d_1d_2, \quad \overline{\Lambda}(\alpha_1\alpha_2) = d_1d_2.$$

Если в пространстве  $X$  для некоторых элементов определена обратная величина  $1/x$ , то имеем

$$\Lambda\left(\frac{1}{x}\right) = \Lambda\left(\frac{1}{x^+ - x^-}\right) = \frac{1}{\sigma\Lambda(x^+) + \sigma\Lambda(x^-)}, \quad (5)$$

где  $x^+$ ,  $x^-$  — положительная и отрицательная части элемента  $x$ , а  $\Lambda(x^+)$  и  $\Lambda(x^-)$  предполагаются дизъюнктивными. Отсюда получается и граница для частного

$$\Lambda\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{1}{\underline{\Lambda}(x_2)\overline{\Lambda}(x_2)}\Lambda(x_1 \cdot x_2). \quad (6)$$

В частности, формула границ произведения может быть применена для случая, когда один из множителей есть  $x$ , а другой — линейный оператор  $A$  из пространства  $X$  в другое полуупорядоченное пространство  $Y$ .

Поскольку этот оператор  $A$  считается точно известным, границы его совпадают с ним, то из формулы границ произведения получаем

$$\Lambda(Ax) = \Lambda(\tilde{x}) + |A|\Lambda(\alpha),$$

или, иначе говоря,

$$\overline{\Lambda}(Ax) = A\frac{\underline{x} + \bar{x}}{2} + |A|\frac{\underline{x} - \bar{x}}{2} = \frac{1}{2}[(A + |A|)\bar{x} + (A - |A|)\underline{x}] = A_+\bar{x} - A_-\underline{x}.$$

Аналогично строится граница  $\overline{\Lambda}(Ax)$ . Отсюда легко строятся оценки для решения уравнения

$$Ax = b,$$

если известен обратный оператор  $A^{-1}$ ; тогда

$$x = A^{-1}b,$$

а поэтому

$$\bar{x} = [A^{-1}]_+\bar{b} - [A^{-1}]_-\underline{b}.$$

Для  $\underline{x}$  имеем аналогичную формулу.

Некоторые аналогичные определения могут быть даны и для случая нелинейных полуупорядоченных пространств и нелинейных операторов с использованием вводившихся нами в свое время мажорирующих операторов для данного нелинейного. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом.

Отметим еще, что в случаях, когда обращение оператора невозможно или обратный оператор очень велик, например, в окрестности собственного значения, целесообразно не строить границы областей, содержащих решения, а оценивать область расположения решения, используя технику линейного программирования.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Во всех формулах для границ предполагалось, что действия над исходными границами производятся точно. Если эти действия производятся приближенно, например, на машине, то формулы видоизменяются за счет дополнительного введения погрешностей этих действий. Не будем приводить записи формул для этого случая.

### § 3. Некоторые задачи прикладной математики

**1. Задача обработки наблюдений.** Обычно полученную в результате измерений избыточную систему уравнений обрабатывают по методу наименьших квадратов Гаусса. При этом происходит значительная потеря информации. По-видимому, в настоящее время более целесообразна другая техника. Уравнения, связывающие искомые величины, выписать с учетом погрешностей в форме неравенств

$$l_i - \delta \leq \sum_{k=1}^n c_{ik} x_k \leq l_i + \delta, \quad i = 1, \dots, m,$$

и разыскивать возможные границы для  $x_k$  методами линейного программирования.

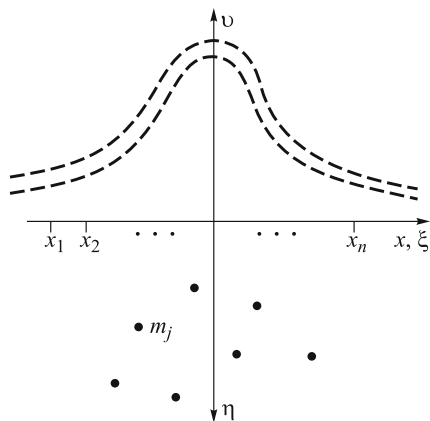


Рис. 1

**2. Обратная задача теории потенциала<sup>1)</sup>.** По измеренным значениям гравитационного, магнитного или иного потенциала в ряде точек (рассматриваем для простоты плоский случай) нужно дать заключение о рудном теле, нарушающем поле (рис. 1).

Пусть  $m_j$  — сосредоточенная неизвестная масса в точке  $(\xi_j, \eta_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Тогда теоретически вычисленное значение потенциала в точке  $x_j$  будет

$$v_i^0 = \sum_{j=1}^n \frac{\gamma \eta_j}{(x_i - \xi_j)^2 + \eta_j^2} m_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j,$$

$i = 1, \dots, m$ , и известно, что измеренные значения  $v_i$  отклоняются от истинных не более чем на  $\delta$ , т. е. имеем систему линейных неравенств:

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} m_j \right| \leq \delta_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad m_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ясно, что сами массы  $m_j$  определить невозможно. Однако некоторые функционалы от них определяются довольно удовлетворительно для тех случаев, когда точными значениями  $v_i$  они определяются однозначно. В других случаях необходимо ввести дополнительные ограничительные гипотезы на распределение масс, обеспечивающие такую однозначность. Таким образом, открывается возможность применения при решении этого класса задач ранее не применявшейся техники линейного, а также целочисленного и нелинейного программирования. Более определенное заключение об эффективности этих методов в данном вопросе может быть сделано на основе дальнейших исследований, экспериментов. Приведем один пример расчета, выполненный на ЭВМ ИМ СО АН СССР.

<sup>1)</sup>Задача возникла в связи с сообщением по линейному программированию, которое автор делал по предложению Э. Э. Фотиади в Институте геологии и геофизики Сибирского отделения Академии наук СССР в марте 1962 г.

ПРИМЕР. Измерения были произведены в 70 точках с точностью  $\delta = 0,1$ ;  $m_j$  рассматривались в 36 точках (истинная масса = 1 и заполняет единичный квадрат с координатами центра тяжести 0; 1,5). В результате вычислений с помощью аппарата линейного программирования получили:

$$\begin{aligned} \max \sum_{j=1}^{36} m_j &= 1,02, & \min \sum_{j=1}^{36} m_j &= 0,98; \\ \max \sum_{j=1}^{36} \xi_j m_j &= 0,11, & \min \sum_{j=1}^{36} \xi_j m_j &= -0,11; \\ \max \sum_{j=1}^{36} \eta_j m_j &= 1,75, & \min \sum_{j=1}^{36} \eta_j m_j &= 1,28. \end{aligned}$$

#### § 4. Пути улучшения некоторых численных алгоритмов

**1. Методы, приводящие к плохо обусловленным линейным системам.** Целый ряд численных методов — методы Рунге и Галеркина, приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, метод коллокаций, наискорейшего спуска — весьма эффективных при нахождении первых приближений, оказываются мало эффективными при нахождении приближений более высокого порядка. При этом, в случае гладкости задачи теоретически устанавливается наличие быстрой сходимости к решению, и следовательно, существования хорошего приближения к решению в принятой форме.

Однако для нахождения коэффициентов или других параметров получается плохо обусловленная система, которая практически неразрешима или приводит к результатам, которые не обеспечивают удовлетворительную аппроксимацию действительного решения задачи. Представляется, что эта трудность может быть снята, если использовать дополнительную информацию о решении — ограниченность, гладкость, дополнительные избыточные соотношения, характеризующие его. Это существенно сократит область возможных значений параметров и позволит с гораздо большей точностью определить само решение или те или иные характеристики. В этом случае вновь система уравнений заменяется системой неравенств и требуется применение техники линейного программирования.

**2. Методы, приводящие к неустойчивым схемам вычислений.** Многие численные (разностные) методы решения дифференциальных уравнений оказались неэффективными в силу явления неустойчивости. Простейшей задачей такого рода является задача о нахождении ограниченного на бесконечности решения дифференциального уравнения 2-го порядка, у которого имеется другое — быстро растущее решение.

При численном решении неизбежно входит эта 2-я компонента, быстро искажая полученные результаты. Для устранения этих явлений предлагались различные приемы: интегрирование с другого конца, понижение порядка, факторизация, пристрелка. В связи с этим в ряде случаев вообще отказывались от явных схем,

переходя к неявным (Нейман, Ладыженская), идея для обеспечения устойчивости на значительное усложнение вычислительной схемы.

Нам представляется, как вполне реальный, иной путь преодоления тех же трудностей, именно, пополнение системы разностных уравнений системой ограничительных неравенств для неизвестных с надлежащим образом разработанной численной схемой для этой обогащенной системы. Тут могут применяться те или иные итеративные процессы, последовательно уточняющие двусторонние границы для искомых; по отношению к отдельным блокам неизвестных, а иногда и ко всей системе может применяться техника линейного программирования.

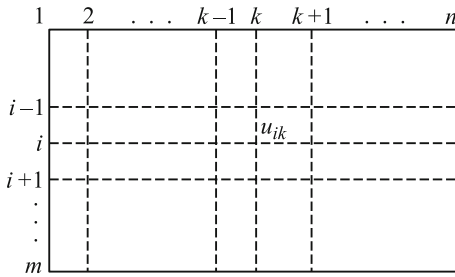


Рис. 2

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае прямоугольника. В случае, если мы введем в качестве неизвестных значения решения конечно-разностного уравнения на линии, прилежащей к боковой стороне прямоугольника и с помощью исключения по формулам типа

$$u_{i3} = 4u_{i2} - u_{i1} - u_{i-12} - u_{i+12}$$

будем пытаться последовательно исключать неизвестные, то полученная схема будет неустойчивой и не приведет к удовлетворительным результатам.

Однако, если мы дополним разностные уравнения системой неравенств вида  $m \leq u_{ik} \leq M$ , где  $m, M$  — границы контурной функции, то полученная система может эффективно решаться. Например, методами линейного программирования можно последовательно получать двусторонние границы для коэффициентов влияния элементов второго ряда на элементы  $k$ -го ряда.

## Математические и вычислительные проблемы в плано-экономических вопросах\*)

Математические методы имеют поле приложений всюду, где количественные или формальные отношения настолько сложны, что могут представлять самостоятельный интерес для исследования. Многие годы математические методы применялись только к проблемам естествознания и техники. В последнее время все большее значение получает применение математики к таким областям, которые относятся к гуманитарным наукам, потому что и там имеются указанные общие основания для применения математических методов. Мы на этой сессии слушали доклад о применении математических методов в филологии, в машинном переводе. Уже стало совершенно привычным применение математики в логике. И, как это было естественно и в других областях, новые области применения вызвали постановку новых типов задач и необходимость разработки для их анализа нового математического аппарата. Характерным примером является аппарат математической теории игр, применяющийся в исследовании операций, в частности, в вопросах военной тактики. Пожалуй, из всех этих полей приложений наиболее ясной и бесспорной была необходимость применения математических методов в экономических вопросах, которые по своей природе имеют сложный и явно выраженный количественный характер. И действительно, с некоторыми фактами такого применения мы встречаемся уже более 100 лет. Математической символике и методам придавали большое значение Маркс в экономических исследованиях и Ленин в его работах экономического и статистического характера. Более или менее систематическое развернутое применение математических методов не для теоретического анализа экономических вопросов, а для конкретного решения экономических проблем получило особое значение в последние 20 лет, в частности у нас, в Советском Союзе. Естественно, для нас эти методы особенно важны, потому что нигде экономическая наука не имеет такого исключительного значения. Впервые в истории она используется не только для изучения экономических явлений, но и для сознательного управления ими. Впервые экономическая жизнь большого государства стала строиться в плановом порядке, и в целом история показала, что это не только осуществимо, но и приводит к большим успехам, невиданным темпам развития производительных сил.

Необходимо подчеркнуть еще особый характер экономических законов социализма, который важно понимать. Они носят объективный характер, так же, как и законы других социальных формаций. В частности, каждое нарушение этих законов жестоко наказывается, порождая диспропорции, потери и т. д., т. е. законы объективно понуждают следованию им. Однако такой опыт не является единственным источником их познания; возможно сознательное, научное изучение экономических законов и следование им. И успех экономической деятельности в социалистическом

---

\*) Стенограмма доклада, прочитанного 3.XII-57 на научной сессии Ленинградского университета.

обществе существенно зависит от знания этих законов, от полного и детального их понимания и сознательного следования им. От этого существенно зависит возможность полной реализации преимуществ социалистического общества. Поясню некоторое различие характера действия законов на примере двух классических задач вариационного исчисления. Известна задача о провисании тяжелой нити: тяжелая нить провисает по цепной линии; известно, что линией наискорейшего ската материальной точки является циклоида. Так вот, тяжелая нить не должна знать вариационного исчисления для того, чтобы лечь по цепной линии. А для того, чтобы сделать скат в таком месте, где нужно обеспечить наискорейший спуск, существенно, чтобы строитель этого ската знал вариационное исчисление. Конечно, в результате экспериментов, рассмотрения ряда вариантов, может быть, и будет найдена какая-то кривая или ломаная, близкая к требуемой, но то, насколько быстро она будет достигнута, существенно зависит от сознательного применения этого закона. Вот именно по этим причинам экономический анализ в социалистическом обществе должен быть более точным, детальным и конкретным по сравнению с марксистским анализом капиталистического общества, который ставит задачей изучение общих законов развития этого общества, вскрытие его противоречий, тенденций его развития и доказательство гибели. Вопросы же конкретные — открывать предприятие или не открывать его и пр. — такого рода вопросы не ставились. Напротив, анализ экономики социалистического общества должен носить совершенно конкретный и детальный характер, он должен служить базой для конкретных плановых решений.

В современной промышленности имеется чрезвычайное разнообразие возможных технических решений, а также взаимозависимость условий производства для разных видов продукции, тесная переплетенность различных экономических проблем. Все это в совокупности делает экономические проблемы чрезвычайно сложными, и, так как они носят явно выраженный количественный характер, становится ясной необходимость применения при их анализе математических методов, и притом не примитивных, а всего или большей части арсенала средств современной математики.

Бескризисное социалистическое общество по своей природе способно обеспечить наиболее полное использование ресурсов, наиболее полное развитие производительных сил. Поэтому оптимальный план является для него осуществимой реальностью, а количественные характеристики этого плана являются реальными закономерностями социалистического общества. Поэтому социалистическая экономика управляется экстремальными принципами подобно тому, как, скажем, вариационными принципами управляется механика. Поэтому наибольшее значение при математическом рассмотрении этих вопросов должен иметь экстремальный анализ.

Математические методы никогда не применяются непосредственно к жизненным вопросам. Всегда они применяются к некоторой модели реального явления. Примером такой модели является классическая механика. Естественно, что в вопросе о применении математических методов в планово-экономических вопросах существенно начать с построения соответствующих моделей. Мы рассмотрим отдельно две планово-экономические задачи — это задача текущего планирования и задача перспективного планирования. И соответственно в каждой задаче могут быть свои модели и методы их анализа. Задача текущего планирования, грубо го-



вора, может быть поставлена таким образом. Имеются на данный период (речь идет о сравнительно коротком периоде) определенные ресурсы труда, производственная база, оборудование, природные ресурсы, имеются определенное задание, требование к составу конечной продукции, которую нужно получить, причем эти требования определяются не из чисто экономических соображений; имеется множество возможных технических решений (можно ту или иную продукцию на том или ином предприятии производить одним или другим технологическим процессом и пр.). Каждый такой технологический способ связан с определенными затратами и дает определенную продукцию. Требуется составить оптимальный план, т. е. указать, охарактеризовать, в каком объеме тот или иной технологический способ будет применен, с тем, чтобы план не выходил из данных ресурсов и давал продукцию нужного состава и притом в максимальном количестве. При таком анализе нужен не только план сам по себе, но и интересен ряд экономических характеристик плана. В частности, очень большая, сложная проблема — это в том или ином виде проблема стоимости, проблема того, каковы затраты на каждую единицу продукции. Это вопрос непростой ввиду чрезвычайной переплетенности и зависимости производства. Скажем, уже года три идет дискуссия, как определять себестоимость в колхозах. Оказывается, что эти проблемы взаимосвязаны и что проблема оптимального плана и ее анализ существенно проливают свет и на вторую проблему. Именно оценки продукции являются количественными характеристиками оптимального плана. Раньше, чем говорить об этой общей задаче, я поясню это основное положение, именно, что оценки продукции объективно, «железным» образом определяются при анализе оптимального плана на некоторой более частной задаче. Рассмотрим более частную плановую задачу распределения программы между несколькими предприятиями. Имеется несколько предприятий и несколько видов продукции, причем известна производительность каждого предприятия при постановке на нем производства каждого вида продукции. Известен и состав, в котором надо иметь конечную продукцию. Как распределить это производственное задание между предприятиями, чтобы получить максимальный выпуск продукции нужного состава? Вот простой пример. Имеются три предприятия А, Б, В и два изделия № 1 и № 2.

### Месячное производство

Предприятие	Изделие № 1	Изделие № 2
А	400	200
Б	600	400
В	500	500

Ниже приведены два плана. В первом плане программа разверстана между предприятиями, каждое предприятие примерно в равном количестве производит то и другое изделие.

## План № 1

Предприятия	Годовая программа			
	Производство в месяцах		Объемы выпуска	
	Изделий № 1	Изделий № 2	Изделий № 1	Изделий № 2
А	4	8	1600	1600
Б	5	7	3000	2800
В	6	6	3000	3000
Всего			7600	7400

При этом плане производительность составляет 7600 и 7400 изделий. Вот другой план, иначе распределенный.

## План № 2

Предприятия	Годовая программа			
	Производство в месяцах		Объемы выпуска	
	Изделий № 1	Изделий № 2	Изделий № 1	Изделий № 2
А	12		4800	0
Б	6	6	3600	2400
В		12	0	6000
Всего			8400	8400

Здесь, как видите, и того и другого изделия получается на тысячу единиц больше. Последний план наилучший. Как можно было бы найти оптимальный план, не перебирая всех вариантов? Это можно было бы сделать следующим способом. Ниже это будет сформулировано в виде теоремы. Оказывается, должны существовать разумные оценки для продукции. Предполагается, что предприятия производят каждый месяц одни и те же затраты, независимо от того, какое изделие оно изготавливает. Пусть эти оценки есть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Если бы действительно такие оценки  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  для работы по изготовлению этих изделий существовали и мы их попытались бы определить для первого плана, вышло бы следующее. На первом предприятии делается и то, и другое изделие, поэтому:

$$400\lambda_1 = 200\lambda_2.$$

Для второго предприятия:

$$600\lambda_1 = 400\lambda_2.$$

Для третьего предприятия:

$$500\lambda_1 = 500\lambda_2.$$

Ясно, разумных оценок для этого плана найти невозможно. В плане 2 только в первом случае совмещается изготовление изделий:

$$600\lambda_1 = 400\lambda_2, \quad 3\lambda_1 = 2\lambda_2, \quad \lambda_1 = \frac{2}{3}\lambda_2.$$

А как все-таки с другими предприятиями? Скажем, на предприятии А получается все разумно. На предприятии А производится первое изделие, выработка 400 на 2 — 800, а если стали бы делать второе изделие, оценка продукции была бы 600. Решение выбрано разумным образом.

Оценки, связанные с данным планом, становятся особенно наглядными при геометрическом рассмотрении. Рассмотрим различные возможные планы (рис. 1).

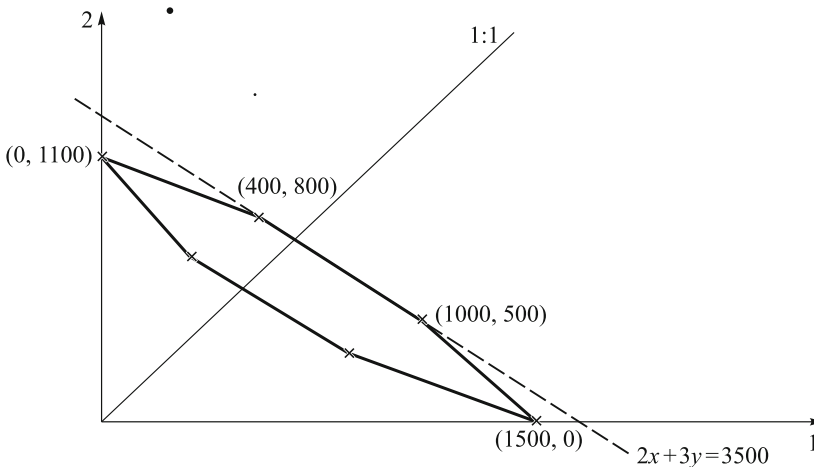


Рис. 1

Например, если бы мы все предприятия поставили на второе изделие, продукция была бы по первому 0, по второму 1100. Очевидно, одновременно с каждым двумя планами осуществимы и их взвешенные средние. Ясно, что они заполнят некоторый выпуклый многогранник. План 1 явно не наилучший, а план 2 наилучший, это крайняя точка этого многогранника, максимум при условии соблюдения заданного отношения. Если мы в этой экстремальной точке проведем опорную плоскость к этому многограннику, в данном случае опорную прямую, ее уравнение будет

$$2x + 3y = 3500.$$

Для этого плана и для способов, в нем используемых, получаются максимальные оценки продукции. Для всех других планов, если мы произведем оценку продукции, ее оценка будет ниже. Таким образом, оптимальный план характеризуется тем, что для него имеются оценки.

Опишем математическую модель основной задачи производственного планирования и приведем две теоремы, дающие характеристику оптимального плана (см. также Докл. АН СССР. Т. 115, № 3. С. 441–444).

Пусть имеется  $m$  продуктов и  $n$  производственных факторов. Имеется  $S$  технологических способов. Относительно  $s$ -го способа ( $s = 1, 2, \dots, S$ ) известно количество производимой продукции каждого вида, т. е. вектор продукции

$$X^{(s)} = (x_1^{(s)}, \dots, x_m^{(s)}).$$

Здесь  $x_i^{(s)}$  — количество продукции  $i$ -го вида ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), производимое в  $s$ -м способе. Кроме того, известен вектор, характеризующий затраты в данном способе

$$Z^{(s)} = (z_1^{(s)}, \dots, z_n^{(s)}),$$

где  $z_j^{(s)}$  — затраты  $j$ -го фактора ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) в способе  $s$ .

Производственный план задается указанием степени применения каждого способа, т. е. указанием чисел  $p_1, \dots, p_S$ ;  $p_s \geq 0$  ( $s = 1, 2, \dots, S$ ) ( $p_s = 0$ , если способ  $s$  в плане не используется).

Произведенная продукция и затраты в этом плане характеризуются векторами  $X$  и  $Z$ , компоненты которых дают соответственно количество произведенной продукции каждого вида и размеры затрат каждого фактора в данном плане:

$$X = \sum_{s=1}^S p_s X^{(s)} = (x_1, x_2, \dots, x_m), \quad x_i = \sum_{s=1}^S p_s x_i^{(s)} \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$Z = \sum_{s=1}^S p_s Z^{(s)} = (z_1, z_2, \dots, z_n), \quad z_j = \sum_{s=1}^S p_s z_j^{(s)} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Задача разыскания оптимального плана определяется следующими условиями:

1) затраты производственных факторов не должны превосходить заданных значений (их ресурсов)

$$Z \geq -Z_0 \quad (z_j \geq z_j^0, \quad j = 1, 2, \dots, n)$$

(здесь поставлено неравенство  $\geq$  с учетом того, что затраты записываются со знаком минус);

2) продукция должна иметь заданный состав (задан ассортимент):

$$\frac{x_1}{k_1} = \frac{x_2}{k_2} = \dots = \frac{x_m}{k_m}$$

( $k_1 : k_2 : \dots : k_m$  — отношения, определяющие состав продукции);

3) продукция должна быть максимальной по объему.

План, удовлетворяющий условиям 1)–3), называется *оптимальным*, а удовлетворяющий условиям 1), 2) — *допустимым*.

Приведем математическую формулировку критериев оптимальности плана.

**Теорема 1.** Если для данного допустимого плана можно найти такие оценки (множители) для всех видов продукции  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , ( $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum \lambda_i > 0$ ) и производственных факторов  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  ( $\mu_j \geq 0$ ), что для используемых в этом плане способов алгебраическая сумма оценок равна нулю, а для неиспользуемых она  $\leq 0$ ,

т. е.

$$\sum_i \lambda_i x_i^{(s)} + \sum_j \mu_j z_j^{(s)} = 0, \quad \text{если } p_s > 0, \quad (1)$$

$$\sum_i \lambda_i x_i^{(s)} + \sum_j \mu_j z_j^{(s)} \leq 0, \quad \text{если } p_s = 0, \quad (2)$$

то данный план оптимален.

**Теорема 2.** Если данный план оптимален, то всегда существуют такие неотрицательные оценки  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ , что выполнены условия (1) и (2).

Эта модельная задача представляет своеобразный круг задач, именно, экстремальные задачи при наличии ограничивающих неравенств. Какие способы решения тут применимы? Эта задача может рассматриваться и как задача классического анализа. Можно свести ее к нахождению максимума линейной функции на многограннике. Достаточно перебрать значения функции в вершинах многогранника, и максимум будет найден. Беда только в том, что даже в простейшем случае, если имеется, например, 8 предприятий и 5 видов продукции, этих вершин более 800 000 000. Никакие электронные машины с этой или еще более сложной задачей не справятся. Основные расчетные методы основаны на применении указанной характеристики плана и, значит, на одновременном нахождении с планом оценок, которые, кстати, нужны сами по себе. Прежде всего, особенно просто осуществляется проверка плана. Если план дан, то, чтобы проверить его, не сравнивая со всеми другими возможными вариантами, единственное, что нужно сделать, это попытаться найти для него оценки. Если они найдутся, то тогда мы убедимся, что план оптимальный. На этом основан первый способ нахождения оптимального плана. Берем произвольный план и пытаемся найти для него оценки  $\lambda$ . Если при этом для  $\lambda$  получаются противоречивые соотношения, то обычно из самих соотношений видно, в каком направлении следует изменить план. Произведя нужные изменения, повторим описанный процесс. В конце концов, придем к оптимальному плану. Все это имеет простой экономический смысл: если обнаруживаются ошибки, то их исправляют, только разница в том, что эти ошибки выясняются и исправляются не в действительности, а на арифмометре или другой счетной машине. Другой способ заключается в последовательном уточнении оценок. Можно искать не план, а оценки. Задаемся какими-то оценками. Если  $\lambda$  заданы, то каждому предприятию ясно, какое изделие и в каких количествах производить. Определяя общий выпуск продукции при данных оценках, сравниваем его с плановым заданием. Допустим, выяснилось, что изделия 1 будет при этом произведено больше, чем нужно по плану, а изделия 2 меньше или совсем не будет. Тогда снижаем оценку для изделия 1. Получается своеобразный «механизм конкуренции». Но опять этот процесс совершается не в действительности, а на том же арифмометре. Наконец, третий способ — это способ двусторонних приближений для оценок, когда удается получить приближение сверху и снизу для них. Любопытно, что при этом способе мы какие-то результаты имеем до того, как найдено полное решение, и притом иногда нам и данные некоторые неизвестны, но мы какие-то результаты получаем и в этом случае. Преимущество этого способа в том, что мы определенное решение можем принимать, не зная всех данных, зная лишь, что они на решение не повлияют. Эти методы успешно применяются, как я говорил, не только на арифмометре, но и на

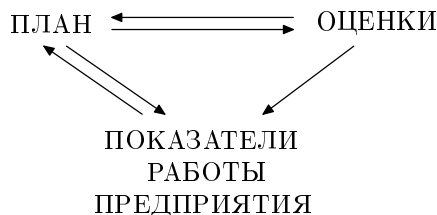
электронных машинах. В частности, у нас в Ленинградском отделении математического института были проведены опыты по отношению к одной из задач. Именно, задача рационального планирования перевозок решалась на «Стреле». Решали разными вариантами подобных методов.

Задачи, требующие подобного аппарата, возникают не только в социалистической экономике, но и в капиталистической экономике. Но там они имеют несколько иной характер. Например, следующий вопрос. Заданы ресурсы, оборудование, мощность и пр., но состав продукции требуется определить из условия, чтобы эта продукция давала максимальную прибыль. Задача тогда сводится к определению максимума линейной формы при некоторых естественных ограничениях на переменные (скажем, ограниченность ресурсов и т. п.). Это основная задача линейного программирования. Для решения подобных задач существуют эффективные алгоритмы. Также математически эквивалентны этому кругу задач и основные задачи теории игр. Используется, в частности, итеративный метод, похожий на итеративные методы линейной алгебры.

Но важна не только задача нахождения плана, потому что план, просто составленный на бумаге, не реализуется. План должен постоянно меняться и корректироваться в процессе его реализации. Как математический анализ может служить этой цели? Что может измениться? Могут открыться новые ресурсы, может обстановка потребовать изменения конечной программы, могут открыться новые технологические способы. Если план составлен, как его корректировать в связи с этими изменениями? Для этого имеется очень простое соотношение. Вместе с данным планом видны и условно-оптимальные планы, т. е. оптимальные планы, близкие к нему. Именно, если сделана вариация в основных видах продуктов, программе и затратах, то для оптимальных планов должно получаться следующее соотношение, связывающее изменения при переходе от одного оптимального плана к другому:

$$\lambda_1 \Delta x_1 + \lambda_2 \Delta x_2 + \dots + \lambda_m \Delta x_m = \mu_1 \Delta z_1 + \mu_2 \Delta z_2 + \dots + \mu_n \Delta z_n.$$

Геометрически это относится к тому случаю, когда оптимальная точка лежит не в вершине многогранника, а на грани полной размерности. Это соотношение легко позволяет определять изменения затрат в зависимости от изменений планового задания. Легко проверяется также целесообразность применения некоторого нового способа, не предусмотренного в процессе составления плана. Достаточно взвесить для этого способа по оценкам продукцию, даваемую им. Если продукции будет больше, то его привлечение целесообразно, в противном случае нет. Таким образом, оценки, определенные в процессе составления плана, сами становятся средством его дальнейшего улучшения и реализации. Схематически эту взаимозависимость можно изобразить следующим образом:



Третье. План выполняется людьми, и поэтому план только тогда будет реален, когда имеется должная заинтересованность в его выполнении. Для этого важна правильная оценка результатов работы, чтобы в случае, когда работа сделана хорошо, соответствовал оптимальному плану, она хорошо и оценивалась бы, и наоборот. Как известно, работа предприятий оценивается по таким статистико-экономическим показателям, как валовая продукция, производительность труда и пр. Бывают случаи, когда не совсем так обстоит дело, как здесь описано. Если эти показатели составлены неудачно, то часто оказывается, что они могут стимулировать неправильную работу. Для составления этих показателей тоже очень существенно использование этих конкретных оценок продукции и производственных факторов. Скажем, что можно естественным образом принять за характеристику успешности работы в этом примере? Можно принять сосчитанную по этим оценкам оценку продукции, т. е. произведенной работы по изготовлению. Если для предприятия оценка по изделию 1 — 800, а по изделию 2 — 600, то предприятие будет заинтересовано в том, чтобы производилось изделие 1. Если мы взяли бы другие оценки или пользовались бы показателем не чистой продукции, а валовой продукции, т. е. присчитывали бы еще и стоимость затрат материалов, то вышло бы наоборот: по оптимальному плану предприятие должно производить изделие 1, а выгодно ему производить изделие 2. Итак, показатели работы предприятий должны определяться через план с учетом оценок, и тогда они будут стимулировать работу таким образом, чтобы придерживаться этого оптимального плана. Среди экономистов длительное время дискутировались вопросы, что правильнее считать основным показателем: чистую продукцию или валовую товарную. Математический анализ дает совершенно определенный ответ на этот вопрос. Именно в характеристике объема правильнее руководствоваться чистой продукцией, правильно исчисленной рентабельностью. Правильно исчисленная рентабельность приводит к тому, что называется высшей рентабельностью народного хозяйства.

Перейду к модели перспективного планирования. Могут быть различные модели перспективного планирования. Остановимся на дискретной модели. Перспективное планирование характеризуется тем, что необходимо анализировать действие вложений, которые реализуются в течение длительного времени. Строится предприятие, сначала мы в него только «вгροхали» средства, оно ничего не дало, потом оно даст продукцию. При решении вопроса об эффективности таких затрат нельзя ограничиваться рассмотрением только за короткий период. Необходимо рассмотрение за длительный период. Такой вопрос не может рассматриваться изолированно, он должен рассматриваться в общем перспективном плане. Как выглядит модель перспективного плана, можно представить таким же образом. Имеем ряд промежутков времени, характеризуемых номерами  $t = 0, 1, \dots, T$ . Способ здесь уже характеризуется не только тем, **что** тратится, но и **когда** тратится. Он характеризуется уже не вектором затрат, а матрицей  $Z_i^{t(s)}$ .

Точно так же продукция характеризуется матрицей  $X_j^{t(s)}$ . Таким образом, план производства характеризуется тем, что он должен не выходить из данных ресурсов (как первично данных, так и создаваемых в процессе производства), должен давать продукцию определенного состава и притом в максимальном количестве. Достаточно даже, чтобы план был условно-оптимальным, т. е. чтобы не было плана, который при тех же ресурсах давал бы более высокую продукцию во все моменты. Для такого условно-оптимального плана тоже верна наша теорема (ее даже

доказывать не надо вновь, все равно, матрица или вектор), именно, имеются определенные оценки для каждого вида затрат во все моменты и оценки для каждого вида продукции во все моменты — система оценок, причем если мы для данного способа сосчитаем затраты за все время по этим оценкам с учетом их изменений во времени и подсчитаем продукцию, то окажется, что оптимальный план характеризуется тем, что в нем применены только рентабельные планы, где сумма затрат совпадает с оценкой продукции. Полезно как-то нормировать эти оценки, привести их к одному моменту. Именно, с ростом производительности труда все, в принципе, дешевеет. От оценок  $\lambda_i^t$  и  $\mu_j^t$  можно перейти к оценкам  $\lambda_i^{t'}$  и соответственно  $\mu_j^{t'}$ , умножая их на некоторые множители  $\alpha_t$ :

$$\lambda_i^{t'} = \alpha_t \lambda_i^t, \quad \mu_j^{t'} = \alpha_t \mu_j^t,$$

с условием, что в начальный момент:

$$\sum_i \lambda_i^0 + \sum_j \mu_j^0 = 1.$$

За счет  $\alpha_t$  можно нормировать оценки так, чтобы в любой момент  $t$  было:

$$\sum_i \lambda_i^{t'} + \sum_j \mu_j^{t'} = 1.$$

Оказывается, эти множители  $\alpha_t$  имеют простой смысл. В этих оценках условие рентабельности способа переписется таким образом:

$$\sum_t \alpha_t \sum_i \lambda_i^{t'} x_i^{t(s)} = \sum_t \alpha_t \sum_j \mu_j^{t'} z_j^{t(s)}.$$

При подсчете рентабельности способа мы подсчитываем затраты обычным образом, но нужно эти затраты умножить на множители  $\alpha_t$ , приводящие к данному моменту. Та же затрата, но делаемая через 5 лет, должна быть меньше сегодняшней ее стоимости. Эти величины характеризуют эффективность капиталовложений и рост производительности.

Кроме такой дискретной модели могут использоваться и другие модели. Могут использоваться непрерывные модели, например, в случае небольшого числа видов продукции можно применять методы динамического программирования, которые разработаны Беллманом и в дискретной и в дифференциальной форме. Мне они представляются эффективными только в моделях с небольшим числом видов продукции.

Хочу остановиться еще на вопросе о составе конечной продукции. Я уже говорил о том, что состав конечной продукции должен быть определен из общей обстановки. Ясно, что он не может определяться только из чисто экономических соображений. Тот факт, что человек пшеницу ест, а лебеду не ест, это физиологический факт, а не экономический. Но я хочу обратить внимание на то, что и при решении этого вопроса экономические моменты играют значительную роль. Прежде всего, в состав конечной продукции входят средства на капиталовложения, т. е. на производство средств производства. Состав этих средств производства в значительной мере определен перспективным планированием. Таким образом, значительную часть состава по конечной продукции определяет перспективное планирование. В распределении долей различных видов продукции также существенную



роль играет то, чего стоит данный продукт. Например, при потреблении рыбы и мяса, если, скажем, рыбу ловить трудно, а мясо получать легко, то доля мяса вырастет в потреблении. Я не буду рисовать здесь схем, но если бы мы нарисовали такие схемы, то увидели бы ряд связей между этими проблемами. Состав ресурсов также определяется данными перспективного планирования. Таким образом, имеется ряд взаимосвязей, необходимых и для построения системы планового анализа и для управления ею. Этот аппарат может использоваться в таких вопросах, как анализ спроса населения и розничных цен. Нельзя планировать «в чистом виде», без учета этих факторов. Анализ этого вопроса требует, по-видимому, использования других математических моделей, но несомненно, что в анализе этих вопросов математические методы могут сыграть существенную роль.

Теперь несколько слов относительно областей применения такого рода моделей или методов анализа. Следует различать экономические микропроблемы и макропроблемы. Микропроблемы — это проблемы, относящиеся к одному предприятию или группе предприятий, например, вопросы внутризаводского планирования или такие технические вопросы, как рациональный раскрой, календарные планы. Другие вопросы могут быть переходными, относящимися к целой отрасли, например, планирование перевозок продуктов в союзном масштабе. К макропланированию относятся вопросы народнохозяйственного планирования в целом и определения экономических показателей. Если при рассмотрении микропроблем основное для успешного применения математических методов состоит в выделении некоторого автономного круга вопросов, который мало был бы связан с другими или, во всяком случае, допускал бы изолированное рассмотрение, то в вопросах народнохозяйственного планирования в целом основную проблему составляют вопросы фактического применения подобных моделей и определения нужных для них показателей, потому что ясно, что в непосредственном виде это не может быть осуществлено. Нельзя, конечно, все виды продукции включить в анализ и получить реальные данные, нужны укрупненные модели на десятки видов продукции. Могут быть использованы и некоторые показатели, опирающиеся на анализ действующего плана и экономической практики. Могут использоваться, в частности, разработанные в Соединенных Штатах леонтьевские матрицы межотраслевых связей; это приводит к решению больших систем линейных уравнений. Эти грубые приближения также могут быть использованы, так как основной анализ должен быть направлен не на план в целом, а на возможные вариации плана.

Мне представляется, что кроме такого непосредственного применения, математический анализ имеет существенное значение и для качественного понимания экономических вопросов. Это относится и к вопросам микроанализа — скажем, существование местных оценок на данный момент, и к некоторым общим вопросам. Я уже приводил пример — вопрос о показателях, характеризующих работу предприятия. Другой пример — вопрос об учете ренты: нужно у нас учитывать ренту или нет. Среди экономистов было сомнение, присуща социалистическому строю рента или не присуща. На таком уровне было трудно дать определенный ответ. Потом было принято, что присуща, но все же систематически ренту исчислять и использовать не стали. А при модельном анализе выявляется, что учет такого фактора, как природные условия, необходим по существу, и этот фактор получает свою оценку. Если вычеркнуть эту величину из уравнений, то они теряют силу, так же как, если, например, силы реакции вычеркнуть из уравнений статики, эти

уравнения потеряют смысл. То же относится и к другим вопросам, например, имеют ли стоимость средства производства и подчинены ли они законам стоимости. Снова в модельном анализе выясняется, что средства производства должны иметь определенную оценку.

В заключение я скажу несколько слов относительно значения электронных машин в планово-экономическом анализе. Применение электронных машин имеет огромное значение: их использование дает возможность в короткие сроки обрабатывать многочисленные данные и получать результаты. Однако некоторые считают, что наличие электронных машин автоматически решает также вопросы и о совершенствовании планово-экономических расчетов. Конечно, это не так; важно не только то, как быстро считает машина, но и что она считает. Не меньшее значение, чем ускорение расчетов, имеет совершенствование методов расчетов и переход в том или ином виде на систему оптимального планирования. В этой же связи я хотел сказать и относительно того, какого рода машины важны для экономических расчетов. Принято считать статистические и планово-экономические расчеты простыми: надо складывать, умножать на постоянные множители — надо пользоваться примитивными машинами. Между тем проблема оптимального планирования требует весьма сложного математического анализа. Я упомянул лишь некоторые из возможных моделей; бывают и непрерывные модели. Ясно, что экономические расчеты по системе оптимального планирования, которые — я не сомневаюсь — нам необходимы, должны потребовать машин быстродействующих, с полным программным управлением, с большой памятью (кроме активной памяти, может быть, нужна и большая пассивная память); важна также возможность объединения работы подобных машин, систематической передачи данных от одной машины к другой. Центральная Госплановская машина должна «общаться» с совнархозовскими вычислительными центрами. При этом, конечно, очень важна и разработка статистико-экономических показателей, необходимых для подобной системы, а также способов самообучения этой, так сказать, кибернетической системы.

В заключение я хочу выразить уверенность в том, что планово-экономический анализ представляет обширную область для применения математических методов, с одной стороны, и вычислительной техники, с другой стороны, и что более широкое и систематическое использование этих методов может обеспечить еще более полную реализацию возможностей и преимуществ социалистического общества.

Записали: Г. Цейтин и Ю. Варенова  
Редактировали: А. Корбут и Г. Цейтин

#### Комментарии В. Л. Канторовича

Проф. А. М. Вершик, бывший в 1950-е годы студентом-математиком Ленинградского университета, вспоминал<sup>1)</sup>, что на семинаре по функциональному анализу Фихтенгольца — Канторовича, который он посещал, соблюдался некий «внутренний запрет, причины которого были известны старшим участникам семинара, невяно наложенный на открытые разговоры о цикле работ Леонида Витальевича» по оптимизации. Даже если доклад, пусть и в абстрактной постановке, касался этого направления, «я не помню, чтобы Леонид Витальевич или кто-то другой как-либо комментировал его или говорил о том, в каком контексте следует воспринимать эту тему», — пишет Вершик.

<sup>1)</sup>Вершик А. М. О Л. В. Канторовиче и о линейном программировании. [2002, 1]. — С. 130.

Для этого были определенные основания. Закончив в ноябре 1942 г. свою основную экономическую работу «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», Л. В. Канторович сразу же начал добиваться возможности практического применения изложенной в ней методики оптимального планирования. Он направил свою работу в Госплан, в Институт экономики АН, но ответа не было. После ряда его настойчивых писем руководству страны, в частности, Н. А. Вознесенскому, обсуждение его работы все-таки состоялось, но носило совсем не тот характер, на который рассчитывал автор. «Канторович предлагает оптимум, а кто еще предлагал оптимум? Фашист Парето» — восклицал авторитетный статистик, проф. Б. С. Ястремский<sup>2)</sup> на совещании в Госплане, состоявшемся в 1943 г.

«Все говорило о том, что необходимо на определенное время оставить эти работы. Их продолжение становилось опасным — как я узнал впоследствии, мои предположения были небезосновательны. Вариант моей изоляции всерьез обсуждался. Конечно, это было жестоким ударом для меня» — вспоминал Л. В. Канторович<sup>3)</sup>.

Вскоре после смерти Сталина, в 1954 г. Л. В. вновь предпринял оказавшуюся неудачной попытку достучаться до власти — экономическая работа не могла быть опубликована без разрешения. В этой акции активно участвовал проректор ЛГУ, герой войны, проф. С. В. Валландер (1917–1975). Их переписка с ЦСУ и Госпланом опубликована<sup>4)</sup>.

Ситуация изменилась в 1956 г. после XX съезда. Была реабилитирована кибернетика, в октябре состоялась сессия АН по автоматизации, где Л. В. впервые официально говорил о своих экономических работах [1957, 7] и где его поддержал А. Н. Колмогоров. В конце ноября Л. В. выступил в Ереване на сессии АН Армении с докладом о разрабатываемой в его лаборатории в ЛОМИ системы автоматического программирования для ЭВМ [1957, 5]. Вероятно, тогда же пригласивший его на сессию Президент АН Армении В. А. Амбарцумяна и академик С. Л. Соболев, с которыми Л. В. был близко знаком еще со студенческих лет, направили письмо «О применении математических методов в экономической науке и планировании» Президенту АН СССР А. Н. Несмеянову, а также зав. отделом науки ЦК В. А. Кириллину и председателю Госплана И. И. Кузьмину, которое, наконец, возымело действие<sup>5)</sup>. Несмеянов и Кириллин энергично поддерживали усилия Л. В. Канторовича по организации его докладов и выступлений и способствовали публикации его работ. В 1957 г. Л. В. читает доклады о своих экономических работах в самых разных аудиториях: в феврале — в Ленинградском инженерно-экономическом институте, в апреле — на семинаре на экономическом факультете ЛГУ в апреле и мае — в ленинградском Доме ученых, в мае — на семинаре в МИАН, на ленинградском общегородском математическом семинаре и на совещании в Институте экономики АН, в июне — на специально созванном по поручению А. Н. Несмеянова совещании в Отделении экономики, философии и права АН под председательством секретаря ОЭФПН академика В. С. Немчинова (материалы этого совещания опубликованы в [2002, 1], с. 470–494), в декабре — на секции экономической статистики в московском Доме ученых и на научной сессии в ЛГУ.

Текст последнего, публикуемый в данном издании, вероятно, с наибольшей полнотой передает содержание докладов того времени, так как был тщательно и профессионально записан и отредактирован Ю. П. Вареновой, А. А. Корбутом и Г. С. Цейтиным.

Многочисленные доклады и выступления Л. В. позволили убедить в важности и научной безупречности этого цикла его работ многих ученых. Они в дальнейшем оказали ему неоценимую помощь в трудных и острых дискуссиях с ортодоксальными марксистами в конце 1950-х и начале 1960-х гг. Это математики А. Н. Колмогоров, А. А. Ляпунов, А. А. Марков, С. Л. Соболев, Н. А. Шанин, экономисты Л. Я. Бэрри, А. Л. Вайнштейн, А. А. Конюс, А. Л. Лурье (я называю только ученых старшего поколения). Он получал поддержку и из кабинетов М. В. Келдыша, В. А. Кириллина, М. А. Лаврентьева.

<sup>2)</sup> Б. С. Ястремский (1877–1962) — д. э. н., работал в НИИ ЦСУ и МГУ. Его соавтор и ученик А. Я. Боярский (1906–1985) был в 1960-е годы одним из наиболее ярких (в жанре политического доноса) критиков Л. В. Канторовича и теории оптимального планирования.

<sup>3)</sup> Канторович Л. В. Мой путь в науке [2002, 1]. — С. 60.

<sup>4)</sup> См. [2002, 1]. — С. 414–462.

<sup>5)</sup> Это письмо опубликовано в [2002, 1]. — С. 494–496.

# О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта. I

В настоящей заметке мы рассмотрим некоторые математические задачи, связанные с наивыгоднейшей организацией производства в определенных условиях. § 1 посвящен постановке соответствующих математических проблем, § 2 — изложению некоторых методов их решения, § 3 — возможным применениям. Все рассматриваемые здесь задачи сходны между собой, другие циклы задач будут рассмотрены в следующих заметках.

§ 1. Рассмотрим следующие задачи:

**Задача А.** Найти числа  $h_{ik} \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k = 1, 2, \dots, m$ ), подчиненные условиям:

$$\sum_k h_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

$$\sum_i h_{i1} \alpha_{i1} = \dots = \sum_i h_{im} \alpha_{im} = z \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

где  $\alpha_{ik} \geq 0$  заданные числа и притом так, чтобы величина  $z$  оказалась максимальной.

**Задача В.** Найти функции  $h_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), удовлетворяющие условиям:

$$\sum_k h_k(x) = 1,$$
$$\int_E h_k(x) \alpha_k(x) dx = C \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

где  $\alpha_k(x) \geq 0$  ограниченные заданные функции, а функции  $h_k(x)$  должны быть подобраны так, чтобы постоянная  $C$  оказалась наибольшей.

**Задача С.** Найти аддитивную функцию  $H(e) \geq 0$  плоской совокупности  $e$  так, чтобы были выполнены условия:

$$\int_{E_x} \alpha(x, y) H(de_x) = 1,$$
$$\int_{E_y} \alpha(x, y) H(de_y) h_k(x) = C = \text{const},$$

где  $\alpha(x, y) \geq 0$  — заданная функция, измеримая (В), а  $H$  ищется из условия, чтобы  $C$  была наибольшей.

Очевидно, задача А есть частный случай задачи В, а последняя частный случай задачи С.

**Задача Д.** В задаче А, не изменяя остальных условий, заменим (2) на более общее:

$$\sum_i \sum_l \gamma_{ikl} h_{il} = z.$$

**Задача Е.** В задаче А поставим дополнительное условие:

$$\sum_{i,k} h_{ik} \beta_{ik} \leq T,$$

где  $T$  и  $\beta_{ik}$  — заданные числа.

**§ 2.** Начнем с замечаний о существовании решения. Если речь идет о задаче А, то система чисел  $h_{ik}$  неотрицательных и удовлетворяющих условию (1) образуют  $n(m-1)$ -мерный многогранник в  $mn$ -мерном пространстве (прямое произведение  $(m-1)$ -мерных тетраэдров в  $n$ -мерном пространстве). Уравнение (2) определяет некоторое семейство параллельных (гомотетичных)  $m(n-1)$ -мерных плоскостей. Нужно выбрать максимальное  $z$ , при котором указанная плоскость еще касается многогранника. Очевидно, решение этой задачи существует, но не обязательно единственно. Заодно отметим одно свойство решения. Именно ясно, что среди решений будет по крайней мере одно, лежащее на  $mn - [m(n-1) + 1] = (m-1)$ -мерной грани указанного многогранника. Но на  $(m-1)$ -мерной грани указанного многогранника могут лежать лишь точки, среди координат которых  $-h_{ik}$  по крайней мере  $(n-1)(m-1)$  нулевых. Итак, видим, что среди решений имеется такое, что  $(n-1)(m-1)$  чисел  $h_{ik}$  нули.

Для задач Д и Е существование решения вытекает из аналогичных элементарных соображений. Существование решения для проблемы С ясно из того, что благодаря условию первому вместе с положительностью все допустимые к рассмотрению аддитивные функции совокупности  $H$  имеют ограниченную (одну и ту же) вариацию, а множество таких функций ( $E_x$  и  $E_y$  предполагаются ограниченными), как нам известно, компактно, что и обеспечивает решение для рассматриваемой экстремальной задачи. Задача В представляет частный случай задачи С, а потому и для нее существование решения можно считать установленным, впрочем, это непосредственно вытекает из слабой компактности семейства ограниченных функций, интегрируемых  $L$ .

Однако как ни просты эти задачи с точки зрения существования решения, указание удобного эффективного метода их решения, даже для простейшей из них — задачи А, представляется затруднительным. Так, например, то рассуждение, которое мы приводили при доказательстве существования решения задачи А, дает и простой теоретический метод ее решения, именно нужно выбрать из  $mn$  чисел  $h_{ik}$  любым образом  $(m-1)(n-1)$  равных нулю, после чего остальные уже без труда находятся из уравнений. После этого следует сравнить получающиеся значения  $z$  для каждого случая. Однако таких попыток, как легко сообразить, придется сделать  $m^n C_{n(m-1)}$ , т. е. в простом сравнительно случае  $n = m = 4$  нужно сделать 56 320 попыток, причем при каждой попытке понадобится решать систему линейных уравнений. И другой, геометрический метод постепенного перехода с грани на грань многогранника в направлении  $\text{grad } z$  представляется недостаточно эффективным.

Укажем теперь несколько приемов получения решения, хотя также не очень простых, но все же могущих быть практически реализованными.

Случай  $m = 2$ . Рассмотрим прежде всего простейший случай  $m = 2$ , когда решение задач А и В сравнительно легко. Именно, в этом случае, если мы изменением нумерации добились того, что:

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}} \geq \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}} \geq \dots \geq \frac{\alpha_{m1}}{\alpha_{m2}},$$

то достаточно подобрать  $i = i_0$  первое, для которого:

$$\sum_{i=1}^{i_0} \alpha_{i1} \geq \sum_{i=i_0}^n \alpha_{i2},$$

и принять  $h_{11} = \dots = h_{i_0-1,1} = 1$ ,  $h_{i_0+1,1} = \dots = h_{n1} = 0$ , а  $h_{i_0,1}$  подобрать из условия, чтобы выполнялось равенство:

$$\sum_{i=1}^{i_0} h_{i1} \alpha_{i1} = \sum_{i=i_0}^n (1 - h_{i2}) \alpha_{i2}.$$

Аналогичным образом решается и задача В. В этом случае имеем, если обозначить  $E_\lambda$  совокупность тех  $x$ , для которых  $\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} \geq \lambda$ , и подобрать  $\lambda = \lambda_0$  из условия, что

$$\int_{E_\lambda} \alpha_1(x) dx = \int_{CE_\lambda} \alpha_2(x) dx$$

(что возможно), то, полагая  $h_1(x) = 1$  на  $E_\lambda$  и  $= 0$  на  $CE_\lambda$ , получаем решение задачи.

Случай  $n = 2$  в задаче А. Если вместо  $h_{ik}$  взять за новые неизвестные  $\alpha_{ik} h_{ik}$ , то, как легко убедиться,  $m$  и  $n$  обменяются ролями и вместо задачи максимизации придется рассматривать задачу о минимуме. Таким образом, случай  $n = 2$  приводится к случаю  $m = 2$ .

В дальнейшем пока ограничимся задачей А.

Случай  $m = 4$  и  $n = 4$ . Здесь наиболее просто, по-видимому, следующее решение. Разбиваем индексы (1, 2, 3, 4) на группы по 2 всеми шестью способами. Рассмотрим, например, разбиение (1, 3) и (2, 4). Принимаем тогда  $h_{21} = h_{41} = h_{22} = h_{32} = h_{42} = 0$  и  $h_{13} = h_{33} = h_{14} = h_{34} = 0$ . Остальные значения  $h$  определим из условия максимального соответствия сумм, что сводится к решению вопроса для случая  $m = 2$  или  $n = 2$ . Далее, изменяя значения  $h$  для одного индекса, добиваемся того, чтобы общее значение 1-й и 2-й суммы совпало с общим значением 3-й и 4-й суммы. Из полученных 12 значений выбираем максимальное, оно, как легко убедиться, и представляет решение задачи.

Случай  $m = 4$ ,  $n$  любое. Один способ здесь состоит в том, что, взяв некоторое исходное приближение, улучшаем его, последовательно выделяя четверки столбцов  $h_{ik}$  и применяя к ним решение предыдущей задачи. Второй, для данного случая, пожалуй, более удобный путь, такой. Исходим из определенного первого приближения, для которого равенство (2) соблюдается, но  $z$  не максимально. После этого,

пользуясь решением задачи для  $m = 2$ , варьируя  $h_{i1}$  и  $h_{i2}$ , но не меняя их суммы  $h_{i1} + h_{i2}$ ; таким же образом, варьируя  $h_{i3}$  и  $h_{i4}$ , повышаем полученное значение  $z$ . Далее, опять восстанавливаем их равенство. После этого варьируем суммы  $(h_{i1} + h_{i2})$  и вычисляем соответствующее изменение сумм. При этом, если значение  $z$  не максимально, то, изменив одну сумму  $h_{i1} + h_{i2}$  и увеличив другую  $h_{i1} + h_{i2}$ , можно всегда получить для  $z$  большее значение. Такими последовательными вариациями можно, наверное, прийти к максимальному значению для  $z$ . Это вытекает из того, что если  $z$  не максимальное, то, благодаря выпуклости области изменения аргументов, существует непременно и бесконечно малая вариация переменных, приводящая к увеличению  $z$ .

Третий способ. Задавшись некоторым приближением и пользуясь решением задачи для  $m = 2$ , изменением  $h_{ik_1}$  и  $h_{ik_2}$  без изменения  $h_{ik_1} + h_{ik_2}$ , добиваемся увеличения  $\sum h_{ik_1} \alpha_{ik_1}$  и  $\sum h_{ik_2} \alpha_{ik_2}$  при сохранении равенства между ними. Продолжаем это для разных пар индексов  $k_1$  и  $k_2$ . Далее проводим еще операции следующего характера. Варьируем суммы  $(h_{i1} + h_{i2})$ , не меняя при этом отношений  $h_{i1}/h_{i2}$  и  $h_{i3}/h_{i4}$  и опять добиваясь увеличения наименьшей из сумм  $\sum h_{ik} \alpha_{ik}$ .

Мы здесь лишь для определенности говорили о случае  $m = 4$ , теми же самыми приемами, какими мы здесь сводили задачу для этого случая к случаю  $m = 2$ , можно задачу для случая  $m = 8$  привести к случаю  $m = 4$  и т. д. Однако в случае  $m > 4$  более целесообразно пользоваться следующим общим приемом.

Случай  $n$  и  $m$  любых ( $n > m$ ). Исходим из некоторой системы значений  $h_{ik}$ , для которой выполнены равенства (1) и (2), но значение  $z$  не максимально. Прежде всего, не уменьшая значения  $z$ , можем добиться того, что  $(n-1)(m-1)$  из чисел  $h_{ik}$  будет  $= 0$ . Пусть это условие не выполнено, т. е. имеется, по крайней мере,  $(n+m)$  значений  $h_{ik}$ , отличных от нуля. Тогда, как легко проверить, можно выделить из них  $2m$  таких, что  $0 < h_{ik} < 1$  и среди встречающихся значений  $i$  не более чем  $m$  различных. Составляем тогда систему уравнений:

$$\sum_i' \alpha_{ik} \Delta h_{ik} = \lambda; \quad \sum_k' \Delta h_{ik} = 0$$

(знак  $'$  у сумм показывает, что они распространены лишь на выделенные значения  $i, k$ ). Эта система, вообще говоря, имеет решение  $\Delta h_{ik} = \lambda p_{ik}$ . Принимаем теперь в качестве  $\lambda \geq 0$  число, для которого впервые реализуется одно из равенств  $h_{ik} + \lambda p_{ik} = 0$ . В таком случае, если выделенные  $h_{ik}$  заменить на  $h_{ik} + \lambda p_{ik}$ , то  $z$  заменится на  $z + \lambda > z$  и, по крайней мере, одно из выделенных  $h$  заменится 0. В случае, если указанная система не имеет решений, то можно добиться того, что одно из  $h_{ik}$  обратится в 0 без изменения  $z$ . Продолжая таким образом, добьемся того, что все  $h_{ik}$ , кроме  $(n+m-1)$  из них, будут нули. Пусть это достигнуто. Выделим те (в общем случае  $2m-1$  значений)  $(i, k)$ , для которых  $0 < h_{ik} < 1$ . Составим теперь систему уравнений:

$$\sum_k' \Delta h_{ik} = 0,$$

$$\sum_i' \alpha_{ik} \Delta h_{ik} + \delta_{ks} = q \quad (k = 1, 2, \dots, m), \text{ где } \delta_{ks} \text{ — символ Кронекера.}$$

Эта система (относительно  $\Delta h_{ik}$  и  $q$ ), вообще говоря, имеет для каждого  $s$  свое решение  $q_s > 0$ .

Тогда, если для некоторых индексов  $i, s_1, s_2$  будет  $h_{s_1} > 0$  и  $\alpha_{is_1} q_{s_1} - \alpha_{is_2} q_{s_2} > 0$ , то вариация, приводящая к увеличению  $z$ , возможна, и продолжаем процесс. Если это не имеет места ни для каких индексов, то максимум  $z$  достигнут. Мы не останавливаемся на случае, когда система, содержащая  $qs$ , не имеет решений — здесь исследование проводится несколько иначе. Полезно указать, что ввиду сравнительной сложности этого общего способа выгодно до его применения повысить насколько возможно значение  $z$ , пользуясь изложенными выше элементарными приемами.

Заметим, что если бы задачу А понадобилось решать для большого числа случаев, то возможно было бы сконструировать гидравлично-механический прибор, решающий эту задачу. Могли бы быть составлены облегчающие решение таблицы.

Решение задачи В возможно с помощью тех же приемов, которые даны для задачи А.

Для задачи С приближенное решение может быть получено сведением ее к задаче А посредством замены функции  $\alpha(x, y)$  на кусочно-постоянную усредненную функцию. Этот же прием позволяет получить приближенное решение задачи А, если  $n$  и  $m$  велики.

Решение задачи Е может быть проведено так же, как решение задачи А, единственное усложнение состоит в том, что если окажется достигнутым равенство  $\sum h_{ik} \beta_{ik} = T$ , то в дальнейшем можно допускать только такие вариации  $h_{ik}$ , которые не приводят к увеличению этой суммы. Наконец, задача D может решаться способами, указанными для задачи А с некоторыми усложнениями.

**§ 3.** Экономические вопросы, решение которых приводит к рассмотренным выше математическим задачам, многочисленны и весьма разнообразны по своему характеру. Мы ограничимся только некоторыми примерами таких задач.

ВОПРОС I. На  $n$  станках возможна обработка  $m$  видов материала с различной (известной) производительностью. Определить время обработки каждого материала на каждом станке так, чтобы выдержать заданное соотношение между материалами и добиться максимальной общей производительности<sup>1)</sup>.

Пусть в течение дня на  $i$ -м станке может быть обработано количество  $\alpha_{ik}^*$   $k$ -го материала. Подлежащие обработке количества материала должны относиться как  $p_1 : p_2 : \dots : p_m$ . Обозначим через  $h_{ik}$  время (в днях), которое  $i$ -й материал обрабатывается на  $k$ -м станке. Тогда приходим к условиям:

$$\sum_k h_{ik} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad h_{ik} \geq 0, \quad (1)$$

$$\frac{\sum_i h_{i1} \alpha_{i1}^*}{p_1} = \dots = \frac{\sum_i h_{im} \alpha_{im}^*}{p_m} = z = \max, \quad (2)$$

т. е. к условиям задачи А, если принять  $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}^*/p_m$ .

<sup>1)</sup>Эта задача была поставлена перед Институтом математики и механики ЛГУ лабораторией фанерного треста.



Если имеется еще ограничительное условие, что число человеко-дней не должно превышать  $T$ , а при обработке  $i$ -го материала на  $k$ -м станке должно работать  $\beta_{ik}$  человек, то имеем дополнительное условие:  $\sum_{i,k} h_{ik} \beta_{ik} \leq T$ , т. е. приходим к задаче Е.

Заметим еще, что благодаря тому, что большая часть  $h_{ik} = 0$ , полученное решение удобно для реализации — на каждом станке приходится обрабатывать, как правило, один вид материала.

С такого же типа задачей можно встретиться и в сельском хозяйстве. Пусть данный комплекс работ требуется произвести в кратчайший срок имеющимися средствами, причем известна эффективность каждого средства (комбайны, тракторы, конная сила и пр.) на каждом виде работ. Тогда нужное распределение средств получается с помощью решения задачи А. К подобной же задаче может привести вопрос о наилучшем плане использования механизмов и в других случаях (горное дело и пр.).

ВОПРОС II. Имеется  $n$  различных участков земли, площадью  $q_1, \dots, q_n$  га. Подлежит посеву  $m$  культур; по плану количества их должны относиться как  $p_1 : p_2 : \dots : p_m$ . Ожидаемый урожай  $k$ -й культуры на  $i$ -м участке пусть будет  $\alpha_{ik}^*$ . Тогда, если обозначить через  $h_{ik}^*$  площадь  $i$ -го участка, отводимую под  $k$ -ю культуру, то определение чисел  $h_{ik}^*$  при условии обеспечения максимального выполнения плана приводится к задаче А. Именно, если принять  $h_{ik} = h_{ik}^*/q_i$  и  $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}^*/q_i p_k$ , то получаем в точности уравнения (1) и (2) задачи А.

Если число участков велико, то можно считать, что  $\alpha_{ik}^*$  меняются непрерывно, и приходим к задаче В. К задаче Е приходим в случае дополнительных ограничительных условий. Пусть, например, часть земель поливные и в  $(i, k)$ -м случае требуется  $\beta_{ik}$  литр/сек на га. Если источник орошения обеспечивает  $T$  литр/сек, то получаем ограничивающее условие  $\sum_{i,k} h_{ik} \beta_{ik} \leq T$ . К более сложной задаче приводит дополнительное условие, что имеется заданное количество удобрений, которые дают различный эффект для разных почв и культур.

ВОПРОС III. Имеется  $n$  видов материала в количествах  $q_1, \dots, q_n$ . Из каждого вида материала могут быть изготовлены одни и те же  $m$  изделий. Пусть из единицы  $i$ -го вида материала получается  $\alpha_{ik}$  единиц  $k$ -го изделия. Требуется добиться максимальной продукции при условии, что количества различных изделий должны находиться в заданном отношении  $p_1 : p_2 : \dots : p_m$ . Решение вопроса сводится опять к задаче А. С такого рода задачей можно встретиться при распиловке имеющихся партий материала (стекла, досок, балок) на части нужного ассортимента. При этом здесь можно встретиться не только с задачей А, но и с задачей С.

ВОПРОС IV. Имеется запас топлива различных видов (нефть, антрацит, бурый уголь, торф), которые с различной эффективностью могут быть использованы в данных потребляющих установках. Как распределить это топливо, чтобы обеспечить максимальный срок работы данных установок. Вопрос сводится к задаче А. К той же задаче приводит и другой вопрос, связанный с энергетикой. Например, при заданном топливном балансе подобрать виды двигателей для различных целей (дизели, газогенераторные установки в автомобилях, паровые турбины, паровозы,

парк теплоходов, электростанции и т. п.) с тем, чтобы обеспечить основные показатели (общий тонно-километраж по каждому виду транспорта, общее количество киловатт по электростанциям и т. д.), выдерживая при этом заданное планом отношение между ними. Если, например, сумма капиталовложений при этом задана, получаем ограничивающее условие, приводящее к задаче E.

ВОПРОС V. Имеется  $m$  предприятий, причем на каждом может производиться одновременно  $n$  материалов. На каждом из предприятий может быть некоторое число различных способов организации производства ( $n_i$  для  $i$ -го предприятия). Пусть при  $l$ -м способе организации за день работы  $i$ -го предприятия производится  $\gamma_{ikl}$  единиц  $k$ -го материала. Требуется определить время работы каждого предприятия по данному способу, чтобы обеспечить максимальный выпуск материалов в заданном ассортименте:  $p_1 : p_2 : \dots : p_n$ .

Если обозначить время работы  $i$ -го предприятия по  $l$ -му способу через  $h_{il}$ , то решение вопроса приводится к задаче D:

$$\sum_l h_{il} = 1,$$

$$\sum_i \sum_l \gamma_{ikl} h_{il} \geq z = \max \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

С подобной задачей можно встретиться при подборе схем нефтеперерабатывающих производств для данной группы нефти при данном задании по нефтепродуктам. С тем же можно встретиться при распределении руд при выработке качественных сталей и т. п. К той же схеме приводится задача о наилучшем использовании механизмов, если некоторые механизмы производят одновременно несколько работ (комбайны и т. п.). К тому же приходим и в вопросе III, если из данного вида материала удобно изготавливать целые группы различных изделий, и в вопросе IV, если там принять во внимание дополнительно использование электростанций как тепловых установок.

ВОПРОС VI. Ряд грузов может перевозиться несколькими имеющимися видами транспорта или их комбинацией. В зависимости от вида груза он может перевозиться различными видами транспорта с различным эффектом. При наличном транспорте и данных грузах, подлежащих перевозке, требуется указать такое распределение грузов, при котором вся перевозка может быть осуществлена в кратчайший срок.

Этот вопрос приводится к задаче A, если каждую перевозку можно осуществлять одним видом транспорта, и к задаче D, если приходится применять перегрузку с одного вида транспорта на другой.

ноябрь, 1938 г.

#### Комментарии В. Л. Канторовича

Судя по воспоминаниям Леонида Витальевича «Мой путь в науке» ([2002, 1]. — С. 51–52), публикуемая рукопись относится, скорее всего, к осени 1938 г. Приведу соответствующее место из этих воспоминаний:

«Будучи профессором университета, я также заведовал отделом математики в Институте математики и механики ЛГУ (директором был В. И. Смирнов) и выполнял в связи с этим некоторые

административные обязанности. Однажды (весной 1938 г. — В. К.) ко мне на консультацию пришло несколько инженеров из Лаборатории фанерного треста с довольно грамотной поставленной задачей. При обработке на лущильных станках разного вида материалов получается различная производительность; в связи с этим выход продукции этой группы станков зависел от такого, казалось бы, случайного факта, какая группа сырья на какой лущильный станок была направлена. Как это обстоятельство рационально использовать?

Меня эта задача заинтересовала, но все-таки показалась довольно частной, элементарной, так что я не стал, бросив все, ею заниматься. ... Летом или после отпуска мне стали приходиться в голову конкретные, в какой-то мере похожие экономические, инженерные и хозяйственные ситуации, где тоже требовалось решение задачи максимизации при наличии ряда линейных ограничений.

В простейшем случае одного-двух переменных такие задачи решаются запросто — перебрать всевозможные крайние точки и выбрать наилучшую. ... Я строил частные приемы решения отдельных видов таких задач, геометрические приемы и, вероятно, впервые, докладывал об этой задаче в 1938 г. на Октябрьской научной сессии Герценовского института, причем в основном это была постановка ряда задач и некоторые соображения по их решению.

... Насколько мне помнится, в январе 1939 г. мной был создан метод разрешающих множителей, в котором решение самой системы в каком-то смысле заменялось, объединялось с задачей нахождения некоторых множителей, соответствующих каждому виду продукции».

Вероятно, публикуемая рукопись по содержанию соответствует упомянутому докладу в Ленинградском педагогическом институте им. А. И. Герцена.

На наш взгляд, наибольший интерес вызывают чисто интуитивные поиски «разрешающих множителей» (использование задачи с двумя ограничениями) и та часть рукописи, в которой, по существу, описывается симплекс-метод. Разумеется, речь не идет о приоритете. Причина этого интереса иная. Дело в том, что во всех публикациях Леонида Витальевича по линейному программированию излагаются варианты опирающегося на теорему двойственности метода разрешающих множителей, тогда как симплекс-метод, геометрически более прозрачный, должен был бы первым возникнуть при анализе задачи, что и подтверждает обнаруженная рукопись. Хотя метод решения только намечен, нужно учитывать, что этот намек сделан крупнейшим специалистом по вычислительной математике, автором классического курса «Приближенные методы высшего анализа». Возникает вопрос, почему Леонид Витальевич не удовлетворился полученным результатом, не описал подробнее общий метод и не опубликовал его, хотя по разнообразию приводимых в работе примеров видно, что он отчетливо сознавал практическую важность задачи.

Риску высказать несколько соображений. Во-первых, тогда еще не было вычислительных машин, и Л. В. Канторович отчетливо сознавал практическую непригодность общего метода для реальных задач при ручном счете. Интересно, что и Дж. Данциг, как он пишет в своих воспоминаниях, не был уверен в работоспособности метода даже при использовании машин, и только эксперименты доказали его практичность.

Во-вторых, формальность метода не позволяла сочетать интуитивные соображения с расчетом. Это отмечено, например, в [1939, 1]:

«Могло показаться, что метод решения ... , основанный на разрешающих множителях, не имеет особых преимуществ, кроме, может быть, простоты или краткости его по сравнению с другими методами. Между тем это не так; разрешающие множители имеют гораздо большее значение — они дают не только само решение задачи, но и позволяют указать ряд важных для применений характеристик найденного решения. Таким образом, решение, проведенное методом разрешающих множителей, дает гораздо больше, чем голый результат ... »

Наконец, третья, видимо, наиболее важная причина. Распространенным является представление, что Леонид Витальевич занялся экономикой, случайно натолкнувшись на задачу линейного программирования. Между тем, как это ни удивительно, интерес к экономике появился у него значительно раньше. Обратимся к его воспоминаниям ([2002, 1]. — С. 50):

«В 1936–1937 гг., когда я заканчивал свои работы по полупорядоченным пространствам, я почувствовал некоторую неудовлетворенность математикой. Не то чтобы моя работа была неинтересной или безуспешной, но мир находился под страшной угрозой коричневой чумы — немецкого фашизма. Было ясно, что через несколько лет наступит тяжелейшая война, угрожающая цивилизации. И я почувствовал ответственность, понимая, что незаурядные люди должны что-то сделать».

... Я все чаще думал об этих вопросах, скорее, правда, на дилетантском уровне, чем научно, но все же используя общую интуицию. Например, мной была написана в Верховный Совет записка о нелепом положении с книжной торговлей, системой тиражей и цен, которая приводила к неоправданному книжному дефициту, спекуляции, большим потерям государства и населения<sup>2)</sup>. ... Направил статью о крайнем искажении системы цен из-за того, что в них не отражается фондоемкость, и об ущербе, который из-за этого происходит.»

Таким образом, задачу фанерного треста решал не только Канторович-математик, но и Канторович-экономист, и если первого мог бы удовлетворить полученный результат, то второму, уже подготовленному прежними размышлениями о ценах к открытию разрешающих множителей, требовалось иное. Об этом Леонид Витальевич пишет и в неопубликованном письме главному редактору Management Science профессору Тралю от 31 декабря 1960 г. по поводу статьи Чарнеса и Купера: «Каждый раз, когда я начинал заниматься этим кругом вопросов, я должен был выбирать, уделять ли мне внимание математической стороне вопроса — настолько простой в сравнении с другими математическими вопросами (как я мог судить по собственному опыту), что любой математик мог бы формализовать и “навести строгость” на изложенные идеи, или же экономической, прикладной стороне, которая была новой, нетривиальной и вызывала сомнения и возражения. Я, естественно, предпочитал последнее.»<sup>3)</sup>

---

<sup>2)</sup>Эта записка «О распределении печатной продукции» опубликована в [2002, 1]. — С. 237–249.

<sup>3)</sup>[2004, 4]. — С. 378.

## Маркс, Канторович и Новожилов.

### Стоимость против реальности<sup>\*)</sup>

Р. Кэмпбелл

Подобно другим аспектам советской жизни экономическая наука после смерти Сталина начала оживляться. Наиболее очевидным признаком ее пробуждения явилась широкая дискуссия относительно институционального устройства и эксперименты в этой области, и даже вопросы стратегии и основной политической линии дискутировались с такой степенью свободы, которая могла рассматриваться как нежелательная.

Однако подлинной мерой этой свободы явился тот факт, что поискам ясности в области теории, которыми неизбежно сопровождается дискуссия по теоретическим вопросам, было позволено развиваться таким образом, какой был недопустим в течение последних двадцати лет. Одним из аспектов этих драматических изменений явились расхождения во мнениях, возникшие вокруг использования математических методов в экономических исследованиях. После длительного сопротивления всякому введению математических методов в анализ экономических отношений, теперь русские задумываются о возможной пригодности модели “input — output” при составлении баланса, анализа спроса и предложения при планировании цен; они решают проблемы применения линейного программирования в плановой деятельности предприятия и начинают обращаться к математическим моделям для изучения абстрактной сущности практических проблем.

Что касается математических методов в экономике, то полагали, что эти инструменты и методы анализа могут быть заимствованы у капиталистического мира, как это делается с техникой. Один из принятых тезисов, сформулированных в процессе послесталинских открытий того, чего достигли экономисты в капиталистическом мире, гласил о необходимости отделить приемлемое от неприемлемого и очистить математические методы от их буржуазной интерпретации, прежде чем применять их в советской экономике<sup>1)</sup>. Как и следовало ожидать, надежды на такое антисептическое переливание не сбылись, и даже начальная стадия работ советских ученых с математическими методами должна была привести к поискам ясности в теории стоимости.

Математика и счетные машины сами по себе идеологически нейтральны, но математизация любой науки означает измерение, а в экономике единицей измерения является стоимость. Отсюда, как сказал один из участников этого спора, понимание того, как измерить стоимость, имеет наибольшее значение для всех практических проблем расчета. Однако продвижение в понимании проблемы стоимости и ее

---

<sup>\*)</sup>Campbell, Robert W. Marks, Kantorovich and Novozhilov. “Stoimost” versus Reality // Slavic Revue, Okt. — 1961. — Vol. 20, N 3. — P. 402–418.

<sup>1)</sup>См. «О применении математики в экономических исследованиях и об отношении к эконометрике». — М.: Госстатиздат, 1959. (Прим. ред.)

связи с проблемой распределения ресурсов потребует, чтобы советские экономисты освободились от ограничений марксистской теории. И действительно, это освобождение уже почти завершено в работах двух участников дискуссии об использовании математических методов в экономических исследованиях — Л. В. Канторовича и В. В. Новожилова.

Таким образом, помимо своего непосредственного содержания, термин «математические методы в экономике», вокруг которого столь свободно объединяются советские экономисты, стал также эвфемизмом для новой теории стоимости. В нашей статье и рассказывается об этих поисках новой теории стоимости.

### **Недостатки теории трудовой стоимости**

В качестве введения нам следует кратко остановиться на различиях в судьбах основного направления в развитии мировой экономической теории и марксизма. Основная экономическая теория стала зрелой примерно лишь в последние полвека. В этот период отдельные куски и части, частичные проникновения в сущность процессов, сделанные в предыдущие годы, были объединены в единую общую теорию. С другой стороны, марксистская экономическая теория пришла за этот период в тушик.

Марксистская теория стоимости не порвала с традицией времен Рикардо и оказалась не в состоянии добиться тех огромных научных успехов в обобщении и объединении экономических идей, которых достигла с того времени западная экономическая теория.

Природа этих достижений может быть объяснена следующим образом. Одной из центральных задач экономической теории всегда являлось выявление факторов, определяющих цены. Исследования движений валютного курса, распределения дохода между классами, изменений общего уровня цен и т. д. всегда включают вопросы об относительных ценах, о том, как оценивается одна вещь по отношению к другой. Поэтому поиски общей теории стоимости всегда занимали центральное место в развитии экономической мысли.

Практические вопросы, над решением которых бились экономисты, всегда приводили к ней как к главной проблеме, требовавшей выяснения. В течение большей части 19-го века не было дано никакого последовательного и удовлетворительного решения проблемы стоимости. Существовали теории издержек и теории полезности (упоминаем лишь о двух противоположных концепциях), и всякий теоретик должен был опираться на несколько различных теорий и использовать их в разных частях своей книги для решения различных проблем. У Рикардо, например, было две теории стоимости, одна для стоимости земли и другая, весьма отличная от нее, — для стоимости всего остального. Примирение всех этих противоречивых частичных объяснений в рамках единой общей теории стоимости произошло лишь в конце 19-го века с созданием концепции общего равновесия и с приведением всех теорий к общему знаменателю полезности представителями школы предельной полезности.

Со временем экономисты также подошли к пониманию того, что теория стоимости является лишь одним аспектом центральной проблемы экономической теории. Вопрос об относительных ценах неразрывно связан с вопросом об относительных

количествах. Действительно, примирение и объединение всех противоречивых частей теории стоимости в том виде, в каком они существовали раньше, возможно было сделать, лишь расширив перспективу и поставив вопрос о том, что определяет пропорции выпуска различного рода продуктов наряду с вопросом о том, что определяет стоимость. Одним из свидетельств этого нового проникновения в теорию стоимости явилась формулировка нового понятия в экономической теории, которое сейчас повсеместно используется, а именно, понятия о распределении ограниченных ресурсов между конкурирующими целями. Это определение пренебрегает стоимостными аспектами проблемы, но быстрое признание, которое оно приобрело, было проявлением глубокого убеждения в том, что экономическая теория должна объяснять не только стоимости, но также и количества и взаимосвязь этих двух величин.

Это было достижение, которого не заметили марксисты и их советские интеллектуальные наследники. Русские сохранили при помощи Маркса представление о стоимости, существовавшее во времена Рикардо. Маркс взял теорию стоимости в том виде, какой она была в то время, и составил из некоторых ее путаных положений теорию динамики капиталистической системы (этот процесс можно описать более точно иным образом: Маркс сделал ряд выводов, пытаясь показать, что они строго и неизбежно вытекают из принятой в то время теории стоимости. Используя преимущества ретроспективного взгляда, мы можем оглянуться назад и посмотреть на это, как на попытку *reductio ad absurdum* — метод доказательства несостоятельности теории стоимости Рикардо).

Таким образом, ограниченность марксистского наследства в экономической теории заключается не столько в том, что марксистская точка зрения просто неправильна в одном отдельном вопросе (т. е. в том, что он принял положение, будто стоимость создается лишь трудом), сколько в том, что он не понял основной проблемы, стоящей перед экономической наукой, не достиг полного понимания того, что должна освещать действительно ценная экономическая теория. Это было достигнуто основным направлением мировой экономической теории уже после того, как марксизм повернул к тому тупику, который упоминался выше.

Сохранить изоляцию марксистов-экономистов от остального интеллектуального сообщества было нелегким и неестественным делом. Марксистские группы должны были вести постоянную борьбу за сохранение санкционированных недостатков своей экономической доктрины, против вторжения более изощренных концепций; они считали необходимым делать это в силу того центрального места, которое занимала теория трудовой стоимости в марксистской теории перехода от капитализма к социализму.

Застой в экономической теории, обусловленный марксистской традицией в ней, привел к парадоксальному положению. Советское плановое хозяйство, постоянной предпосылкой развития которого является эффективное распределение ресурсов для достижения конкурирующих целей, блуждало без теоретической концепции, объясняющей правила выбора фактических вариантов из потенциальных. Оно должно было искать руководство в теории, которая не только неправильно трактовала стоимость, но даже не исследовала вопрос о стоимости хоть в какой-то связи с проблемой рационального распределения.

Это совершенно неудовлетворительное положение, полное противоречий. Как объяснялось выше, в рыночном хозяйстве теория, трактующая оптимальное распределение всех общественных ресурсов, в основном представляла собой абстрактную конструкцию, созданную в процессе объединения всех кусков и частей экономической теории в теорию выбора и стоимости. Общественная ценность теории такого распределения между конкурирующими целями не столь значима для индивидумов в Западном обществе, где распределение является результатом безличного действия системы цен.

В советской экономике, напротив, распределение всех общественных ресурсов между альтернативными целями представляет собой совершенно очевидный операционный процесс, который требует выяснения некоторых теоретических концепций и информации о том, как их использовать. В то же время возникает острая необходимость в создании единой унифицированной экономической теории как предпосылки для решения вопроса об измерении издержек производства и стоимости. Несмотря на существование централизованного планирования, советской системе необходим еще и децентрализованный расчет преимуществ, получаемых от различных альтернатив, а эти расчеты всегда следует делать на основе некоторого общего знаменателя, каким является стоимость. На уровне микроэкономического анализа русские заняты поисками того, что они называют «эффективностью», но их попытки рассчитать эффективность всегда наталкиваются на недостаточное понимание проблемы стоимости и того, как она связана с вопросами выбора в ее распределительных аспектах. Очевидна неустойчивость подобного положения — практика планирования требует теоретического руководства, которого не в состоянии обеспечить марксистская теория стоимости.

Экономическая теория так же относится к планированию, как физика к инженерному делу. Она обеспечивает теоретические модели и объясняет взаимосвязи, что дает возможность понять зависимость результатов действия многих переменных прежде, чем начать манипуляцию ими. Когда советские плановики пытаются найти это у Маркса, то они вряд ли находят что-либо подходящее, а если и находят, то, очевидно, лишь что-нибудь такое, что их только дезориентирует. Необходим какой-то способ обзора процесса в целом, точка зрения, которая прояснила бы взаимозависимость проблемы распределения и проблемы стоимости.

Не найдя этого у Маркса, плановики-практики в Советском Союзе неустанно пытаются решить эту проблему сами. Имеется очень много примеров того, как плановики в некоторых областях хозяйства вновь открывали некоторые основные пути экономических исследований, сами приходя к некоторым важным идеям теории стоимости и распределения. Действительно, инженеры-электрики и горные инженеры должны были неизбежно прийти к пониманию того, что условием эффективного распределения программы между производственными единицами, работающими параллельно, является равенство переделенных издержек<sup>2)</sup>. Те, кто должен повседневно решать, в каких масштабах заменять труд капиталом при проектировании и усовершенствовании производства, быстро пришли к пониманию то-

<sup>2)</sup> Подобные положения развиты, например, в работах *Горштейн В. Н.* Наивыгоднейшее распределение нагрузок между параллельно работающими станциями. — М.; Л., 1949 и *Влодомов В. Н.* Горная рента и принципы оценки месторождения. — М., 1959.



го, что здесь существует предел, и рассуждения здравого смысла скоро подсказали, какова, очевидно, природа этого предела.

Трудность, однако, заключается в том, что эти творческие ответы отдельных мыслящих людей никогда не были объединены в общую теорию распределения и стоимости в масштабе всего народного хозяйства, а именно это и является необходимым. Неспособность создать такую общую теорию объясняется отчасти тем фактом, что теоретики, на которых лежит эта миссия в современном обществе с развитой специализацией, поставлены марксизмом в затруднительное положение, ибо подобное обобщение и объединение неизбежно вступят в противоречие с некоторыми марксистскими упрощениями. Кроме того, задача обобщения и объединения более трудна, чем развитие отдельных теорий и толкований.

Плодотворные работы о проблемах стоимости и распределения В. В. Новожилова и Л. В. Канторовича созданы именно в том направлении, о котором мы говорим, т. е. при попытке решить частные проблемы расчета. Новожилов — экономист, пытавшийся решить проблему рационального критерия для выбора варианта инвестиций, с которой давно сражались советские экономисты. Стремясь выявить условия максимальной эффективности расходов на капиталовложения, он пришел к выводу, что ответ на этот вопрос может быть дан лишь как часть ответа на более широкий вопрос о критерии эффективного распределения всех ресурсов.

Канторович, являющийся скорее математиком, нежели экономистом, обратился к этой проблеме, когда его попросили решить в высшей степени специфичную, узкую и фактически незначительную проблему распределения. Однако, окинув широким взглядом математика ограниченную проблему распределения, он нашел пути и концепции для прояснения всей проблемы стоимости и распределения ресурсов в масштабе всей национальной экономики.

Делая эти успехи, и Новожилов, и Канторович неизбежно вступили в конфликт с теорией трудовой стоимости в том виде, как ее развил Маркс, и в этом революционная и противоречивая сторона их работы.

### **Объективно обусловленные оценки Канторовича**

Развитие взглядов Канторовича можно кратко суммировать следующим образом.

В конце тридцатых годов фанерный трест в Ленинграде обратился к Институту математики и механики Ленинградского университета с просьбой о помощи в решении одной планово-производственной проблемы. У треста имелось несколько различных лучильных станков для производства фанеры. Эти станки обладали разной производительностью, измеряющейся количеством обрабатываемых бревен и зависящей от вида бревен. Пропорции между различными видами бревен, которые следовало обрабатывать, были заданы, и проблема сводилась к распределению различных видов бревен по разным станкам так, чтобы максимизировать выпуск в единицу времени, или, другими словами, поднять до максимума производительность станков.

Канторовича попросили найти решение этой проблемы.

Было достаточно логично обратиться к математику за помощью в решении этой проблемы. Целый раздел математики имеет дело с проблемой нахождения

максимума и минимума различных переменных при определенных условиях. Но когда проблема бревен и станков была сформулирована как проблема максимизации функции при определенных условиях, она не стала такой, каковую можно было решить на основе традиционных методов анализа. Это не означало, что она была неразрешимой, но нужно было разработать некоторые практически приемлемые методы для того, чтобы найти решение, и это было сделано Канторовичем<sup>3)</sup>. Его метод заключался в использовании модификации множителей Лагранжа из традиционного анализа для условий сформулированной им проблемы. Множители могли быть найдены в итеративном процессе, а, найдя, их можно было использовать для решения задачи.

То, что Канторович взялся за разработку методов решения этой проблемы, явилось чистой случайностью. Весь круг задач линейного программирования, как стали позднее называться этого рода проблемы, был вновь открыт в США, но здесь они решались, прежде всего, на основе другого метода, названного «симплекс-методом»<sup>4)</sup>. То, что сделал Канторович при исследовании этого отдельного вопроса, имело огромное значение, так как оказалось, что множители, которые он ввел, имели тот же смысл, что и цены в западной теории стоимости, а полные злоклучений их поиски аналогичны процессу определения цены в рыночном хозяйстве. В то время Канторович думал, что эти множители представляют собой просто промежуточный шаг в процессе нахождения ряда переменных, которые интересовали его, а именно — нахождение такого распределения бревен между станками, которое обеспечило бы максимальный выход продукции. Он не заметил, что множители имели и некоторое другое значение в решении данной проблемы: они представляли собой некоторые стоимостные факторы, которые было бы желательно рассматривать в процессе принятия решений относительно соответствующей проблемы распределения. Однако кажется совершенно ясным, что тогда Канторович не понял широкого значения этих множителей как показателей стоимости<sup>5)</sup>.

Всем известно, что это открытие почти полностью отрицалось в Советском Союзе. Такую судьбу подобного открытия весьма трудно понять.

Решая специфическую проблему, поставленную фанерным трестом, Канторович заметил, что очень многие проблемы производственного планирования могут быть выражены в той же форме и, следовательно, могут быть решены аналогичными методами. Более того, он потратил немало усилий, чтобы проложить путь к широкому применению линейного программирования при решении практических проблем. Его оригинальная публикация представляет собой классическую защиту абстрактного теоретизирования, дающую отпор всем возражениям, которые, как он предполагал, «практики» могли бы выдвинуть против «мистификаций» «чистого

---

<sup>3)</sup>Объяснение его подхода было дано в работе «Математические методы организации и планирования производства». — Л., 1939. Она была переведена и опубликована в «Management Science» (июль 1960 г.).

<sup>4)</sup>Об истории линейного программирования и о его отношении к традиционной теории стоимости можно прочесть в работе Дорфман Р., Самуэльсона П., Солоу Р. Линейное программирование и экономический анализ. — Нью-Йорк, 1958 г.

<sup>5)</sup>Это утверждение неверно, см. разд. 10 приложения 1 рассматриваемой работы. (Прим. ред.)

математика». Он также постарался описать широкое множество ситуаций, с которыми повседневно сталкиваются советские плановики, где его метод мог бы явиться правильным руководством к действию, и институт созвал несколько конференций для того, чтобы объединить математиков и плановых работников для исследования практической пригодности метода Канторовича.

Тем не менее Канторович никогда не достигал существенных успехов в возбуждении большого интереса к этой проблеме, хотя он попутно продолжал работу над линейным программированием. Вот небольшой перечень статей по этому вопросу, которые появились в сороковые годы<sup>6)</sup>, однако кажется сомнительным, чтобы кто-либо, кроме небольшой кучки советских экономистов, когда-либо слышал о Канторовиче до начала пятидесятых годов.

Тем временем, вскоре после выхода оригинальной брошюры Канторовича, в Соединенных Штатах было независимо от него вторично открыто линейное программирование. В отличие от советского изобретения оно быстро нашло широкое применение в решении практических проблем производственного планирования в США, и его скоро примирили и ассимилировали с традиционной экономической теорией. По иронии судьбы за пределами Советского Союза можно найти обширную литературу о практическом применении линейного программирования, иллюстрирующую все те потенциальные возможности его применений, на которые указывал Канторович в своей первой работе.

Несмотря на недостаточный интерес к его открытию, Канторович попутно со своей основной работой продолжал думать над применениями этого метода и о его общеэкономическом значении<sup>7)</sup>. Когда после смерти Сталина интерес советских ученых к математическим методам в экономическом анализе создал, наконец, соответствующий климат, Канторовича открыли как советского пионера — оригинального изобретателя линейного программирования. Академия наук опубликовала полностью его книгу «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов», в которой объяснялись его методы и их приложение к теории стоимости и распределению ресурсов.

Это замечательная книга. Даже ее название само по себе является значительной удачей, показывая как в фокусе, что центральная проблема экономики сводится к распределению ресурсов. От ранних работ Канторовича ее отличает то, что здесь автор полностью признал значение своих множителей как показателей стоимости и объединил теорию стоимости и теорию распределения. Эта точка зрения смело провозглашалась и в названии разработанных ранее множителей «объективно обусловленными оценками». Этот термин является весьма хитроумным изобретением. Он не только идет максимально далеко, насколько это пристало в марксистском обществе, заявляя, что эти множители фактически выражают стоимость, но также и символизируют собой объединение проблемы стоимости и распределения. Он

---

<sup>6)</sup> Они включают такие работы, как *Канторович Л. В. О перемещении масс // Докл. АН СССР. 1942. — Т. 37, № 7–8. — С. 227–229* и *Канторович Л. В. Подбор поставок, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте // Лесная промышленность. — 1949. — № 7. — С. 15–17; № 8. — С. 17–19*

<sup>7)</sup> *Канторович Л. В., Гавурин М. К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. — 1949.*

называет оценки «объективно обусловленными», потому что они определяются специфическими условиями данной проблемы. Канторович не использует слово «стоимость» при характеристике своих показателей стоимости, так как этим термином ранее уже завладели ортодоксы марксистской теории. Тем не менее совершенно ясно, что слово «стоимость» в любом, имеющем смысл значении, определяется скорее его оценками, нежели стоимостью (в ее традиционно марксистском понимании).

Новая книга содержит еще и многое другое в дополнение к его основному открытию.

Канторович использовал свой метод для рассмотрения проблемы распределения ресурсов, и во многих частях своей работы он развивает положение о том, что недостатки, присущие хозрасчету (который для поставленных здесь целей мы можем определить как метод административной децентрализации в централизованно планируемом хозяйстве), могут быть устранены, если объективно обусловленными оценками будет заменен тот вид цен, основанный на бухгалтерских издержках (себестоимости), которые используют русские в настоящее время.

Его «оценки» отражают не только затратный аспект стоимости, но также и фактор спроса, и их использование тем самым сможет устранить те характерные для советской системы иррациональные ситуации, когда производителя обуревают искушение произвести что-либо такое, что кажется ему дешевым, но фактически он растрчивает дефицитные и ценные ресурсы, или же выпустить что-либо, что кажется очень продуктивным, но в действительности не имеет жизненно важного значения. Короче говоря, Канторович реконструировал большинство из существенных предпосылок в теории производства, развитой до этого на Западе, хотя сделал это в форме современного линейного программирования, а не в традиционной форме, которая использует дифференцируемые производственные функции.

В отличие от отрицания его ранней работы, в настоящее время его идеи широко распространяются не только посредством книг, но и при помощи статей Канторовича, докладов на конференциях и учебных программ для обучения молодых экономистов новым математическим методам.

### **Теория стоимости Новожилова**

Второй ученый, способствовавший возрождению экономической науки в Советском Союзе, — Новожилов также пришел к общим концепциям стоимости через узкую проблему распределения ресурсов — проблему распределения капитала. История этой проблемы не может быть воссоздана здесь в деталях, мы можем лишь отослать читателя к докладу Гроссмана<sup>8)</sup>. Основой для спора в вопросе о распределении капитала явились трудности идеологического характера, на которые наталкивались любые попытки сформулировать практические правила относительно того, как следует решать проблему замены рабочей силы капиталом при планировании выпуска новых продуктов, при вводе новых предприятий и новых технологических процессов. Любое указание, пригодное в качестве руководства, обязательно касалось бы производительности капитала, т. е. понятия, противоречащего теории трудовой стоимости. Более того, подобная же опасность имела и при решении

<sup>8)</sup> Гроссман Г. Дефицитность капитала и советская доктрина.

вопроса о правильном распределении капиталовложений между отраслями, производящими средства производства, и отраслями, производящими предметы потребления.

Таким образом, эта проблема была предательской и с политической, и с идеологической точек зрения, и после короткой вспышки дискуссий в двадцатые годы большинство экономистов сознательно избегало ее. Новожилов опубликовал несколько работ, где он пытался найти подход, который бы позволил ему избежать обеих этих опасностей<sup>9)</sup>.

Фактически основное положение относительно теории стоимости и распределения ресурсов было развито в этих ранних статьях, и его более поздние публикации содержали лишь повторные заявления по этой проблеме, расширение побочных проблем и их математическую интерпретацию.

Тем не менее возьмем для последующего рассмотрения одну из его последних статей — «Измерение затрат и их результатов в социалистическом хозяйстве» в сборнике «Применение математики в экономических исследованиях», опубликованном в 1959 г.

Эта статья является удивительным документом. Для западного экономиста она представляет собой огромный интерес как борьба со всей традиционной чепухой, провозглашенной советскими экономистами. Новожилов безгрешно следует к цели с энергичными замечаниями о бесплодии клише, с которыми советские экономисты рассматривают проблемы стоимости и распределения. Следующий пересказ его введения дает нам представление о тоне, которым написана эта статья: «Одной из важнейших проблем нашей экономической науки является ныне проблема измерения затрат и результатов социалистического производства, проблема измерения эффективности труда. Это — узловая проблема... Естественно, что методам экономических расчетов у нас уделяется большое внимание. Написано много книг и статей по вопросам калькуляции себестоимости, ценообразования, измерения производительности труда, определения эффективности капиталовложений и т. п. Проведено немало конференций по обсуждению этих вопросов. Однако вся эта огромная работа пока не привела к решению проблемы. {Путаница происходит из-за отсутствия правильной методологии измерения затрат (т. е. отсутствия правильной теории стоимости). На практике наши плановики пришли к выводу о неизбежности поправок к стоимостным величинам, которыми они оперируют, для того чтобы избежать абсурдных выводов. Цель моей статьи — примирить теорию и практику и помочь последней путем применения теории}»<sup>10)</sup>.

Его ответом на проблему, как измерить затраты, является теория стоимости, основанная на народнохозяйственной себестоимости (благоприятных издержках): здесь принимается во внимание не только труд, затраченный на производство товаров, но также и другие используемые ресурсы, такие как земля и капитал, на том основании, что существует ограниченное предложение их и что их использование

<sup>9)</sup> Новожилов В. В. Методы соизмерения народнохозяйственной эффективности плановых и проектных вариантов // Тр. Лен. пром. ин-та. — 1939. — № 4 и Новожилов В. В. Методы нахождения минимума затрат в соц. хозяйстве // Тр. Лен. политехн. ин-та. — 1946. — № 1.

<sup>10)</sup> Текста в фигурных скобках в предисловии Новожилова нет. (Прим. ред.)

в производстве одного товара означает, что они не могут быть использованы для экономии труда, требуемого для производства некоторых других продуктов.

Он начинает с формулировки общей задачи расчета в социалистической экономике как задачи максимизации эффективности труда, под которой он понимает производство национального продукта с минимально возможными затратами труда. Однако этого нельзя достичь непосредственно путем сведения к минимуму затрат труда на каждый отдельный компонент общего выпуска. Проблема заключается в том, что в дополнение к прямым, видимым затратам труда на каждый продукт существует второй вид затрат труда, который назван Новожиловым «затратами обратной связи». Это понятие идентично понятию народнохозяйственной себестоимости. Оно возникает в условиях, когда имеется несколько видов затрат, предложение которых весьма ограничено в любой данный плановый период. Если затраты труда на производство отдельного продукта сведены к минимуму путем замены прямых затрат труда этими дифференциальными, то вследствие этого затраты труда, идущие на производство продуктов на каких-либо других участках народного хозяйства, возрастут.

Для того чтобы совместить локальные усилия, направленные на минимизацию затрат на каждый отдельный продукт, с целью достижения минимальных затрат труда на весь совокупный выпуск следует принять во внимание эти затраты обратной связи. А для того чтобы сделать это возможным, необходимо иметь меру, определяющую эффективность каждой дефицитных затрат, выраженную в экономленном труде. Если эта мера известна, то ее следует взять в качестве соответствующего ценового ярлыка для таких нетрудовых затрат в экономическом расчете. Таким образом, если все частные решения, направленные на сведение издержек к минимуму, будут учитывать не только прямые затраты труда, но также и затраты обратной связи, то эти усилия в совокупности минимизируют трудовые затраты на весь совокупный выпуск.

Позднее он развивает математическое доказательство этих утверждений, но прежде чем сделать это, он показал, как взаимодействуют проблемы распределения и стоимости. Стоимость представляет собой нечто такое, что не может быть определено непосредственно из калькуляции, она появляется лишь из проблемы оптимального распределения ресурсов.

Все это очень близко экономистам за пределами Советского Союза, кроме формулировки проблемы — о сведении к минимуму затрат труда при определенной программе общего выпуска. Западный экономист сформулировал бы эту проблему как нахождение стоимостей, обеспечивающих получение максимального выпуска при данных ресурсах. Формально существо обеих проблем идентично, но подход Новожилова позволяет ему избежать анализа того, что определяет соответствующий ассортимент конечного выпуска, и выразить свои оценки (включая затраты обратной связи) в трудовых затратах, сохранив таким образом видимость марксистской ортодоксальности.

Вооруженный грамотной теорией стоимости, Новожилов одолел значительное число проблем, которые запутывали советских плановиков и экономистов. Одним легким ударом своего мощного оружия он разрубает гордиев узел, вокруг которого бесплодно суетились советские экономисты-теоретики в течение трех десятилетий.

Как поставить предел надоедливим просьбам плановиков относительно «дефицитных товаров»? Определять цены на товары не по стоимости, а по их народнохозяйственной стоимости.

Как следует определять моральный износ в социалистическом обществе? Ответ Новожилова занимает не обычные двадцать страниц пустой болтовни, а несколько небольших абзацев, посвященных лишь существу вопроса.

Все это делает чтение данной работы для несоветского экономиста радостным занятием, и мы подозреваем, что и у большинства советских ученых реакция должна быть такой же. Однако из этого не следует, что Новожилов никогда не ошибается. Основной порок его теории стоимости сводится к тому, что он рассматривает стоимость лишь как отражение производственных ограничений, когда же он переходит к таким проблемам, как определение правильной нормы накопления, правильного выбора варианта разнородного выпуска, то здесь от его теории стоимости уже не много прока.

На этих страницах, в отличие от других разделов статьи, нет математических формул, и даже его термины, подобные «благосостоянию», «потребностям», «полезным результатам» — становятся несколько расплывчатыми. Им недостает аналитической силы, так как они не насыщены идеями, вытекающими из его теории стоимости.

Однако из этого не следует, конечно, что данные вопросы Новожиловым не поняты. Расплывчатость в его работе может быть лишь выражением осторожности.

Что же остается делать, когда уже так много сделано? Не обогнали ли русские западную мысль последнего века и не преодолели ли они отставание экономической науки? Это было бы слишком поспешным утверждением, как мы сейчас увидим, но определенно эти две работы являются большим достижением. Канторович и Новожилов убедительно показали, что другие факторы, помимо труда, являются дефицитными и что проблемы стоимости и распределения неразрывно связаны между собой. Они ясно показывают, что стоимость не является чем-то метафизическим, какой сделал ее Маркс, а то, что проявляется в ней, ясно определено как показатель дефицитности ресурсов по отношению к целям.

Каковы перспективы успеха этой революции?

### **Реакция советских экономистов**

Еще слишком рано предсказывать с уверенностью, смогут ли эти нововведения в теорию стоимости пробить себе дорогу в советской экономической мысли и преподавании. Однако имеются очень сильные факторы, благоприятствующие тому, чтобы эти идеи выжили. Большой «вред» был причинен уже тем, что была предоставлена возможность высказать эти идеи, а получив однажды возможность подумать над ними, советские экономисты уже вряд ли смогут их отрицать, если только не под принудительным нажимом. Раз данные новшества не являются ортодоксальными, как мы доказали это, то можно ожидать и такого исхода.

Однако в этой связи возможно выдвинуть контраргумент относительно того, что еретическая, хотя и изощренная теория стоимости, может быть исключительно полезна, по аналогии с соотношением традиционной логики и квантовой механики.

Поэтому на советских экономистов может быть оказано сильное давление, чтобы они добились понимания этой теории, хотя с послушников, находящихся в советских семинариях — на экономических и философских факультетах университетов, все еще могут требовать механической зубрежки старого катехизиса.

Тем временем советские экономисты не желают быть обращены в другую веру, по крайней мере, без протеста с их стороны. В книге Канторовича имеется предисловие академика Немчинова, содержащее значительные оговорки относительно некоротких моментов применения идей Канторовича.

В то же время рецензии на работы обоих ученых, появившиеся в авторитетных экономических журналах, были весьма неблагоприятными. Тем не менее наиболее интересная черта этой критики заключается в следующем: критики, очевидно, очень хорошо понимают, что делают Канторович и Новожилов. Новой теорией предоставили компетентных, хотя и недоброжелательных крестных отцов для ее обсуждения, они выполнили свое задание хорошо и глубоко поняли (схватили) логику нового подхода. Их реакция отражает трудности, которые стоят на пути действий по отношению к этой угрозе ортодоксальности. Немчинов признал, что объективно обусловленные оценки и затраты обратной связи являются полезными конструкциями, призванными занять надлежащее место в качестве методов решения отдельных производственных проблем. Лейтмотив его критики сводится к тому, что следует избегать искушения признать за ними более общее значение. Новым конструкциям остается лишь превратиться в особого рода показатели, используемые при решении технических проблем. Немчинов поставлен в затруднение непримиримостью Канторовича, открыто называющего свои измерители объективно обусловленными оценками, и он видит совершенно отчетливо, чем именно они являются в действительности. Фактически Немчинов определенно убежден в том, что он затушевывает смысл идей Канторовича, отрицая их общее значение, хотя в конце он и не отрицает возможности расширения их поля действия до широких народнохозяйственных рамок, указывая лишь, что такое их применение еще не разработано. Оценивая работы Новожилова, он во многом согласен с тем, что труд остается измерителем для всех элементов новожиловской стоимости, но сводит это на нет утверждением, что в марксистской теории рентоподобные элементы (являющиеся одним из способов наименования народнохозяйственной себестоимости) не имеют никакого отношения к стоимости, а представляют лишь распределительную категорию.

Также и Боярский в своей рецензии, опубликованной в «Плановом хозяйстве» (№ 1, 1960 г.), очевидно, видит правду в аргументах Канторовича, но также видит и то, что они ведут к неверным выводам. Его статье присущ шизофренический дух. Первая часть посвящена объяснению идей и восхвалению практической полезности линейного программирования. Но во второй части он говорит, что в этой книге видна опасность предоставления на откуп математике вопросов, которые всегда решала марксистская экономическая наука. Вывод этой рецензии, по существу, сводится к тому, что рассматриваемые теории не содержат ничего плохого в решении вопроса о распределении ресурсов, помимо того, что они приводят к немарксистским выводам об измерении стоимости. Однако Боярский никак не смог объяснить, каким образом Канторович, идя по пути, ведущему к чему-то полезному, приближается к чему-то вредному.



В рецензии А. Каца, опубликованной в «Вопросах экономики», также проступает интеллектуальная нищета. Он начинает с восхваления, но затем, будучи не в состоянии объяснить, что плохое заключается в математическом подходе, вынужден прибегать к всякого рода нелепым и не относящимся к делу критическим выпадам. Например, он считает слабым местом и осуждает то, что структура выпуска или размер выпуска являются заданными величинами, но, как он объясняет ниже, это одно из основных правил, налагаемых советскими условиями. Здесь возможно лишь одно из опровержений: или предпосылки неверны, или же математика неверна. Например, можно отрицать, что существует ограниченное предложение факторов производства, помимо труда, или же, что их можно заменить трудом (здесь действительно проявляется очевидное различие между марксистской концепцией стоимости и лучшими стоимостными теориями). Но такая критика противоречит здравому смыслу. Однако, конечно, трудно представить, что эти рецензии могли бы быть иными. Написание рецензий в Советском Союзе является сложным искусством, и одно из первых его правил — не строить выводы на основании логической аргументации.

Действительно, разрушительным фактором в идеях Канторовича и Новожилова является то, что они правы, и позволить им распространять свои взгляды означает обеспечить им победу. Они сформулировали проблему, нашли решение, сделали выводы, и все, что можно сделать, — это принять вызов или их формулировку и их математическую интерпретацию. Хорошему марксисту неприятно видеть такие концепции, как теория ренты, прибыли на капитал, народнохозяйственных издержек, причастные к положениям, с которыми они не могут не бороться, но относиться с неприязнью — это еще не значит опровергнуть.

Единственная защита — это запретить математиков в их храме. Как только им позволили общаться с остальными членами интеллектуального сообщества, им обеспечили успех. Благоговение перед наукой в Советском Союзе даровало огромный престиж математике — «королеве и служанке науки». Канторовича ни в коем случае нельзя назвать заносчивым человеком, скорее он даже застенчив, и, однако, защищенный математикой, он не проявил колебаний, ведя свои мощные атаки на существующую в Советском Союзе теорию стоимости. На недавней конференции по применению математики в экономических исследованиях он очень резко отвечал своим критикам. В своих заключительных замечаниях на конференции Немчинов упрекнул Канторовича в том, что он нарушает «творческий и дружеский дух» конференции «недооценкой и обесцениением работ советских экономистов». Что именно сказал Канторович на конференции для того, чтобы заслужить этот упрек, нельзя обнаружить в опубликованных материалах.

Однако хорошо известно, что он рассматривает советскую экономическую теорию главным образом как совокупность трескучих фраз. На ежегодном собрании Отделения экономических, философских и правовых наук<sup>11)</sup> в 1959 г., он высказал следующее нелестное мнение о вкладе экономистов в экономические достижения Советского Союза: «Но так ли велика роль экономистов в этих достижениях? Здесь сыграл определенную роль накопленный практический опыт в экономике и

<sup>11)</sup>Ниже цитируется выступление Канторовича на годичном собрании АН. (Прим. ред.)

планировании, но он никак не обобщен экономической наукой, и этим, в частности, объясняется то, что некоторые вредные явления, как, например, штурмовщина, сохраняются у нас десятки лет.

На сорок втором году существования социалистического государства нашей экономической науке неизвестно отчетливо, что означает закон стоимости в социалистическом обществе и как он должен применяться, что такое социалистическая рента, должно ли вообще строиться исчисление эффективности капиталовложений и каким образом.

Как последнее открытие в области экономики нам преподносится, например, «что закон стоимости не действует, а только воздействует» или что «средства производства — не просто товар, а товар особого рода» и т. п.<sup>12)</sup>.

Предсказание о возможном результате сотрудничества с математиками дано в одном из замечаний Немчинова в послесловии к сборнику: «Главная опасность применения математических методов в экономике — это забвение качественной природы изучаемых экономических явлений. Извращение роли математики, как в естественных, так и в общественных науках заключается, по крылатому выражению В. И. Ленина, направленному в адрес идеалистических теорий в физике и математике, в том, что в этих теориях материя исчезает, остаются одни уравнения» (стр. 478).

Использование этого неубедительного довода для защиты марксистских пред-  
рассудков от уравнений говорит о предчувствии поражения.

Если наши прогнозы верны и эти нововведения будут приняты после соответствующих толкований в духе марксистской терминологии, то это приведет лишь к дальнейшим волнениям.

Как объяснялось выше, эти теории стоимости и распределения все еще содержат серьезные недостатки. Они берут в качестве заданных величин переменные, имеющие большое значение в экономической системе, такие как структура конечного набора продуктов, и в качестве одного аспекта данной проблемы — деление национального продукта на средства производства и предметы потребления. Имея в виду различия в аспектах теории стоимости, играющих важную роль в развитии западной экономической мысли, теории Канторовича и Новожилова являются теориями стоимостных издержек. Используя известную метафору Альфреда Маршалла, они все еще полагают, что в то время как одно лезвие ножниц находится в покое (данный заранее спрос), другое лезвие (издержки или предложение) должно резать бумагу.

Теории Канторовича и Новожилова являются шагом вперед по сравнению с более примитивной теорией трудовых издержек, которую использовал Маркс, но ей все еще не хватает полной степени общности.

Одно из критических замечаний, направленных советскими авторами против объективно обусловленных оценок Канторовича, сводится к тому, что они не носят абсолютного характера. Одним из факторов, который «объективно обуславливает» их, является структура выпуска, берущаяся в качестве исходной точки. Один из докладчиков на конференции по применению математических методов в экономике

<sup>12)</sup>Вестн. Акад. наук СССР. — 1959. — № 4. — С. 60.

указал, что ответ на вопрос о том, правильно или неверно объективно обусловленные оценки характеризуют что-либо, зависит от правильности сложной структуры выпуска, постулированной в качестве заданной величины<sup>13</sup>). Далее он высказывает предположение о возможности плодотворного использования математических методов при освещении вопроса о том, какой должна быть эта сложная структура выпуска. Это, действительно, сильная линия атаки на теории Канторовича и Новожилова. Она содержит действительно ценную критику этих концепций, однако то, что Канторович и Новожилов ограничивают проблему эффективности производства условиями заранее определенной программой выпуска, имеет достаточное основание. Разработка измерителя правильности выбора продуктов является частью проблемы, включающей ответ на вопрос, ради чего осуществляется производство, и непосредственно влечет введение в анализ субъективной теории полезности. С идеологической точки зрения это явилось бы непростительным оскорблением. Помимо этого, в подходе Новожилова содержится особый момент, который рано или поздно вызовет сумятицу. У его работы имеется обезоруживающая черта, а именно, в ней создается лишь видимость того, что она соответствует трудовой теории стоимости. Он начинает с предпосылки, что проблема сводится к максимизации эффективности труда, которая для марксизма не звучит предосудительно. Более того, все элементы стоимости, включая затраты обратной связи, выражены в трудовых единицах. Таким образом, здесь скрупулезно сохранен труд в качестве измерителя стоимости. Но подобное соответствие теории трудовой стоимости является полностью иллюзорным. Это вытекает из бессмысленности постановки задачи о минимизации трудовых затрат при данном наборе продуктов (или же, выразив ту же идею другими словами, — максимизации высвобождаемого времени — досуга).

Подлинная проблема — это проблема максимизации, как досуга, так и выпуска продукции. В Советском Союзе именно сведение к минимуму затрат труда является особо нелепой целью. Эту абсурдную цель нельзя сделать более рациональной, заявив, что минимизация трудовых затрат эквивалентна максимизации выпуска, так как сэкономленная рабочая сила может быть использована для увеличения выпуска. В методе Новожилова труд минимизирован в условиях использования всех остальных затрат, с которыми он может быть скомбинирован. Эта трещина в формулировке сущности данной проблемы должна быть рано или поздно обнаружена.

Нетрудно затем представить ситуацию, при которой советская экономика, где кто-либо, пытающийся применить метод анализа Новожилова, должен будет взять за отправную точку постоянную величину предложения рабочей силы и сформулировать свою проблему как минимизацию некоторых других затрат. Например, вполне реалистично поставить задачу сельскохозяйственного планирования как нахождение минимума капиталовложений, соответствующего численности сельскохозяйственного населения и предписанной цены производства. Или же плановики, работающие в области железнодорожного транспорта, могут быть поставлены перед задачей такого выбора используемых ресурсов, которые бы свели к минимуму затраты топлива, оставив неизменным все остальное. В этой ситуации тщетно бы-

---

<sup>13</sup>)См. замечания А. Г. Агабегяна в отчете о конференции по математическим методам в экономике. Вопросы экономики. — 1960. — № 8. — С. 110–112.

ло бы искать соответствие между рассуждениями Новожилова и теорией трудовой стоимости. В любой из этих проблем народнохозяйственная себестоимость должна проявиться как выражение затрат, которые нужно минимизировать, в качестве ее измерителя, и в итоге нужно будет прийти к «капитальной» или «топливной» теории стоимости. Эти аномалии никак не будут устранены, пока набор продуктов не станет рассматриваться как часть переменных величин, подлежащих определению, что включает идеалистическое понятие полезности как часть объяснения данной проблемы.

Примирение двух правильных, но противоречащих друг другу теорий («топливной» теории стоимости и трудовой теории стоимости) возможно лишь тогда, когда они будут признаны особыми случаями общей теории при различных предпосылках, в теории же стоимости и распределения эта общая теория должна включать некоторые понятия о полезности. Полезность является самым общим абстрактным знаменателем, к которому можно привести все прочие объяснения.

Открытие этой общей теории и окончательный упадок теории трудовой стоимости ни в коем случае не представляет собой лишь вероятную опасность. Действительно, другая половина теории стоимости — теория потребления — уже разработана и опубликована в Советском Союзе. Я имею в виду статью А. А. Конюса в сборнике очерков, изданных Академией наук СССР в честь восьмидесятилетия С. Г. Струмилина<sup>14</sup>).

Теория потребления висит в настоящее время в воздухе, ожидая, чтобы ее присоединили к тому, что Новожилов и Канторович уже сделали для теории производства.

Когда кто-либо соединит их, то тем самым завершится вторичное открытие западной теории стоимости.

Конюс ставит проблему нахождения должного соотношения цен и трудовых затрат в производстве различных потребительских товаров с целью минимизировать общие затраты труда для данного уровня того, что он расплывчато называет «потреблением». Фактически же содержание, которое он вкладывает в этот расплывчатый термин, делает его идентичным понятиям «благополучие» или «полезность» из западной теории стоимости.

Между прочим, вопрос Конюса поднят не в ходе спокойного профессорского исследования, а представляет собой проблему, давно волнующую тех, кто планирует в Советском Союзе цены на потребительские товары. Ответ, данный на этот вопрос западными экономистами, содержится в каждом элементарном учебнике по экономической теории — «цены должны быть пропорциональны как предельным нормам замещения, так и предельным нормам преобразования рассматриваемых товаров». Не имея привычки консультироваться с подобного рода источниками при ответах на вопросы политической экономии социализма, Конюс прибегает к помощи профессора математики (должным образом благодаря его в сноске) и сам разрабатывает ответ на этот вопрос. Не удивительно, что он приходит к таким же результатам, что и западные экономисты. Также не удивительно для экономиста и то, что Конюс мог высказать свое предложение, только лишь оговорив некото-

<sup>14</sup>) Вопросы экономики, планирования и статистики. — 1957.

рые предпосылки о природе «потребления», о котором он вел речь. В частности, его доказательство требует постулирования порядковой функции полезности или предпочтений, т. е. понятий, характерных для западной экономической теории. Правда, принятие этих положений происходит в относительно завуалированной, не бросающейся в глаза форме некоторых уравнений, но тем не менее оно происходит.

### Заключение

Пример с Конюсом может служить основой для научного заключения. Поиски теоретической ясности почти в любом экономическом вопросе будут, в конечном счете, требовать создания нормативных моделей распределения ресурсов и разработки концепций стоимости, и обе эти проблемы, наконец, уже дали знать о себе.

Смелость и сила математики весьма существенны для описания и исследования этих моделей, и ее нажим ощущается в любой науке, использующей математику. Экономической теории будет трудно избежать этого нажима. Одно из проявлений этого можно видеть в замечании Президента АН СССР Несмеянова, призывавшего экономистов сделать экономическую теорию «подлинной наукой» путем использования математики и вычислительной техники<sup>15</sup>). Но когда экономист садится за работу вместе с математиком, как это сделал Конюс, стремясь обобщить аргументацию, роль математика заключается лишь в проверке того, вытекает или нет интуитивно почувствованный вывод из взятых предпосылок, или же, какие предпосылки могут потребоваться для его доказательства. Как заметил математик А. Н. Колмогоров в своей речи на конференции по применению математических методов в экономике, преимущество взаимного сотрудничества математиков и экономистов заключается в том, что математики заставляют экономистов более тщательно формулировать некоторые из их расплывчатых концепций<sup>16</sup>). Однако если выводы даны заранее, а задача экономической науки сводится к их защите, как это утверждал Боярский в своей рецензии на книгу Канторовича, тогда лучше оставить эти концепции расплывчатыми. Но подлинно новым явлением в жизни Советского Союза является то, что для нее такое понимание задач экономической науки уже больше не характерно. Плановые работники так остро ощущают необходимость улучшения расчета и распределения, что им придется использовать более тонкую теорию стоимости, чем та, которую дал Маркс. Для достижения этой цели они и отдали себя в руки математиков.

---

<sup>15</sup>) Из речи Несмеянова на XXI съезде Коммунистической партии, цитировано по сборнику «Применение математики в экономических исследованиях».

<sup>16</sup>) Вопросы экономики. — 1961. — № 8. — С. 114.

# Вклад Л. В. Канторовича в экономическую науку<sup>\*)</sup>

Л. Йохансен

## 1. Фон

Двадцатые годы представляют весьма интересный период развития советской экономической науки. Были выполнены творческие и оригинальные работы во многих областях экономики, особенно, возможно, в части, ныне называемой экономикой развития. Некоторые из этих работ вновь приобрели актуальность в последние десятилетия, когда вырос интерес к ним. В этот ранний период развития советской экономической науки были также некоторые попытки применить математические методы как в области планирования, так и в научных исследованиях, причем эти работы были довольно передовыми на фоне общего уровня экономической науки того времени. Стала знаменитой работа Г. А. Фельдмана о модели перспективного планирования, имеются работы Е. Слуцкого, А. А. Конюса и, возможно, некоторых других, известные специалистам. Вероятно, существует много и других работ этого периода, которые заслуживают возобновления внимания к ним.

Период от 1930-х и почти до конца 1950-х годов был менее интересным с точки зрения развития экономической науки за небольшими исключениями. Однако в конце 1950-х годов в СССР произошло возрождение экономики как науки, что частично было связано с началом более широкого, чем прежде, использования математических и статистических методов и вычислительной техники. В этой новой волне, конечно, часть усилий затрачивалось на попытки наверстать упущенное или утраченное в предыдущие десятилетия, и трудно отрицать, что в этот период появлялись и довольно незрелые и некритичные работы. Это неизбежно на такой большой волне. Однако несомненно, что в научном отношении имелись значительные успехи и что появились ценные и оригинальные работы в сравнении с уровнем развития экономической науки в других странах.

В этом возрождении экономической науки большинство активных исследователей были, конечно, молодыми людьми, многие из которых имели неэкономическое образование. Этим, вероятно, частично объясняется и то, что было испробовано

---

<sup>\*)</sup>Leif Johansen. L. V. Kantorovich's contribution to economics // The Scandinavian Journal of Economics. — 1976. — Vol. 78. — P. 62–80.

Этот очерк о вкладе Канторовича в экономическую науку написан в связи с присуждением ему премии памяти Нобеля по экономике, но едва ли он столь подробен и детален, как этого требует подобный случай. Тем не менее я надеюсь, что он дает некое впечатление о главных аспектах работ Канторовича. В основном мои изыскания базируются на переводах его статей и книг. В списке ссылок в конце этого очерка я указываю эти переводы, но также я привожу год издания оригинальной публикации работы Канторовича, а в ссылках использую буквы от [a] до [n]. Дополнительный список ссылок на работы других авторов нумеруется от [1] до [20].

столь много различных подходов, так что, по крайней мере, на стороннего наблюдателя это производит впечатление неразберихи. В этом возрождении науки несколько ученых старшего поколения играли ведущие роли, обеспечивая определенную преемственность. Среди них выделяются имена Л. В. Канторовича, В. С. Немчинова и В. В. Новожилова. Важность их вклада в экономическую науку была официально признана в 1965 г., когда им была присуждена высшая научная премия в СССР — Ленинская. Значение этого присуждения усиливается еще и тем, что они были единственными, получившими эту премию по экономике.

Ныне работает только наиболее молодой из них — Л. В. Канторович. С точки зрения научных достижений, вероятно, он — самый оригинальный и наиболее выдающийся из трех упомянутых. Его вклад в экономическую науку — передовой и оригинальный не только по меркам его родины, но и по самым высоким международным стандартам.

## 2. Краткий очерк научной деятельности Л. В. Канторовича

Леонид Витальевич Канторович родился в 1912 г. и закончил математическое отделение Ленинградского университета в 1930 г. В 1930-х годах он преподавал математику в политехническом университете в Ленинграде. В 1932–1934 гг. он был также преподавателем в Ленинградском университете, а с 1934 г. там же профессором. Он получил степень доктора наук по математике в 1935 г. С 1958 по 1964 г. он был членом-корреспондентом Академии наук СССР, а с 1964 г. — академиком (по отделению математики). В 1949 г. ему была присуждена (тогдашняя) Сталинская премия за работы в области математики, а в 1965 г., как выше уже говорилось, Канторовичу вместе с Немчиновым и Новожиловым была присуждена Ленинская премия за работы в области экономической науки, и особенно, за применение математических методов в экономических исследованиях и планировании.

Хотя Канторович — выдающийся и широко известный математик, он в течение длительного времени занимается экономическими проблемами, начав это задолго до присуждения ему в 1965 г. Ленинской премии. Как будет сказано ниже, Канторович опубликовал фундаментальную работу по математической экономике еще в 1939 г. В начале 1940-х годов он также работал над применением математики к экономическим проблемам, а с конца 1950-х опубликовал большую серию работ по методам экономических расчетов и планирования. В весьма откровенной и научно-обоснованной манере он высказывался в дискуссиях по многим вопросам, относящимся к методам планирования и системе ценообразования в СССР, а также критиковал догматический и бесплодный период советской экономической науки.

Помимо работы в Ленинграде, Канторович в течение длительного периода возглавлял Отдел математико-экономических методов в Сибирском отделении Академии наук СССР. Это отделение имело доступ и весьма интенсивно использовало современный вычислительный центр в Новосибирске, который являлся, вероятно, самым передовым в СССР.

Мы дали весьма краткий и неполный обзор деятельности Канторовича до современного периода. В следующем разделе я рассмотрю более детально некоторые из полученных им научных результатов, которые имеют отношение к присуждению

ему Нобелевской премии по экономике. Все эти результаты прямо или косвенно связаны с центральной экономической проблемой — оптимального использования ресурсов. Первостепенное значение среди них имеет вклад Канторовича в развитие линейного программирования, играющего большую роль в ценообразовании, распределении ресурсов, выборе способов производства и т. д.

### 3. Линейное программирование и его истоки

Как теперь хорошо известно, линейное программирование — метод определения максимума или минимума линейной функции множества переменных, подчиненных ограничениям в форме линейных уравнений, требованиям неотрицательности и, возможно, более общим линейным неравенствам. Развитие линейного программирования включает три аспекта:

1. *Формулировка* проблемы и демонстрация того, что обширная область оптимизационных проблем в экономике может быть приведена к данной форме непосредственно или после некоторых преобразований.

2. Разработка *вычислительных методов и алгоритмов* для практического решения подобных проблем.

3. Прояснение *теоретических аспектов и следствий*.

Теория двойственности и отношение двойственной задачи к прямой — основной момент третьего аспекта. Из этой теории вытекает, что каждой задаче линейного программирования (прямой задаче) соответствует другая задача линейного программирования (двойственная задача), сформулированная, исходя из прямой, решением которой являются определенные величины, интерпретируемые как «теневые цены» различных ограниченных факторов, входящих в формулировку прямой задачи. Двойственные переменные, т. е. неизвестные двойственной задачи, связаны с множителями Лагранжа в классическом анализе. Играя роль в построении алгоритмов, они экономически интерпретируются, что очень важно, как цены, и поэтому имеют также отношение к таким проблемам, как возможность децентрализованным образом руководить деятельностью производственных секторов, технологическая структура которых может быть описана посредством линейных зависимостей (уравнений и неравенств).

Развитие линейного программирования оказывало большое влияние на развитие экономических исследований в течение последних 25 лет, и, несомненно, будет играть центральную роль также и в будущем. С одной стороны, было осознано, что широкую область практических проблем можно сформулировать как задачи линейного программирования, а поскольку были разработаны алгоритмы, которые делают возможным решение таких задач даже очень больших размеров (как и по числу переменных, так и по числу условий), линейное программирование открыло путь к практическому выполнению расчетов, направленных на оптимизацию использования ресурсов в самых разных областях.

С другой стороны, теория линейного программирования и, особенно, теория связи между двойственной и прямой задачами способствовала прояснению многих центральных экономических проблем, как, например, в теории общего равновесия и международной торговли. Теория игр, являющаяся, по моему мнению, одним из



наиболее значительных новшеств, связанных с экономической наукой, развивалась в постоянном взаимодействии с линейным программированием.

Общепринятая история развития линейного программирования гласила, что первые шаги были сделаны группой математиков и экономистов, работавших над проблемой распределения ресурсов для ВВС США во время Второй мировой войны. Членом этой группы был Дж. Данциг. Он сформулировал общую задачу линейного программирования и разработал метод ее решения в 1947 г. (симплекс-метод). Его работа была представлена в виде лекций, прочитанных в разных местах, распространялся также предварительный отчет, но до 1951 г. она не была опубликована. В тот год она была включена в работу [1]. В этот том вошли также и многие другие работы по теории линейного программирования. С точки зрения экономической теории особое место занимает работа Т. Купманса.

С тех пор теория линейного программирования развивалась во многих направлениях: были составлены новые алгоритмы, особенно с использованием специальных структур; мы знаем о большом числе важных и ценных практических приложений; были дальше развиты и теоретические вопросы. Что касается последних, то чрезвычайно стимулирующее значение имела книга Дорфмана, Самуэльсона и Солоу [2], помимо упомянутой работы Купманса.

Конечно, можно найти предшественников линейного программирования. Работы Дж. фон Неймана по теории игр и его ранняя модель экономического роста содержат элементы, которые до некоторой степени предвосхищают линейное программирование. В работах Р. Фриша 1930-х годов также можно найти идеи и математические методы, которые были некоторыми шагами в направлении линейного программирования. В работе 1941 г. Ф. Хичкок сформулировал и решил оптимизационную транспортную задачу, которая является специальным случаем задачи линейного программирования, и независимо от него сходную задачу решил Т. Купманс в 1947 г. Были и другие, менее известные математики и экономисты, которые формулировали задачи и разрабатывали аналитические средства, предвосхищавшие некоторые элементы линейного программирования. Однако ни один из этих предшественников не дал общей трактовки, которая охватывала бы все три вышеупомянутые аспекта, и, по-видимому, ни один из них не видел общего значения теории линейно-программного типа.

Вышеизложенное в большей или меньшей мере было общепризнанной историей развития линейного программирования до тех пор, пока не стало широко известным, что Л. В. Канторович еще в 1939 г. построил математическую модель «организации и планирования производства», которая по существу была линейно-программной моделью, внеся вклад во все три направления, перечисленные в начале раздела. Работа Канторовича 1939 г. стала известна и доступна коллегам из западных стран в 1960 г., когда в журнале «Management Science» появился английский перевод этой работы [a]. Инициатива этого перевода и публикации принадлежала Т. Купмансу, который до конца прояснил некоторые неясные ссылки на работы Канторовича, относящиеся к транспортной задаче, и наладил контакт с ним. (Упомянутая работа Канторовича была опубликована также в другом английском переводе [b] на основе позднейшего русского издания. В целом, публикация в «Management Science» представляется лучшей.)

#### 4. Первоначальная формулировка линейного программирования Канторовичем

Работа Канторовича 1939 г. ограничивается рассмотрением задач планирования на низовом уровне главным образом в пределах отдельного предприятия. Первую и наиболее простую из рассмотренных задач производственного планирования можно схематически описать следующим образом. На предприятии имеется определенное число станков, которые можно использовать для производства определенных изделий, каждое из которых состоит из определенного числа деталей. Технические коэффициенты показывают, какое количество штук каждой детали станок может произвести в день. (Конечно, некоторые из этих коэффициентов могут иметь нулевое значение, показывая, что данный станок нельзя использовать для производства рассматриваемой детали.) Задача состоит в таком распределении производства различных деталей по имеющимся станкам, при котором будет получен максимальный выпуск целых изделий. Эта проблема сформулирована на математическом языке. Она принимает форму максимизации линейной функции, которая выражает общее число целых изделий как функцию переменных, обозначающих то время, в течение которого каждый станок используется для производства деталей каждого вида. Максимизация производится при определенных условиях в виде уравнений, которые показывают, что общее время использования станка для производства различных деталей должно быть равно общему наличному фонду времени, и в виде неравенств, показывающих, что время использования станка для производства определенной детали не может быть отрицательным.

В дальнейших разработках Канторович вводит дополнительные ограничения, так что в формулировке проблемы достигается большая общность. Например, он вводит условие, при котором все станки в совокупности не должны использовать большее количество электроэнергии, чем заданное ограниченное ее количество. Это условие становится линейным ограничением более общего вида, чем те, что упоминались в первой и более простой задаче. В самой общей формулировке Канторович учитывает возможность выполнения станком нескольких операций с целью одновременного производства различных деталей.

Канторович дает ряд примеров конкретных задач, которые можно математически сформулировать вышеописанным способом. Задачи частично заимствованы из практики. Он также дает решение этих проблем. Кроме описанного выше непосредственного планирования производства, рассматриваются, например, задачи определения наилучших способов использования различных типов материалов с тем, чтобы избежать отходов; наилучшего из возможных способов использования энергии, когда определенные наличные количества различных видов энергии распределяются по различным видам деятельности; планирования строительства с учетом транспортировки строительных материалов; использование участков земли для выращивания различных сельскохозяйственных культур; задачи, связанные с планированием перевозок и размещением экономической деятельности. Хотя автор по своей подготовке — математик, описание и обсуждение задач свидетельствуют о близком знакомстве с конкретными обстоятельствами и о тонком понимании экономических аспектов задач.

При рассмотрении формулировок данных задач Канторовича, на первый взгляд, они кажутся частными случаями того, что теперь называется общей задачей линейного программирования. Вопрос относительно общности формулировок Канторовича немного обсуждался. В предисловии [3] к публикации работы Канторовича в «Management Science» Т. Купманс приводит объяснение, за которое выражает благодарность Г. Скарфу. Скарф, в свою очередь, основывает свою трактовку на предложении, выдвинутом самим Канторовичем. Там показано, что задача, которая в настоящее время рассматривается как общая задача линейного программирования, может быть преобразована в наиболее общую из формулировок Канторовича. (Обратное, т. е. то, что задачи Канторовича можно выразить в том же виде, что и стандартную задачу линейного программирования, следует непосредственно.) В соответствии с этим Купманс утверждает, что наиболее общая задача Канторовича, «хотя и кажется имеющей некоторую специальную структуру, в действительности эквивалентна общей задаче линейного программирования».

Касаясь областей приложений, которые Канторович приводит в качестве примера, Купманс пишет, что «широкая область приложений, охваченная автором, делает его работу ранней классикой в науке управления при любой экономической системе».

Утверждение Купманса относительно общности формулировки Канторовича было поставлено под вопрос в работе А. Чарнса и В. Купера [4]<sup>1)</sup>. Они указали на некоторую неполноту доказательства Купмансом эквивалентности общей задачи линейного программирования и наиболее общей формулировки Канторовича. Купманс ответил на эту критику в заметке [5]. Итоговый вывод состоит в том, что эквивалентность справедлива для класса задач линейного программирования, имеющих оптимальное решение, каковой класс, безусловно, наиболее интересен для практических приложений. Для задач, не имеющих оптимального решения, возникают определенные трудности.

Для задач, рассмотренных Канторовичем, его способ их формулирования очень часто был весьма удобным. Однако в целом, вероятно, следует сказать, что формулировки, данные в позднейшей литературе, более эффективны и удобны, чем формулировка Канторовича. С этими оговорками можно с уверенностью заключить, что Канторович — первый ученый, точно сформулировавший задачу линейного программирования и представивший обширную и разнообразную совокупность примеров практических задач, которые можно рассматривать и решать с помощью данного подхода.

Можно добавить, что Д. Данциг в классической работе «Линейное программирование, его применения и обобщения» следующим образом характеризовал вклад Канторовича [6, с. 22]: «Канторовичу следует отдать первенство в распознавании того, что обширные классы определенных производственных проблем имеют ярко выраженные математические структуры, которые, как он считал, поддаются практическому численному расчету и могут быть численно решены ... Доклад содержит замечательное собрание потенциальных приложений».

---

<sup>1)</sup>Подробный ответ Л. В. Канторовича на замечания Чарнса и Купера, написанный в 1960 г. и тогда же направленный этим авторам, был опубликован в 1999 г. в журнале Экономика и математические методы. — Т. 35, № 3. — С. 36–39. См. также «Леонид Витальевич Канторович. Том 2». — С. 375–380. (Прим. ред.)

## 5. Вычислительные методы

Переходя к вычислительным методам, следует указать, что главный момент в методе Канторовича в 1939 г. — введение некоторых переменных, названных «разрешающими множителями», с интерпретацией, аналогичной множителям Лагранжа в классических задачах определения экстремума. Это, однако, нечто гораздо большее, чем тривиальная модификация классического анализа, поскольку линейность и ограничения в виде неравенств выдвигают совершенно новые математические проблемы. Канторович показал, что если значения этих множителей известны для некоторой задачи, то значения первоначальных неизвестных — переменных, которые характеризуют производственные, транспортные планы и т. п. в натуральных единицах — можно найти сравнительно просто. Как правило, число таких множителей будет намного меньше числа переменных, характеризующих физический план. Поэтому многообещающим должен быть подход, состоящий в попытке найти значения этих множителей как средства нахождения неизвестных переменных, описывающих оптимальный план в натуральных показателях. Для этой цели Канторович разработал метод пошаговой аппроксимации (итеративный метод). Начинают с задания предварительных оценок множителей и вычисляют, каким должен быть соответствующий физический план. Затем проверяют, удовлетворяет ли физический план всем ограничениям (уравнениям и неравенствам). В той мере, в какой наблюдаются расхождения, множители корректируются. Проводятся новые расчеты соответствующих физических планов и новые испытания выполнения или нарушения ограничений и т. д. Если расхождения используются надлежащим способом как индикаторы того, как следует корректировать множители, то такой пошаговый подход даст в конце оптимальный план или очень хорошее приближение к нему.

В работах Канторовича метод иллюстрируется рядом относительно небольших задач (хотя и более объемных, чем, например, примеры, приводимые в стандартных современных элементарных введениях в линейное программирование).

Этот метод имеет определенную слабость с алгоритмической точки зрения, особенно в связи с программированием для современных ЭВМ (конечно, это соображение более уместно в настоящее время, чем в 1939 г.). В оригинальной работе Канторовича метод был сформулирован таким образом, что на некоторых шагах требовались специальные проверки и решение на основе суждения, т. е. метод не был полностью механическим и требовал дальнейших уточнений. С этой точки зрения метод, позднее разработанный Данцигом (симплекс-метод), более полон и легче программируется для ЭВМ. В соответствии с этим именно данный метод, а не первоначально предложенный Канторовичем, стал стандартным методом решения задач линейного программирования. (Существует множество его вариантов, ориентирующихся на использование особенностей ЭВМ или на задачи со специальной структурой.) Два эти различных метода обладают определенным сходством в том, что они — итеративные методы, в которых приближение к правильному решению идет последовательными шагами, и в обоих множители типа Лагранжа играют важную роль. В обоих методах такие множители используются для описания оптимума. Вероятно, можно сказать, что в шагах, ведущих к оптимуму, эти множи-

тели играют более заметную роль в методе Канторовича, чем в симплекс-методе, поскольку изменения, которые делаются на каждом шаге по методу Канторовича, включают в первую очередь корректировку множителей, за которой следует корректировка переменных, характеризующих план в натуральных показателях, тогда как в симплекс-методе на каждом шаге сначала корректируют переменные, характеризующие план, а затем производят соответствующую корректировку множителей. Выше изложены только очень грубые и неопределенные соображения, но рассмотрение технических подробностей выходит за рамки настоящей работы. Однако этот момент представляет некоторый интерес в связи с рядом дальнейших заключений относительно организации планирования и управления, которые Канторович выводит из своего анализа линейного программирования. Мы коснемся этого позднее в настоящей статье.

Я видел ссылки на дальнейшие разработки метода Канторовича, выполненные как самим Канторовичем, так и другими русскими математиками, в других довольно ранних изданиях, но эти работы были недоступны для меня.

В западной литературе обсуждался вопрос о вкладе Канторовича в методы вычислений, сделанном в его первой работе. Данциг указывает [6, с. 22–23], что объяснение, данное Канторовичем, как корректировать множители — неполно, и что это — сложная проблема. Это является главным моментом в критическом рассмотрении метода Канторовича у Чарнса и Купера [4]. Я думаю, что моя характеристика и сравнение, приведенные выше, дают приблизительно верное представление.

Интересно также рассмотреть некоторые соображения Чарнса и Купера [4]. В заключительном параграфе они отмечают, что Канторович и другие русские математики работали с вычислительными методами, предназначенными для специальных структур в пределах класса задач линейного программирования, и что позднее это стало очень важной областью западных исследований по математическому программированию. Цитирую их заключения: «Может оказаться, что Канторович предвидел некоторые из этих работ, или же может оказаться, что его разрешающие множители очень важны в таких задачах. Едва ли можно переоценить важность этой работы по специальным структурам и эффективным алгоритмам, если требуется прогресс в области крупномасштабных приложений и связанных с ними теоретических исследований. Поэтому было бы несчастьем, если бы любые такие возможности для успешного продвижения, которые могли бы вытекать из ранней работы Канторовича, были бы упущены просто из-за неправильного понимания его действительных достижений и того, в каком отношении они до сих пор отличались или дополняли работы, проводимые с тех пор другими». Хотя западные исследования по линейному программированию, по-видимому, привели к разработке более эффективных алгоритмов, тем не менее в соответствии с вышеизложенным возможно, что эти ранние методы, предложенные Канторовичем, но которые, кажется, никогда полностью не были доработаны<sup>2)</sup>, содержат идеи, которые все еще могут оказаться весьма важными.

---

<sup>2)</sup>Вероятно, автор не обратил внимания на Приложение II разбираемой ниже книги [f], где подробно описан весь алгоритм. Отметим, что проводилось сравнение эффективности симплекс-метода и метода Канторовича, которое показало преимущество последнего (см. *van de Panne C.*,

## 6. «Разрешающие множители» Канторовича

Как было указано в связи с третьим аспектом развития линейного программирования, упомянутого в начале разд. 3, линейное программирование имеет некоторые дальнейшие теоретические следствия, которые тесно связаны с общей теорией оптимального распределения ресурсов. Ключом к этим дальнейшим теоретическим толкованиям и выводам является введение того, что Канторович назвал «разрешающими множителями».

В оптимальном решении указанные разрешающие множители — то же самое, что двойственные переменные, появляющиеся в общей теории линейного программирования в ныне хорошо известном виде. Как уже указывалось, Канторович показал, как их можно использовать в качестве критерия того, оптимально или нет найденное решение. С теоретической точки зрения именно в этом состоит фундаментальная функция множителей. Полезность разрешающих множителей в алгоритмах вытекает из этого их теоретического свойства.

Множители, однако, полезны еще и в том отношении, что они указывают, как значение целевой функции (функции, которую мы желаем максимизировать или минимизировать) изменяется в результате небольших изменений в условиях задачи, например, в результате изменения имеющихся ограниченных ресурсов. Другими словами, множители представляют предельные значения ценности ограничивающих факторов в задаче. Канторович выявил эту функцию множителей в своей работе и придает ей большое значение. Между прочим, он утверждает, что решение, полученное с помощью разрешающих множителей данного типа, гораздо более ценно, чем решение, полученное без использования множителей, так как вопрос о малых вариациях в программе, вызываемых модификацией условий задачи, может быть непосредственно разрешен на основе этих множителей, без проведения заново полного цикла расчетов для каждого изменения ограничений. Фактически, предлагаемый Канторовичем алгоритм строится именно на этой интерпретации разрешающих множителей.

В западной литературе проходила также дискуссия относительно того, насколько Канторович продвинулся в направлении интерпретации своих множителей как теневых цен или эффективных цен. Купманс в своем предисловии к переводу работы Канторовича в «Management Science» [3] пишет, что «наибольший интерес для экономистов представляет интерпретация — в линейном программировании двойственных переменных, которые автор назвал разрешающими множителями и которые среди прочих названий были названы в западной литературе эффективными ценами», — и дает дальнейшее подтверждение этому моменту.

И в этом пункте Чарнс и Купер также придерживаются более критической позиции [4]. Однако я не вижу, чтобы они сообщили о чем-то, что может вызвать сомнения в характеристике, которую я дал выше и которая, по моему мнению, относится к решающему пункту концепции. Купманс развил свои замечания в кратком ответе указанным авторам [5]. Суть дела здесь в том, что Купманс в своих высказываниях вовсе не имел в виду утверждать, что Канторович еще в 1939 г. открыл

все теоретические аспекты эффективных цен или что он полностью предвосхитил формулировку теоремы двойственности, в том виде, как она ныне известна, но что он тем не менее прояснил важные теоретические свойства и интерпретацию множителей.

История линейного программирования, возможно, заслуживает большего внимания. Чарнс и Купер думают, что было бы весьма интересным проведение исторического исследования истоков и развития различных идей, относящихся к линейному программированию. Они завершают свой обзор следующим замечанием: «когда это будет сделано, тогда окажется возможным определить истинное место идей Канторовича. Мы считаем, что яркость его достижений нисколько не потускнеет, если эта работа будет выполнена точно и тщательно».

### 7. Оптимизация транспорта

В связи с работой 1939 г., рассмотренной выше, я упомяну, не входя в детали, другую очень раннюю работу Канторовича, опубликованную в СССР в 1942 г. «О перемещении масс» [с]. Это весьма сжатая и довольно абстрактная математическая работа, но в ней в общем виде сформулирован широкий класс задач, которые автор с помощью примера сводит к задаче планирования транспорта, а именно к задаче такого прикрепления пунктов потребления к пунктам производства товаров, при котором минимизируются общие транспортные издержки. Для такого класса задач автор сформулировал необходимые и достаточные условия оптимальности, но не разработал эффективных вычислительных методов для нахождения такого оптимума<sup>3)</sup>. В предисловии [7] к английскому переводу работы в «Management Science» А. Чарнс характеризует работу как «важную в области линейного программирования». Другие называли ее «классической» абстрактной транспортной задачей.

Были и другие работы Канторовича и некоторых советских математиков, в которых развиты вычислительные аспекты, связанные с этой статьей.

По-видимому, Канторович продолжает серьезно интересоваться проблемами транспорта и размещения производства и после публикации своей математической работы в этой области. Ряд расчетов, к которым приводят его идеи, по-видимому, в широких масштабах осуществляется в СССР. В одной из последних статей [d] (написанной совместно с А. Журавелем) Канторович авторитетно обсуждает «роль транспортного фактора в размещении производства». В этой работе указывается на большое значение транспортного сектора в рациональном использовании экономических ресурсов и соответственно на важность правильной структуры грузовых тарифов. В этой, связанной с практикой дискуссии, Канторович и Журавель в значительной степени опираются на эмпирическую работу по структуре издержек, оптимизации перевозок и размещения предприятий и т. п. и приводят доводы в пользу реформы системы грузовых транспортных тарифов в СССР. При оценке

---

<sup>3)</sup>Это утверждение повторяет ошибку, содержащуюся в предисловии Чарнса. Метод решения с очевидностью вытекает из приведенного в этой работе доказательства упоминаемой теоремы. Он был подробно изложен в написанной в 1940 г. совместно с М. К. Гавуриным статье, на которую есть ссылка. (Прим. ред.)

работ Канторовича очень интересно сравнить весьма абстрактную статью 1942 г. с исключительно прикладной статьей 1974 г. Для Канторовича характерно, что он может внести важный вклад в обе указанные сферы и, более того, умеет сохранить связь и плодотворное взаимодействие двух этих сфер.

### 8. Последующие работы Канторовича

В позднейших работах Канторович дальше развил свои идеи исследования 1939 г. Особенно я имею в виду его статью [e] и очень важную и оказавшую большое влияние книгу «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» [f], опубликованную в СССР в 1959 г.

Что касается этих работ, то вопросы приоритета здесь несколько сложнее, чем в случае работы 1939 г., частично потому, что, очевидно, прошло значительное время между развитием этих идей и официальной публикацией в СССР, а частично и потому, что за это время линейное программирование уже значительно развилось как в США, так и в Западной Европе. Однако, по-видимому, ясно, что основные идеи вышеупомянутых работ вполне были развиты уже в начале 1940-х годов как продолжение работы, начатой в статье 1939 г. Канторович во многих местах упоминает, что он работал над этими проблемами в начале 1940-х годов. Р. В. Джуди [8, с. 220] безоговорочно утверждает, что эти работы были написаны в 1941 или 1942 г., но, вероятно, это слишком упрощенное понимание. Что, по-видимому, ясно, так это то, что автор сообщал о части содержания и выводах из этих работ в Ленинградском политехническом институте в 1940 г., в Математическом институте АН СССР в 1942 г. (тогда находившемся в Казани) и в Институте экономики АН СССР в 1943 г. В указанных работах идеи статьи 1939 г. развивались в нескольких направлениях.

В первую очередь, теперь в этих работах даются формулировки, которые естественным образом охватывают общую задачу линейного программирования без всяких преобразований, которые были необходимы для формулировки из статьи 1939 г. Фактически Канторович теперь дает формулировку, которая может показаться даже более общей, чем общепринятая формулировка задачи линейного программирования, и формулировка Канторовича для многих целей (особенно для тех, которые он сам использует в качестве иллюстраций) является весьма полезной и удобной. С помощью соответствующих перестановок и преобразований стандартную задачу линейного программирования все же можно переформулировать таким образом, чтобы она охватывала и формулировку Канторовича. Различие, следовательно, касается формулировки, а не области реальных задач, которые могут быть ими охвачены.

Примером применения теории линейного программирования, в котором оказалось удобным исходить из формулировки Канторовича, служит работа Д. Мицельского, К. Рея и В. Тржесьяковского, которые построили модель оптимизации плановой экономики с особым учетом экспорта и импорта [9]. Ими показано, как можно на основе сформулированной по Канторовичу задачи и с помощью его способа обозначений условий оптимума естественным путем прийти к методу декомпозиции, т. е. к методу, в котором общая задача оптимизации разлагается на несколько мень-



ших задач, связанных определенным образом между собой, и в котором оптимальное решение общей задачи получается с помощью итеративной процедуры, состоящей в повторном решении меньших задач. Это очень важно для обеспечения возможности частично децентрализованного согласования оптимальных планов для хозяйства в целом или для его крупных секторов. Данный «Восточный» подход к декомпозиции, по-видимому, начал разрабатываться независимо и параллельно ныне хорошо известному принципу декомпозиции Д. Данцига и П. Вулфа [10], который был первым значительным вкладом в теорию разложения крупных задач линейного программирования в западной литературе. В упомянутой выше работе декомпозиция появляется как естественное следствие и распространение подхода Канторовича. Мне неизвестно, насколько сам Канторович формализовал подобные методы декомпозиции, но представляется очевидным, что он должен был работать с такими методами, проводя расчеты в вычислительном центре в Новосибирске. Подобный способ составления децентрализованного плана полностью соответствует общим идеям, высказанным Канторовичем, например, в конце статьи [e] и в нескольких местах книги [f]. Декомпозиция оказалась очень важной идеей и имеет большое значение для применения вычислительных методов к решению задач эффективного распределения ресурсов в больших системах.

Чрезвычайно важное направление распространения исследований Канторовича, которое появилось как в работе [e], так и [f], а потом было разработано и выделено особо в работах [g] и [i], — это разработка динамических моделей. С формально-математической точки зрения — это «всего лишь» вопрос наличия большего числа датированных переменных и определенных специальных структур в матрице коэффициентов, описывающей задачу. Поэтому с математической точки зрения не потребовалось большой новой теории. Однако с точки зрения интерпретации и применения динамическое расширение очень важно. Особое значение имеет появление в этом случае датированных теневых цен (разрешающих множителей, двойственных переменных) для различных ресурсов и товаров. За исключением весьма специальных случаев этим ценам свойственно развитие во времени, т. е. один вид ресурса или товара получает различные теневые цены в различные периоды времени. В этом случае система динамических рядов цен содержит всю информацию, заключенную в теневых ценах, о задаче перспективного планирования, но для применений и теоретической интерпретации представляет особый интерес разделение двух аспектов подобной динамической системы цен. Первый аспект относится к изменению относительных цен различных товаров, второй — к изменению уровня цен с течением времени. Конечно, это не имеет никакого отношения к инфляции или дефляции — рассматриваемые теневые цены выражают предельные значения ограниченных ресурсов в различные периоды времени, т. е. уровень этих цен в разные периоды выражает ценность, измеренную потенциальным влиянием на целевую функцию наличия ресурсов в ближайшем или более далеком будущем. Канторович провел такое отделение (см., например, [f, С. 284–287]), записав каждую цену как произведение нормализованной цены фактора и множителя, зависящего только от времени. Эти нормализованные цены привязаны к определенному постоянному уровню в предположении, что определенный, основанный на этих ценах индекс

должен оставаться неизменным во времени. В этом случае изменения фактических теневых цен окажутся комбинацией изменения относительных цен и изменения уровня цен. Введение фактора времени, представленного в качестве индекса цен, делает его интерпретацию, близкой к процентной ставке, и Канторович использует его для выражения того, что он обозначает как «нормальную эффективность капиталовложений при переходе от периода  $t$  к следующему периоду времени». Такая интерпретация полностью аналогична точкам зрения и концепциям, используемым в других современных теориях процента и оптимальных инвестиционных решений.

## 9. Государственное планирование хозяйства и система цен

Это приводит нас к возможно наиболее важному аспекту работ [e–g] и наиболее подробно обсуждается в [f] (см. также [h]). Кроме дальнейших работ над проблемами, относящимися к микроуровню, или над такими, как оптимальное планирование перевозок и размещения, Канторович делает широкие выводы относительно путей такой организации социалистической экономики, которая приводит к достижению высокой эффективности использования ресурсов. Он представляет себе плановую систему, основанную на линейном программировании, в которой составляется централизованный план, касающийся основных аспектов развития, в значительной степени на основе рассмотренных выше методов декомпозиции с координацией совокупности менее крупных задач и итерации. На основе этих расчетов в дополнение к основным «физическим» аспектам плана получают также теневые цены для наиболее важных продуктов и ресурсов. Канторович предлагает использовать их в качестве основы для системы цен в народном хозяйстве. Он очень убедительно аргументирует как с практической, так и с теоретической точек зрения, что эти цены могут составить рациональную основу решений, относящихся к большому числу актов выбора в экономике, которые имеют намного более детальный характер, чем те решения, которые можно определять посредством расчета более формализованного и централизованного плана. В этой связи Канторович обсуждает вопрос, который по моим сведениям не очень широко явно обсуждался в западной литературе. Это то, что Канторович назвал «относительной устойчивостью» теневых цен. Суть состоит в том, что теневые цены, найденные в результате решения оптимизационной задачи, логически связаны только с теми элементами плана, которые явно входили в проводимые вычисления. Детализированные решения, которые приходится принимать в менее крупных подразделениях экономики, суть решения, относящиеся к таким вопросам, как, например, ввести или нет определенные новые методы работы, некоторые новые или модифицированные производственные процессы и т. д., которые были неизвестны или по другим причинам (особенно ввиду их многочисленности) не могли быть учтены при формализованных расчетах плана. Идея Канторовича в данном вопросе состоит в том, что в той мере, в какой эти обстоятельства, находящиеся за пределами формализованных расчетов плана, имеют меньший порядок величины в сравнении с аспектами, включенными в расчеты, полученные теневые цены не будут очень сильно отклоняться от правильных теневых цен, которые можно было бы получить, если бы оказалось возможным проведение полного расчета, охватывающего все аспекты, т. е. включающего модификации ме-

тодов работы, производственных процессов и т. п., упомянутых выше. Вследствие этого рассчитанные теневые цены могут образовать основу для решений, которые касаются обстоятельств, не охваченных формальной моделью.

Я считаю, что это очень важная идея. В теоретической литературе часто встречается идея, что централизованные расчеты цен, которые должны служить в качестве сигналов для децентрализованных решений, относящихся к объемам, неосуществимы из-за того, что цены и объемы производства в оптимальном решении взаимообусловлены. Невозможно рассчитать оптимальное решение как для сферы цен, так и для сферы объемов, не вычислив в то же время планов для другой сферы, а если это так, то зачем децентрализовать решения об объемах производства, после того как цены рассчитаны централизованно? Мне представляется, что подход Канторовича позволяет далеко продвинуться в ответе на этот вопрос.

Точка зрения Канторовича в ходе обсуждения системы цен в СССР нашла серьезную поддержку, но не была принята в качестве единственной базы для расчета цен. Было выдвинуто также много возражений против этого предложения. Несомненно, это было связано с тем, что система цен в экономике имеет много различных функций. Предложение Канторовича относится главным образом к решению проблемы оптимального распределения ресурсов, выбора способа производства и т. д. Однако, кроме того, имеются такие функции цен, как воздействие на распределение доходов, выполнение целей администрации и управления, формирование основы системы учета и т. д. Этим другим целям не обязательно наилучшим образом служит система цен, наилучшая с точки зрения эффективного распределения ресурсов, которая к тому же включает движение во времени, как это свойственно упомянутой выше динамической системе. Хотя предложение Канторовича в первую очередь касается роли цен в связи с эффективностью использования ресурсов и способа производства, ему не чуждо рассмотрение и других функций цен. Например, Канторович считает, что вычисленные теневые цены можно непосредственно использовать для определения взаимных платежей государственных предприятий без учета влияния их на распределение доходов, в то время как фактические розничные цены, по которым платят потребители, во многих случаях и по разным причинам должны отклоняться от таких теневых цен. Более того, Канторович явно указывает, что если расчет дает весьма различающиеся теневые цены рабочей силы различных типов и квалификации, то это не должно автоматически отразиться на фактически выплачиваемой заработной плате и жаловании. Тем не менее Канторович считает, что такие теневые цены можно было бы учесть в планах, касающихся организации производства, выбора альтернативных капиталовложений и т. д.

Канторович подробно рассматривает роль, которую должна играть рента на землю и ограниченные природные ресурсы в системе цен. Это естественно вытекает из анализа теневых цен и оптимизации. Данный вопрос имеет большое значение для СССР, и он обсуждался весьма широко, а работы Канторовича, очевидно, весьма способствовали прояснению вопроса.

Обзоры ряда основных точек зрения в дискуссии о системе цен в СССР были даны М. Борштейном [11], Л. Йохансеном [12] и Р. В. Джуди [8].

## 10. Инвестиционные критерии

Рассмотрение Канторовичем критериев для определения капиталовложений тесно связано с системой цен. Канторович очень квалифицированно критикует длинный список предлагавшихся критериев, которые в прежнее время выдвигались при обсуждении этой проблемы в СССР и которым до некоторой степени следовали на практике, и приводит убедительные аргументы в пользу критериев, основанных на разрешающих множителях или теневых ценах. В связи с этим на сцену выходит вся система динамических рядов цен, которая была описана выше, а «нормальная эффективность капиталовложений» играет ту же роль, что и процентная ставка при расчете текущей стоимости.

Вопрос относительно инвестиционных критериев также весьма интенсивно обсуждался в западной литературе. В ней этот вопрос часто запутывают в некоторых аспектах, между прочим, потому, что инвестиционные критерии зачастую рассматриваются изолированно от всеобъемлющей точки зрения на проблемы оптимизации экономики в целом. По моему мнению, рассмотрение Канторовичем вопроса об инвестиционных критериях весьма прозрачно и конструктивно также и в сравнении с современной западной литературой именно потому, что он выводит предлагаемые им критерии из концепции оптимизации экономики в целом.

При обсуждении инвестиционных критериев Канторович непосредственно затрагивает несколько спорных вопросов в советской экономической науке и экономической политике. В первую очередь вся эта область тесно связана с проблемами системы цен. По этой причине Канторович критикует некоторые предложения, которые выдвигались в СССР и которые по форме довольно близки к его собственным предложениям. Суть в том, что другие авторы не видели так ясно тесной связи критериев капиталовложений с системой цен в целом, и критерии, которые формально довольно близки критериям Канторовича, будут приводить к неверным результатам, если их применять на основе структуры цен, которая не согласуется с идеей оптимизации. Таким же образом Канторович критикует сходные формально критерии, которые используют показатель процентной ставки, полученный из рассмотрения системы денежного обращения, а не с помощью оптимизации. Далее, Канторович критикует длинный список критериев, которые опять-таки подобны его собственному, но которые отличаются тем, что в них предлагается использовать различные нормы «эффективности капиталовложений» в различных отраслях производства. Из рассмотрения экономики в целом вытекает, что такая норма должна быть одинаковой для всех отраслей. (Здесь практика сделала несколько шагов в направлении сближения с точкой зрения Канторовича, но не приняла еще ее целиком.)

В качестве примера проблемы инвестиционных критериев Канторович обсуждает также более конкретно такие аспекты развития экономики СССР, как упор на тяжелую промышленность на ранних этапах индустриализации. Официальная точка зрения в СССР состояла в том, что такое распределение средств в пользу тяжелой промышленности оказалось бы неприбыльным согласно экономическим расчетам, но одно из преимуществ советской системы в том и состоит, что, несмотря на это, эти крупные капиталовложения были сделаны. Канторович придерживает-

ся мнения, что эта главная стратегия оказалась бы прибыльной при правильных расчетах, основанных на теневых ценах и правильно определенной норме «эффективности капиталовложений».

Важная проблема, связанная с критериями капиталовложений, — это, безусловно, вопрос о возможности численной оценки нормы эффективности капиталовложений, которую следует использовать в расчетах. Одним из подходов к этому является предложенный Канторовичем и экспериментально опробованный в СССР, который состоит в расчете этой нормы на основе укрупненных моделей, сформулированных как динамические задачи линейного программирования, описанные выше (см., в частности, [i]). Однако Канторович не придерживается догматически этой процедуры. Он придерживается мнения, что к вопросу об оценке нормы эффективности капиталовложений следует подходить под разными углами, поскольку линейно-программная формулировка не охватывает всех относящихся к делу аспектов экономики. Канторович вдумчиво и основательно рассматривает эту проблему в нескольких статьях. Он также попытался рассчитать норму с помощью макроэкономических моделей. Ряд работ в этой области имеется в английских переводах [j–n]. В этих статьях определение числового значения нормы эффективности капиталовложений рассматривается при различных допущениях относительно вида производственных функций и типа технического прогресса, с различением роли фондов и предметов потребления. Что касается вида производственных функций и типа технического прогресса, то кажется (см., в частности, [n]), что Канторович считает представление «putty-clay» более реалистичным, чем «putty-putty», но, рассмотрев случай «putty-clay», он предлагает также модифицированную модель «putty-clay», в которой ограничена сфера фактической замены.

В связи с инвестиционными критериями и динамической нормой эффективности капиталовложений интересно также сослаться на широкое обсуждение Канторовичем «цены времени» [m]. Это довольно-таки популярное сочинение, в котором весьма убедительно и прозрачно с помощью многочисленных практических и конкретных примеров объясняется необходимость более действенного учета временного аспекта в планировании и управлении экономикой в СССР.

## 11. Заключение

Мне представляется, что вышеприведенный обзор охватывает основные аспекты вклада Л. В. Канторовича в экономическую науку, хотя изложение, конечно, было кратким и обобщенным.

Как уже говорилось, у Канторовича есть работы, которых я не имел возможности изучить. Некоторые из них указаны в советской библиографии по математико-экономическим методам и моделям, которая была опубликована Ленинградским отделением АН СССР в 1968 г. Некоторые упоминаются и кратко излагаются в работах [7, 13, 14], а также в тех работах Канторовича, на которые были сделаны ссылки. Насколько я могу судить, большинство этих статей касаются вычислительных аспектов и дальнейшей детализации рассмотренных выше работ. По-видимому, в последующем Канторович интенсивно работал над проблемами амортизации фондов в связи с техническим прогрессом. Предложения на этот счет можно найти в

[m], где, между прочим, рассматривается вопрос о правильности применения ускоренной амортизации в начальный период срока службы фондов. Канторович доказывает, что такая система амортизации может быть подтверждена анализом моделей оптимального использования, ремонта и замены станков. Можно сослаться также на статью [h] и на несколько других статей, в которых рассматривается этот вопрос, но они, однако, имеются только на русском языке.

Кроме работ, опубликованных под его именем, Канторович, несомненно, внес большой вклад в науку, руководя научными исследованиями и расчетами, особенно в научно-исследовательском центре в Новосибирске.

Если бы было нужно собрать все работы Л. В. Канторовича под одним названием, таким подходящим заголовком было бы: оптимизация использования ограниченных ресурсов, т. е. самая главная из всех экономических проблем. Его вклад в линейное программирование относится к этой области. Математические и вычислительные аспекты важны, но не меньшее значение имеет то, что Канторович понял, какой широкий класс конкретных и довольно разнообразных задач можно привести к этой форме, и что он увидел огромное значение теории линейного программирования для решения намного более общих проблем управления и планирования экономики, включая систему цен и критерии капиталовложений. Система цен и критериев капиталовложений служит также полезным инструментом оптимального использования ограниченных ресурсов. В эти области Канторович внес вклад также и с других сторон, иных, чем линейное программирование.

По прочтении книг и статей Канторовича становится ясно, что он достиг глубокого понимания экономических проблем и многие его объяснения отличаются пронизательными экономическими соображениями и реалистическим рассмотрением практических проблем. Л. В. Канторович — знаменитый математик, но, несомненно, мы с полным правом можем включить его в ряд наиболее выдающихся экономистов последних десятилетий.

## БИБЛИОГРАФИЯ

### Работы Л. В. Канторовича

В этом списке ссылки даны на переводы публикаций Л. В. Канторовича, которые я по большей части использовал в работе. Год оригинальной публикации приводится в скобках. Были издания некоторых из работ в переводах на другие западные языки иные, чем указанные ниже. Для интересующихся ими есть библиография, включающая и ссылки на оригиналы, см. Ellman [13, P. 198–199]. См. также *The Use of Mathematics in Economics* [b, P. 302].

- [a] *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production* // *Management Sci.* — July 1960. — N 4. (Оригинальная публикация в Ленинграде, 1939 г.)
- [b] *Mathematical Methods of Production Planning and Organization, Published in The Use of Mathematics in Economics*, edited by A. Nove, Oliver & Boyd, Edinburgh & London, 1964. (Это перевод наиболее важных частей книги, опубликованной в СССР в 1959 г. под редакцией В. С. Немчинова. Статья Канторовича воспроизводит его работу 1939 г. (см. [a]) с небольшими изменениями.)
- [c] *On the Translocation of Masses* // *Management Sci.* — October 1958. — N 1. (Оригинальная публикация в СССР в 1942 г.)

- [d] *The Role of the Transport Factor in the Location of Production* // Problems of Economics. — 1974. (Соавтор А. Журавель. Оригинальная публикация в СССР в 1974 г.)
- [e] *Further Development of Mathematical Methods and Prospects of Their Application in Economic Planning*. Опубликовано в *The Use of Mathematics in Economics*, см. [b].
- [f] *The Best Use of Economic Resources*. — London; New York: Pergamon Press, 1965. (Оригинальная публикация в СССР в 1959 г.)
- [g] *Ein dynamisches Modell der optimalen Planung*. Sowjetwissenschaft. Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge (Berlin). — 1964. — Heft 7. (Оригинальная публикация в СССР в 1964 г. Англ. перевод “A Dynamic Model of Optimum Planning.” *Mathematical Studies in Economics and Statistics in the USSR and Eastern Europe*. Winter 1964–65. — Vol. I, N 2.)
- [h] *Optimal Mathematical Models in Planning the Development of a Branch and in Technical Policy* // Contemporary Soviet Economics. — New York International Arts and Sciences Press, 1969. — Vol. I. (Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)
- [i] *Estimating the Effectiveness of Capital Expenditures* // МАТЕКОН. — Fall 1971. — N 1. (Совместно с В. Н. Богачевым и В. Л. Макаровым. Оригинальная публикация в СССР в 1970 г.)
- [j] *A Singlo-Product Dynamical Model with Instantaneous Convertibility of Funds* // Soviet Mathematics. — 1967. — N 3. (Совместно с И. Г. Глобенко. Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)
- [k] *A Dynamical Model of Economics* // Soviet Mathematics. — 1967. — N 5. (Совместно с И. Г. Глобенко. Оригинальная публикация в СССР в 1967 г.)
- [l] *Once Again on Calculating the Norm of Effectiveness on the Basis of a One-Product National Economic Development Model* // МАТЕКОН. — Winter 1970–71. — N 2. (Совместно с А. Л. Вайнштейном. Оригинальная публикация в СССР в 1970 г.)
- [m] *Der Preis der Zeit*. Sowjetwissenschaft. Gesellschaftswissenschaftliche Beiträge (Berlin). — 1970. — Heft 1. (Совместно с В. Н. Богачевым. Оригинальная публикация в СССР в 1969 г.)
- [n] *Dynamic Models of Technological Changes* // G. I. Marchuk (ed.), *Optimization Techniques*. IFIP Technical Conference. — Berlin: Springer-Verl., 1975. (Lecture Notes in Computer Science; N 27.)

#### Ссылки на других авторов

Работы, помещенные ниже с [1] по [12], используются в тексте. Ссылки с [13] по [20] сделаны на другие книги и статьи, которые использовались при подготовке этого очерка.

- [1] T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*. Cowles Commission Monograph. N 13. John Wiley & Sons, New York, 1951. (Особенно см. G. B. Dantzig “The Programming of Interdependent Activities” and “Maximization of a Linear Function of Variables Subject to Linear Inequalities”, кроме того, T. C. Koopmans “Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities”).
- [2] Dorfman R., Samuelson P. A., Solow R. M. *Linear Programming and Economic Analysis*. — New York: McGraw-Hill Book Co., 105S.
- [3] Koopmans T. C. A Note about Kantorovich’s Paper, *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production* // Management Sci. — July 1960. — N 4. (Введение к L. V. Kantorovich [a].)
- [4] Charnes A., Cooper W. W. On Some Works of Kantorovich, Koopmans and Others // Management Sci. — 1962.
- [5] Koopmans T. C. On the Evaluation of Kantorovich’s Work of 1939 // Management Sci. — 1962.
- [6] Dantzig G. B. *Linear Programming and Extensions*. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1963.
- [7] Charnes A. Foreword // Management Sci. — October 1958. — N 1. (Введение к L. V. Kantorovich [c].)
- [8] Judy R. W. *The Economists*. Chapter VII // H. G. Skilling, F. Griffiths (eds.). *Interest Groups in Soviet Politics*. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.
- [9] Mycielski J., Rey K., Trzeciakowski W. *Decomposition and Optimization of Shortrun Planning in a Planned Economy* // T. Barna (ed.), *Structural Interdependence and Economic Development*. — London: MacMillan & Co., 1963.

- [10] Dantzig G. B., Wolfe P. Decomposition Principle for Linear Programs // Operations Research. — 1960. — N 1.
- [11] Bornstein M. The Soviet Price Reform Discussion // Quarterly Journal of Economics. — 1964.
- [12] Johansen L. Prissystemets Rolle i de Østeuropæiske Land. Statsøkonomisk Tidsskrift. — 1966.
- [13] Ellman M. Planning Problems in the USSR. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
- [14] *Mathematics and Computers in Soviet Economic Planning* / J. P. Hurdt et al. (eds.). — New Haven: Yale Univ. Press, 1967.
- [15] Isbell J. H., Marlow W. H. On an Industrial Programming Problem of Kantorovich // Management Sci. — 1962.
- [16] Johansen L. Soviet Mathematical Economics // The Economic J. — 1966.
- [17] Johansen L. Review of L. V. Kantorovich: The Best of Use of Economic Resources (If) // The Economic J. — 1967.
- [18] Zauberman A. Aspects of Planometrics. — The Athlone Press. Univ. of London, 1967.
- [19] Ward B. Kantorovich on Economic Calculation // J. Polit. Economy. — 1960.
- [20] *Pro and Con — Compare Conclusions* // Contemporary Soviet Economics. — New York: Internat. Arts and Sciences Press, 1969. — Vol. I. (Перевод отчета из Экономической газеты, № 10, 1965 г. о дискуссии, состоявшейся в связи с выдвижением Л. В. Канторовича, В. С. Немчинова и В. В. Новожилова на Ленинскую премию 1965 г.)

**Работы Л. В. Канторовича**  
(советские издания, цитированные автором в переводах)

- [a] *Математические методы организации и планирования производства*. — Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1939.
- [b] *Математические методы организации и планирования производства // Применение математики в экономических исследованиях*. — М., 1959.
- [c] *О перемещении масс // Докл. АН СССР*. — 1942.
- [d] *Роль транспортного фактора в размещении производства (совм. с А. Журавлем) // Вопросы экономики*. — 1974.
- [e] *Дальнейшее развитие математических методов и возможности их применения в планировании хозяйства // Применение математики в экономических исследованиях*. — М., 1959.
- [f] *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов*. — М., 1959.
- [g] *Динамическая модель оптимального планирования // Планирование и экономико-математические методы*. — М., 1964.
- [h] *Оптимальные математические модели в планировании развития отрасли и в технической политике*. — 1967.
- [i] *Об оценке эффективности капитальных затрат (совм. с В. Н. Богачевым и В. Л. Макаровым) // Экономика и мат. методы*. — 1970. — Т. 6, № 6.
- [j] *Однопродуктовая динамическая модель с мгновенной превращаемостью фондов (совм. с И. Г. Глобенко)*. — 1967.
- [k] *Динамическая модель экономики (совм. с И. Г. Глобенко)*. — 1967.
- [l] *Еще об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства (совм. с А. Л. Вайнштейном) // Экономика и мат. методы*. — 1970. — Т. 6.
- [m] *Цена времени (совм. с В. Богачевым) // Коммунист*. — 1969.
- [n] *Динамические модели технического прогресса*. — 1975.



## Литература о жизни и трудах Л. В. Канторовича

**1930**

*Lusin Nicolas.* Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications. — Paris, Gauthier-Villars et Cie, Editeurs, 1930. — P. 289, 320. [см. также 1953].

**1932**

Наука в СССР за пятнадцать лет. Математика. — М.; Л.: ГТТИ, 1932. — С. 46, 47, 52, 91, 98.

**1933**

*Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3. — М.; Л.: ГТТИ, 1933. — С. 363–364.

**1934**

*Славентатор Л.* Созвездие молодых // Вечерняя Красная газета. — Л., 1934. — 29 июня [см. также 2004].

**1935**

В ряды передовых ВТУЗов // Фундамент (орган ЛИИПС). — 1935. — 21 сент. — Портр.

**1938**

Мой путь в науке // Ленинградский университет. — 1938. — 23 сент. [см. также 2002].

*Натансон И. П.* Советская молодежь и математика // Природа. — 1938. — № 10. — С. 25–28.

*Панов Д. Ю.* Рец.: Канторович Л. В. и Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений // Успехи мат. наук. — Л., 1938. — Вып. V. — С. 263–265.

Работы молодых ученых: [О Всесоюзном конкурсе молодых ученых] // Ленингр. правда. — 1938. — 15 июня. — Портр. [см. также 2004].

**1939**

Настольный календарь на 1940 год. — М.: Соцэкгиз, 1939. — С. 117: портр.

**1940**

*Гутерман М. Н.* Рец. на кн.: Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. [Л.], 1939 // Механ. обработка древесины. — 1940. — № 8. — С. 53–55.

*Либерман И., Белянкин А., Лавров В.* Выдающийся математик нашей страны // Фортификатор (орган ВИТУ). — 1940. — Июнь.

*Birkhoff G.* Lattice theory. — New York, 1940. — [Pt] 4. — P. 104–121. — (Amer. Math. Soc. Colloquim publications; Vol. 25).

**1948**

Ленинградский университет за советские годы 1917–1947. Очерки. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1948.

Математика в СССР за тридцать лет, 1917–1947. — М.; Л., 1948. — С. 124, 245, 250, 251, 261, 280, 291, 292, 323, 524, 593, 600, 606, 612, 617, 620–622, 625, 626, 761–763, 766, 770, 771, 774, 775, 777, 778, 793–797, 799–801.

*Birkhoff G.* Lattice theory. — 2nd ed., rev. — New York, 1948. — [Pt] 3. — P. 238–258.

### 1949

Институты Академии наук помогают промышленности // Вечерний Ленинград. — 1949. — 12 мая.

*Кафтанов С.* Новые выдающиеся успехи советской науки // Правда. — 1949. — 11 апр.

*Кряжев И., Певзнер С.* Математик пришел в цех // Вечерний Ленинград. — 1949. — 15 апр. [см. также 2003].

О присуждении Сталинских премий за выдающиеся работы в области науки и изобретательства за 1948 год // Правда. — 1949. — 4 апр.; Ленингр. правда. — 1949. — 4 апр.

*Фиштенгольц Г. М.* Во славу советской науки // Ленинградский университет. — 1949. — 13 апр. — Портр.

*Фиштенгольц Г. М.* Лауреат Государственной премии СССР 1949 г. проф. Л. В. Канторович // Вестн. ЛГУ. — 1949. — № 4. — С. 160–161.

### 1950

*Михлин С.* Рец. на кн.: Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — 3-е изд. — Л.; М., 1949; Успехи мат. наук. — 1950. — Т. 5, вып. 4. — С. 183–185.

*Мысовский И. П.* О сходимости метода Л. В. Канторовича решения функциональных уравнений и его применениях // Докл. АН СССР. — 1950. — Т. 70, № 4. — С. 565–568. — Библиогр.: 5 назв.

### 1951

*Боев Г. П.* Рец. на кн.: Канторович Л. В. Теория вероятностей // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 4. — С. 232.

*Екимов А. А.* Рец. на кн.: Канторович Л. В., Залгаллер В. А. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. — Л., 1951 // Вестн. ЛГУ. — 1951. — № 10. — С. 101–105.

*Фиштенгольц Г. М.* Рец. на кн.: Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М., 1950 // Сов. книга. — 1951. — № 3. — С. 38–42: рис.

### 1952

*Кордемский Б. А., Руслаев Н. В.* Удивительный квадрат. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. — 160 с. (о рациональном раскрое).

*Эльсгольц Л. Э.* Вариационное исчисление. — М.: Гостехиздат, 1952.

### 1953

*Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — М.: Гостехиздат, 1953. — С. 291, 319 [см. также 1930].

### 1957

*Колмогоров А. Н.* Выступление на пленарном заседании Сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства // Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, 15–20 окт. 1956 г.: Пленар. заседания. — М., 1957. — С. 159–161.

### 1958

Канторович Леонид Витальевич // БСЭ. — 2-е изд. — 1958. — Т. 51. — С. 140. — Библиогр.: 3 назв.

Ленинградцы будут работать в новом научном центре в Сибири // Вечерний Ленинград. — 1958. — 31 марта.

*Лузин Н. Н.* Собрание сочинений. Том 2. — М.: Изд-во АН, 1958. — С. 241, 266.

*Charnes A.* Foreword // *Management Science*. — 1958. — N 1, Oct. (Предисловие к переводу [1942, 1].)

## 1959

*Герчук Я. П.* Линейное программирование в операционных исследованиях. — М., 1959. — С. 8, 23–27, 39, 57.

Канторович Леонид Витальевич // Биографический словарь деятелей естествознания и техники. — М., 1959. — Т. 2. — С. 433.

Канторович Леонид Витальевич // МСЭ. — 3-е изд. — 1959. — Т. 4. — С. 481.

Канторович Леонид Витальевич // Математика в СССР за сорок лет, 1917–1957. — М., 1959. — Т. 2: Биобиблиография. — С. 292–295; Библиогр.: 114 назв.

Математика в СССР за сорок лет, 1917–1957. — М., 1959. — Т. 1: Обзорные статьи. — С. 34, 180, 302, 351, 366, 505, 584, 588, 598, 637, 653, 676, 688–693, 811, 816, 818–825, 830, 832, 833, 847–850, 854, 859, 862, 868, 883.

О применении математики в экономических исследованиях и об отношении к эконометрике. Материалы совещания, созванного редакцией журнала // Вестн. статистики. — 2 июля 1959 г. — М.: Госстатиздат, 1959. — 47 с.

*Четыркин Е. М.* Практическая интерпретация разрешающих множителей Канторовича. — М.: ВИНТИ, 1959. — 14 с.: рис. — Ротапр.

*Greub W., Rheinboldt W.* On a generalization of an inequality of L. V. Kantorovich // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1959. — Vol. 10, N 3. — P. 407–415. — Bibliogr.: 3 ref.

*Leontief W.* Interview // *Business Week*. — 1959. — 13 June.

## 1960

*Бирман И. Я.* Научное совещание по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании. Москва, апрель 1960 г. // Вестн. статистики. — 1960. — № 7. — С. 41–52.

*Боярский А.* О математических методах и требованиях марксистской экономической науки: [Рец. на кн.: Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., 1959] // *Плановое хозяйство*. — 1960. — № 1. — С. 92–96.

*Булавский В. А., Рапопорт Э. О., Солдатов В. Е.* Разработка и обоснование новых тарифов на такси (Доклад на заседании Ленинградского математического общества 24.05.1960) // *Успехи мат. наук*. — 1960. — Т. XV, вып. 6 (96). — С. 188–189.

*Гатовский Л., Саков М.* О принципиальной основе экономических исследований // *Коммунист*. — 1960. — № 15. — С. 79–90.

*Дадаян В., Черняк Ю.* Математические методы в экономике (Совещание по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании. 4–8 апреля 1960 г.) // *Научные доклады высшей школы. Экономические науки*. — 1960. — № 3. — С. 140–151.

*Железняк П.* Научное совещание по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании (апрель 1960 г.) // *Плановое хозяйство*. — 1960. — № 5. — С. 88–90.

*Кац А.* О неправильной концепции экономических расчетов: [Рец. на кн. Канторовича: Экономический расчет наилучшего использования ресурсов (1959) и ст.: Об исчислении производственных затрат (1960)] // *ВЭ*. — 1960. — № 5. — С. 107–118.

*Кац А.* Экономическая теория и применение математики в экономике // *ВЭ*. — 1960. — № 11. — С. 92–103.

*Корбут А. А., Романовский И. В.* Первое всесоюзное математико-экономическое научное совещание // *Успехи мат. наук*. — 1960. — Т. 15, вып. 6. — С. 191–204.

*Красносельский М. А., Чечик В. А.* Об одной теореме Л. В. Канторовича // *Труды семинара по функциональному анализу [Ростовского-на-Дону и Воронежского гос. ун-тов]*. — Воронеж, 1960. — Вып. 3–4. — С. 50–53.

Математические методы в экономике (Научное совещание по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании) // ВЭ. — 1960. — № 8. — С. 100–128.

О математических методах в экономических исследованиях и планировании (Краткая информация о научном совещании в ИЭ АН в апреле 1960 г.) // Речной транспорт. — 1960. — № 5. — С. 153–154.

Применение математики в экономических исследованиях и планировании // ВЭ. — 1960. — № 5. — С. 153–154.

*Campbell Robert W.* Рец.: Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов // Amer. Econ. Rev. — 1960. — Vol. 50, N 4. — P. 729–731. [см. также 2004].

*Dobb M.* The Revival of Soviet Economic Discussion // Science and Society. — 1960. — Vol. XXIV, N 4. — P. 289–311.

*Koopmans T. C.* A Note About Kantorovich's Paper Mathematical Methods of Organizing and Planning Production // Mgmt. Sci. — 1960. — N 4. — P. 363–365 [см. также 2004].

*Leontief W. W.* The Rise and Decline of Soviet Economic Science // Foreign Affairs. — 1960. — Vol. 38, N 2.

*Montias G. M.* Рец.: Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов // Econometric. — 1960.

*Ward Benjamin.* Kantorovich on economic calculation // J. Political Economy. — 1960. — Vol. LXVIII, N 6. — P. 545–556.

*Zieber Paul.* Sowjetunion entdedt Oconometrie. Das Planungsinstrumentarium der UdSSR wird exakter // Der Volkswirt. Wirtschaft und Planinz-Zeitung. Fr.a/M. — 1960. — N 43, Okt. 22. — S. 2380–2382.

## 1961

*Боярский А. Я.* К вопросу о применении математики в экономике // ВЭ. — 1961. — № 2. — С. 59–72.

*Герчук Я. П.* Проблемы оптимального планирования: Линейное программирование. — М., 1961. — С. 26–28.

*Герчук Я. П., Минц Л. Е.* Научное совещание о применении математических методов в экономических исследованиях и планировании (4–8 апреля 1960 г.) // Ученые записки по статистике. — 1961. — Т. 6. — С. 248–261.

*Мстиславский П.* О количественном выражении экономических связей и процессов // ВЭ. — 1961. — № 2. — С. 95–106.

*Новозhilов В. В.* Исчисление затрат в социалистическом хозяйстве // ВЭ. — 1961. — № 2. — С. 82–94.

Общие вопросы применения математики в экономике и планировании. — М., 1961. — (Тр. научн. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 1).

*Соболев С. Л.* С математической точностью решать экономические задачи // Экономическая газета. — 1961. — 11 июля.

*Campbell Robert W.* Marks, Kantorovich and Novozhilov. — Stoimost — versus Reality // Slavic Revue. — 1961. — N 20 (3), Okt. — P. 402–418. [см. также 1992].

*Campbell Robert W.* Исследования советской экономики — достижения и перспективы // Study of the Soviet Economy. — Indiana Univ., 1961. — P. 137–138.

*Montias G. M.* Советская экономическая модель и слаборазвитые страны // Ibid. — P. 67–77.

*Zauberman A.* New Winds in Soviet Planning // Soviet Studies. — 1961. — Vol. XII, N 1.

## 1962

*Акилов Г. П., Вулих Б. З., Гавурин М. К., Залгаллер В. А., Натансон И. П., Пинскер А. Г., Фаддеев Д. К.* Леонид Витальевич Канторович: (К 50-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17, вып. 4. — С. 201–215.: портр. — Библиогр.: 155 назв.

*Боярский А. Я.* Значение методов оптимального планирования // Тезисы докладов на теоретической конференции МГУ: Проблемы оптимального планирования и управления производством. — М., 1962. — С. 13–30.

Боярский А. Я. Математико-экономические очерки. — М.: Госстатиздат, 1962.

Леонид Витальевич Канторович: (К 50-летию со дня рождения) // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 1. — С. 5–6: портр.

Островитянов К. В. Строительство коммунизма и товарно-денежные отношения. — М.: Госполитиздат, 1962. — С. 113–123.

Петрашень Г. И., Гусев В. Гривенник и миллиард // Известия. — 1962. — 13 июля.

Рапопорт Э. О., Солдатов В. Е. Опыт использования эластичности при построении тарифов // Определение потребности населения в товарах (Материалы научной конференции Украинского НИИ торговли и общественного питания 8–12 мая 1961 г.). — Киев: Изд-во АН УССР, 1962. — С. 222–226.

Charnes A., Cooper W. W. On Some Works of Kantorovich, Koopmans and Others // Mgmt. Sci. — 1962. — Vol. 8, N 3. — P. 246–263. — Bibliogr.: 27 ref.

Isbell J. H., Marlow W. H. On an Industrial Programming Problem of Kantorovich // Mgmt. Sci. — 1962.

Koopmans T. C. On the Evaluation of Kantorovich's Work of 1939 // Ibid. — P. 264–265.

Kantorovich Leonid Vital'evich // Who's who in the USSR, 1961–1962. — Montreal, 1962. — P. 313–314. — Bibliogr.: 4 ref.

Zauberthau A. Ревизионизм в советской экономической теории // Ревизионизм: под ред. Л. Лебедеца. — Лондон, 1962. — С. 268–280.

### 1963

Вирченко М., Максимова Т., Кардаш В. Оптимальное планирование — в сельское хозяйство // За науку в Сибири. — 1963. — 18 окт.

Колмогоров А. Н. Выступление на методологическом семинаре МГУ 25.05.1961 г. // Проблемы оптимального планирования. — М., 1963. [см. также 1991].

Котов И. В. Применение математических методов в экономике и политическая экономия социализма // Применение математики в экономике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. — Вып. 3. — С. 3–26.

Котов И. В., Серебряков Б. Г. Закон стоимости и цены оптимального плана // Там же. — С. 27–48.

Математико-экономические методы и модели: Применение математических методов и электронно-вычислительных машин в планировании и технико-экономических задачах: Библиографический указатель. Июнь 1963 г. — дек. 1966 г. — Л., 1968. — С. 9–10, 15, 53, 90, 104, 159, 223, 260.

Молчанов В. Кибернетика — помощник хлебороба // Правда. — 1963. — 20 ноября.

Новожилов В. В. К дискуссии о принципах планового ценообразования // Применение математики в экономике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. — Вып. 1. — С. 46–56.

Новожилов В. В. Спорные вопросы применения метода вспомогательных множителей в планировании // Экономико-математические методы. — М.: Наука, 1963. — Вып. 1.

Barrière R. P. Préface à l'éditoin française // Kantorovitch L. V. Calcul — économique et 'utilisation des ressources. — Paris, 1963. — P. VIII–XVI. — (Finance et économie appliquée; Vol. 15).

Dantzig G. B. Linear programming and extensions. — Princeton, New Jersey, 1963. — P. 12–13, 22–23, 65, 299.

Mycielski J., Rey K., Trzeciakowski W. Decomposition and Optimization of Short-run Planning in a Planned Economy // Structural Interdependence and Economic Development / ed. T. Barna. — London: MacMillan & Co., 1963.

Nove A. The Changing Role of Soviet Prices // Economic of Planning (Oslo). — 1963. — № 3.

### 1964

Аганбегян А. Г. Оптимальное планирование и управление народным хозяйством // За науку в Сибири. — 1964. — 6 апр.

Аганбегян А., Вайнштейн А., Олейник Ю. Первооткрыватели // Правда. — 1964. — 22 апр. [см. также 2004].

Барсов А. С. Линейное программирование в технико-экономических задачах. — М., 1964. — С. 7.

Воробьев Н., Корбут А. Математическая экономика [Выдвинуты на соискание Ленинской премии] // Ленингр. правда. — 1964. — 12 апр.

Выступления на конференции «Круглого стола» «Кибернетика, планирование и социальная система», организованной журналами «USSR. Soviet life today», «Вопросы экономики» и «Экономической газетой» в редакции журнала «Вопросы экономики», март 1964 г. Кр. излож.: // «Cybernetics, Economic Planning and the Social System. The Round Table Conference». — USSR. Soviet life today. — 1964. — Sept. — P. 8-17; ВЭ. — 1964. — № 9. — С. 63-110; Экономическая газета. — 1964. — № 16.

Высшее военное инженерно-техническое краснознаменное училище (исторический очерк) 1939-1964. — Л.: ВВИТКУ, 1964. — С. 10, 11, 26, 49, 60.: портр.

Колганов М. Политическая экономия и математика // ВЭ. — 1964. — № 12. — С. 111-125.

Математико-экономические методы и модели: Применение математических методов и электронно-вычислительных машин в технико-экономических вопросах: Библиографический указатель. — М.; Л., 1964. — (С. 11, 15, 16, 18, 20, 26, 43, 48, 72, 73, 87, 141).

Новожилов В. В. Математический анализ социалистической экономики как важнейший фактор роста производительных сил // Планирование и экономико-математические методы. — М.: Наука, 1964.

Bornstein Morris. The soviet price reform discussion // Quart. J. Economics. — 1964. — Vol. LXXVIII, N 1. — P. 15-48.

Dobb M. Some Further Comments on the Discussion About Socialist Price Policy // On Political Economy and Econometrics: Essays in Honor of O. Lange. — Warszawa, 1964.

Kantorovich Leonid Vitalievich // Who's who in Soviet science and technology. — 2nd ed., rev. and enl. — New York, 1964. — P. 86.

## 1965

«За» и «Против» — сравните доводы! // Экономическая газета. — 1965. — 10 марта. — С. 9-10. [см. также 2004].

Кац А. О так называемой «народнохозяйственной себестоимости» // ВЭ. — 1965. — № 2.

Келдыш М. В. Лауреаты Ленинской премии 1965 года // Вестн. АН СССР. — 1965. — № 5. — С. 4-5, 6: портр.

Котов И. В. Некоторые вопросы применения математических методов в экономике и политическая экономика социализма // ВЭ. — 1965. — № 11. — С. 99-111.

Л. В. Канторович, В. С. Немчинов, В. В. Новожилов — лауреаты Ленинской премии 1965 г. // ЭММ. — 1965. — Т. 1, № 3. — С. 463-465.

Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели. — 2-е изд., перераб. и доп. — М., 1965. — С. 77-78, 301, 372, 438.

Новые академики в семье советских математиков // Математика и современность. — 1965. — № 6. — С. 87-89. — (на эст. яз.)

Скотникова М. Рец. на статью: Канторович Л. На основе математических методов. 1965 // Вычислительная и оргтехника в строительстве и проектировании. — 1965. — Вып. 5. — С. 42.

Соболев С. Л. Математика, кибернетика, практика // Лит. газета. — 1965. — 10 апр.

Тихомиров Ю. М. 25 лет линейного программирования // ЭММ. — 1965. — Т. 1, № 1. — С. 146-147.

Присуждение Ленинских премий за работы в области математики // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. XX, вып. 4 (124). — С. 221.

Экономисты и математики за «Круглым столом»: [Выступления на конференции «Круглого стола» «Кибернетика, планирование и социальная система», организованной журналами «USSR. Soviet life today», «Вопросы экономики» и «Экономической газетой» в редакции журнала «Вопросы экономики», март 1964 г.]. — М.: АПН, 1965. — 207 с.

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: [Курс высшей математики и математической физики. Вып. 3]. — М.: Наука, 1965. — С. 395, 406-412.

New Light on Russian Economics. Рец.: Kantorovich L. The Best Use of Economic Resources. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1965; The Use of Mathematics in Economics. — Edinburgh; London, 1964; The Economist. — 1965. — July 3. — P. 42.

*Nove A.* The Soviet Economy. — London: George Allen & Unwin Ltd, 1965. — 356 p. — (P. 217, 224, 232, 233, 255, 290–293, 295, 298, 312).

Pro and Con — Compare conclusions: пер. на англ. // Problems of economics. — 1965. — Vol. VIII, N 5. — P. 16–22.

## 1966

*Вайнштейн Альб. Л.* Возникновение и развитие применения линейного программирования в СССР: К 25-летию линейного программирования // Экономико-математические методы. — М., 1966. — Вып. 3: Экономико-математические модели народного хозяйства. — С. 9–40: рис. — Библиогр.: 47 назв.

*Виноградов В.* Земля, вода и математика: [Значение математических работ Л. В. Канторовича и П. Я. Кочиной для решения ирригационных проблем] // Сибирские огни. — 1966. — № 9. — С. 114–119.

*Данциг Дж.* Линейное программирование, его применения и обобщения: пер. с англ. — М., 1966. — С. 29–30, 69, 295.

*Дидерихс Ф., Корбут А.* Математическая экономика // Научно-технические общества СССР. — 1966. — № 2. — С. 19–21: рис.

[К присуждению Л. В. Канторовичу Ленинской премии 1965 г. за работы в области математической экономики] // Один раз в жизни: О лауреатах Ленинской премии 1965 года. — [М., 1966]. — С. 59–60: портр.

*Мицкевич А.* Экономические проблемы и математика // Там же. — С. 72–75.

*Лурье А. Л.* Абстрактная модель оптимального хозяйственного процесса и объективно обусловленные оценки // ЭММ. — 1966. — Т. 2, вып. 1. — С. 12–30.

Питер Темпест рассказывает о Сибири // Советская Сибирь. — 1966. — 30 окт.

[Список трудов Л. В. Канторовича] // Мировая математика за 10 лет (1953–1963). — М., 1966. — Т. 1. — С. 271.

*Сыроеждин И.* Ответ дает математика // Ленингр. правда. — 1966. — 27 янв.

*Bell D.* The “End of Ideology” in the USSR // Marxist Ideology in Contemporary World. Its Appeal and Paradoxes. — New York, 1966.

*Dobb Maurice.* Kantorovich on optimal planning and prices. Рец.: The best use of economic resources. Harvard Univ. Press. 1965 // Science and Society. — N 1. — P. 186–202.

*Johansen L.* Soviet mathematical economics // Inst. of economics University of Oslo, 1966. — Reprint series N 28 (Reprinted from “The economic journal”, London, 1966).

*Johansen L.* Some problems of pricing and optimal choice of factor proportions in a dynamic setting // Proc. of European Meeting of the Econometric Society, Warsaw, Sept. 1966.

*Johansen L.* Prissystemets Rolle i de flsteuropeiske Land // Statshonomiek Tidskrift. — 1966.

SOAN La ruche de la science // France — URSS magazine. — 1966. — N 235, jnr. — P. 16–21.

Soviet Economic Performance and Reform: Some Problems of Analysis and Prognosis // Slavic Rev. — 1966. — Vol. 25, N 2.

*Tempest P.* Science plans the best use of their vast resources // Morning Star. — 1966. — 12 July.: портр.

## 1967

*Аганбегян А. Г.* Коммунистическая убежденность и экономика // За науку в Сибири. — 1967. — 16 мая.

*Вирченко М. И., Пузанова Г. Г.* О возможностях применения объективно обусловленных оценок в экономических исследованиях // ВЭ. — 1967. — № 2. — С. 111–121.

*Католин Лев.* Кибернетические путешествия. — М.: Знание, 1967. — С. 147–178.

Леонид Витальевич Канторович // Наука и человечество: Международный ежегодник, 1967. — М., 1967. — С. 346: портр.

Лурье А. Л. Оптимальные оценки и норма эффективности // ЭММ. — 1967. — Т. 3, вып. 2. — С. 171–185.

Новожилов В. В. Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. — М.: Экономика, 1967. — 376 с.

Терехов Л. Л. Оценки в оптимальном плане. — М.: Экономика, 1967. — 133 с.

Fels E., Tintner G. Mathematical economics in the Soviet Union // Communist Affairs. — 1967. — Vol. 5. — P. 3–8.

Johansen L. Some problems of planning and optimal choice of factor proportions in a dynamic setting // Univ. Oslo. Institute of Economics, 1967. — Reprint Series № 33. — P. 131–152.

Johansen L. Review of L. V. Kantorovich: The Best Use of Economic Resources // Econ. J. — 1967.

Kantorovich Leonid Vitaliyevich // The International who's who [31 — 49 ed.: 1967–1986]. — London, 1967–1987.

Zauberman A. Aspects of Planometrics. — London: The Athlone Press, 1967. (Univ. London.)

### 1968

Дискуссия об оптимальном планировании / Сост.: Л. Я. Казакевич и Л. В. Левшин. — М.: Экономика, 1968. — 192 с.

История отечественной математики. — Киев, 1968. — Т. 3. — С. 24, 72–74, 100, 109, 110, 129, 131, 169–170, 172, 173, 180, 181, 365, 533, 576, 585, 641, 646, 655, 662, 678, 686: портр.

Кац А. И. Динамический экономический оптимум. Т. 1: Критерий динамического оптимума. Кр. излож. // ИМЭМО. — М., 1968 (ДСП).

Немчинов В. С. Избранные произведения. — М.: Наука, 1968. — Т. 5: Планирование и народнохозяйственные балансы. — (С. 231, 233, 315).

Соболев С. Л. Мосты математики // Неделя. — 1968. — № 29. — 14 июля. — С. 2–3.

Черников С. Н. Линейные неравенства. — М., 1968. — С. 15, 366, 367.

Kantorovich Leonid Vitalevich // Prominent personalities in the USSR. — Metuchen, New Jersey, 1968. — P. 235. — Bibliogr.: 4 ref.

Kantorovich Leonid Vitalyevich // World who's who in science: A biographical dictionary of notable scientists from antiquity to the present. — 1st ed. — Chicago, 1968. — P. 905.

### 1969

Глобенко И. Г. Об одной модели Л. В. Канторовича // Изв. вузов. Математика. — 1969. — № 4. — С. 14–16.

Канторович Леонид Витальевич // Математика в СССР, 1958–1967. — М., 1969. — Т. 2: Биобиблиография. Вып. 1. А — Л. — С. 568–569.

Лурье А. Л. О расчетах нормы эффективности и об однопродуктовой модели народного хозяйства // ЭММ. — 1969. — Т. 5, вып. 3. — С. 366–394.

Немчинов В. С. Избранные произведения. — М.: Наука, 1969. — Т. 6: Общественная стоимость и плановая цена. — (С. 100–102, 157, 159, 310, 363, 365, 366, 382–384, 405, 440).

Немчук Т. Экономист и математика // Пути в неизвестное: Писатели рассказывают о науке. — М., 1969. — Сб. 7. — С. 60–61, 66–67.

Dančo J. Predslov k slovensk — mu vydaniu // Kantorovič L. V. Optima — alne vyu — itie sdrojov. — Bratislava, 1969. — S. 7–12.

Pro and Con — Compare Conclusions: пер. на англ. // Contemporary Soviet Economics, Vol. I. — New York: International Arts and Sciences Press, 1969.

### 1970

Аганбегян А. Г. Через три столетия — к истине: [О «техн. кибернетике»] // За науку в Сибири. — 1970. — 3 июня: портр.

Вертейм Б. А. Оптимальное чередование основного и модифицированного процессов Ньютона — Канторовича // Оптимальное планирование. — Новосибирск, 1970. — Т. 17. — С. 10–31.



Вуллх Б. З. Функциональный анализ // Математика в Петербургском — Ленинградском университете: под ред. акад. В. И. Смирнова. — Л., 1970. — С. 112–133.

Романовский И. В. Работы по оптимальному программированию // Там же. — С. 261–267.

Иванов Ю. «Магистралы» экономики [о симпозиуме в Новосибирске по моделированию народного хозяйства] // Советская Сибирь. — 1970. — 1 июля.

История отечественной математики. — Киев, 1970. — Т. 4, кн. 2. — (С. 64–68, 86, 115, 116, 121, 123, 133, 134, 142, 146–149, 247, 335, 355, 357, 388, 389, 401, 402, 404, 506, 508, 529, 542, 580).

Лурье А. Л. О формулах для расчета нормы эффективности: [Замечания по статье Л. В. Канторовича и Альб. Вайнштейна «Еще об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства». 1970] // ЭММ. — 1970. — Т. 6, вып. 3. — С. 416–421. — Библиогр.: 4 назв.

Финн Э. А. ЭВМ на службе земледелия. — М.: Знание, 1970. — 48 с.

Рубинштейн Г. Ш. Конечные модели оптимизации: курс лекций. — Новосибирск, 1970. — С. 8.

Kantorovich Leonid Vitalyevich // Dictionary of international biography. 1971. — London, [1970]. — Pt 1. — P. 606.

## 1971

Леонид Витальевич Канторович: (К шестидесятилетию со дня рождения) // Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1971. — Вып. 3. — С. 7–9, 1 л. портр. — Посвящается Л. В. Канторовичу в связи с его шестидесятилетием.

Макаров В. Л., Рубинштейн Г. Ш. О вкладе Л. В. Канторовича в развитие экономической науки // Там же. — С. 10–13.

Judy R. W. The Economists // Interest Groups in Soviet Politics / H. G. Skilling and F. Griffiths (eds.). — Chapter VII. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.

## 1972

Вуллх Б. З., Гавурин М. К., Колмогоров А. Н., Линник Ю. В., Макаров В. Л., Митягин Б. С., Пинскер А. Г., Рубинштейн Г. Ш., Фаддеев Д. К. Леонид Витальевич Канторович: К шестидесятилетию со дня рождения // Успехи мат. наук. — 1972. — Т. 27, вып. 3. — С. 221–227, 1 л. портр. — Библиография: «Список печатных работ Л. В. Канторовича»: С. 225–227.

Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения: Посвящается Л. В. Канторовичу в связи с его шестидесятилетием // Там же. — С. 128–176. — Библиогр.: 124 назв.

Котов И. В. Основная задача производственного планирования как экономико-математическая модель народного хозяйства (модель Л. В. Канторовича): Закон стоимости и (объективно обусловленные оценки оптимального плана // Котов И. В. Применение математических методов в экономике и политическая экономия социализма. — Л., 1972. — С. 85–126.

К шестидесятилетию академика Л. В. Канторовича // Сиб. мат. журн. — 1972. — Т. 13, № 1. — С. 3–5: портр.

[Леониду Витальевичу Канторовичу — 60 лет] // Вестн. АН СССР. — 1972. — № 5. — С. 129: портр.

Леониду Витальевичу Канторовичу — 60 лет // ЭММ. — 1972. — Т. 8, № 1. — С. 3–6: портр.

Новожиллов В. В. Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. — М.: Наука, 1972.

Новожиллов В. В. Вопросы развития социалистической экономики. — М.: Наука, 1972.

Chambre H. Introduction // Économie mathématique en URSS. — Paris, 1972. — P. 1–2. — (Cah. de l'ISEA. Sér. G; N 30. Écon. et soc.; Vol. 6, N 1).

Zauberman A. La planification optimale. Recent advances in Soviet mathematical economics // Ibid. — P. 11–45.

## 1973

*Амельченко В. В., Бурмистров Е. Ф., Крысько В. А.* О численном исследовании сходимости метода Канторовича — Власова для гибких оболочек // Прикладная механика. — 1973. — Т. 9, вып. 12 — С. 15–21: рис., табл. — Библиогр.: 8 назв.

*Кроль А. П.* Решение термоупругой задачи для цилиндра с меридиональными фланцами методом Л. В. Канторовича // Энергомашиностроение. — 1973. — № 4. — С. 45–48: рис. — Библиогр.: 3 назв.

*Лурье А. Л.* Экономический анализ моделей планирования социалистического хозяйства. — М., 1973. — С. 41, 73.

*Лурье А. Л., Нут И. В.* Экономико-математическое моделирование социалистического хозяйства. — М., 1973. — С. 5, 52, 53.

*Островитянов К. В.* Избранные труды. — М., 1973. — Т. 2: Вопросы политической экономики социализма. — С. 371–378.

*Ellman M.* Planning Problems in the USSR. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.

Kantorovich Leonid Vitalyevich // Who's who in the world. — 2nd ed. — 1974–1975. — Chicago, [1973]. — P. 512.

## 1974

*Архангельский А.* О методах расчета транспортных затрат: [Рец. на ст.: Канторович Л. В., Журавель А. Роль транспортного фактора при размещении производства. 1974] // ВЭ. — 1974. — № 6. — С. 116–119.

*Асеев В. А.* Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. — Л., 1974. — С. 137–144.

*Гурвич Ф. Г.* Экономико-математическое направление: Этапы развития: (По страницам журнала «Экономика и математические методы») // Наука и жизнь. — 1974. — № 4. — С. 54–55.

Действительные члены АН СССР: (Отделение экономики) // ЭКО. — 1974. — № 2. — С. 39: портр.

*Кочина П. Я.* Воспоминания. — М., 1974. — С. 47, 190–193.

Математико-экономическое отделение // Институт математики Сибирского отделения Академии наук СССР: крат. справ. — Новосибирск, 1974. — С. 34–40.

*Пинскер А. Г., Брыжгина Э. Ф.* Основы оптимального программирования. — Л., 1974. — С. 3, 55, 80, 93, 96.

*Федоренко Н. П.* О создании и развитии советской экономико-математической науки // ЭММ. — 1974. — Т. X, вып. 3.

## 1975

[Выступления Э. Маленво (Франция), Н. Н. Моисеева, Г. Сепегина в прениях по докладу Л. В. Канторовича и В. Л. Макарова «Модели роста и их использование в долгосрочном планировании и прогнозировании»] // Долгосрочное планирование и прогнозирование: Материалы конференции Международной экономической ассоциации, Москва, дек. 1972 г. — М., 1975. — С. 409–415.

*Овсиенко Ю. В.* По экономике — Л. В. Канторович и Т. Купманс: [Лауреаты Нобелевской премии 1975 г.] // Природа. — 1975. — № 12. — С. 112–113.

Признание нашей науки // Комсомольская правда. — 1975. — 30 дек.

[Присуждение Л. Канторовичу и Т. Купмансу Нобелевской премии 1975 г. по экономическим наукам] // Известия. — 1975. — 17 сент. — Моск. веч. вып.; Моск. правда. — 1975. — 18 сент.; Соц. индустрия. — 1975. — 19 сент.

*Bokare M. G.* Kantorovich: Nobel Laureate in Economics // Mainstream, New Delhi. — 1975. — Dec. 6. — P. 25–28.

*Eichler B., Bukovsky K.* Lineární programování: PRO III. R. SEŠ. — Praha, 1975. — S. 42.

L. V. Kantorovic a T. C. Koopmans laureaty Nobelovy ceny // Ekonomicko-matematicky obzor. — Academia Nakladatelství Českosloveské Akademie Ved. — 1975. — Ročník 12. — P. 74–76.

Nobel Laureate in Economics // New York Times. — 1975. — October 15.

Nobel Laureate in Economics // Science. — 1975. — November 14.

*Tintner G.* Nobelpreise in Wirtschaftswissenschaften 1975 // Wirtschafts politische blatter. — 1975. — 22 Jahr.

*Zauberman A.* The mathematical revolution in Soviet economics. Vol. 1 and 2. — London: Oxford Univ. Press, 1975. — 61 p.

## 1976

Академик Л. В. Канторович и профессор Т. Купманс — лауреаты Нобелевской премии 1975 г. по экономике // ЭММ. — 1976. — Т. 12, вып. 2. — С. 408–410.

*Гурвич Ф. Г.* В поисках оптимального варианта // Наука и жизнь. — 1976. — № 4. — С. 70–75: ил.

*Гурвич Ф. Г.* Поиск оптимума // Химия и жизнь. — 1976. — № 3. — С. 42–45: портр.

*Лазовский В.* С чего начиналось сотрудничество // За науку в Сибири. — 1976. — 25 нояб.

*Леонтьев А. П.* Новые лауреаты Нобелевской премии по экономике // ЭКО. — 1976. — № 3. — С. 120–123: портр.

Нобелевская премия академику Л. В. Канторовичу // Вестн. АН СССР. — 1976. — № 3. — С. 126–127: портр.

*Шепелев Г. И.* Об улучшении использования оптимизационных расчетов в АСУ отраслей народного хозяйства // ЭММ. — 1976. — Т. XV, вып. 2. — С. 416–418.

[Присуждение акад. Л. В. Канторовичу и проф. Т. Купмансу (США) Нобелевской премии 1975 г. по экономике] // Zinätne un Technika. — 1976. — № 5. — С. 13. — (на латыш. яз.)

[Autobiography]: Kantorovich Leonid V. // Les Prix Nobel en 1975. — Stockholm, 1976. — P. 261–264: portr. [см. также 1987, 1998, 2004].

*Bentzel R.* The prize for economic science in memory of Alfred Nobel // Ibid. — P. 256–257. [см. также 2002].

*Johansen L. L. V.* Kantorovich's contribution to economics // Scand. J. Econ. — 1976. — Vol. 78, N 1. — P. 61–80. — Bibliogr.: P. 78–80.

Mystery of missing Russian [о присуждении почетной степени Л. В. Канторовичу и об отсутствии Я. Б. Зельдовича на церемонии] // Cambridge Evening News. — 1976. — 10 July.

*Tintner G., Peek P.* Marginalism and linear economics East and West // History of Political Economy. — 1976. — Vol. 8, N 3.

*Smolinski L. L. V.* Kantorovich and Optimal Planning // Essays in optimal planning. Selected Works with an Introduction by L. Smolinski. — New York: Int. Arts and Sc. Press Inc., 1976. — P. ix–xxxii.

*Zauberman A.* Mathematical Theory in Soviet Planning. — London: Oxford Univ. Press, 1976. — 463 p.

*Ulman X. P.* “Abweicher” Kantorowitsch // Nou Fréiheit Ztg., Österreich. — 1976. — 29 Mai.

## 1977

*Аганбегян А. Г.* Развитие экономических исследований // Изв. СО АН СССР. Серия общественных наук. — 1977. — Т. 6, вып. 2.

*Вулик Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах: учеб. пособие. — Калинин, 1977. — С. 5, 73.

*Геронимус Б. Л.* Экономико-математические методы в планировании на автомобильном транспорте. — М., 1977.

Леонид Витальевич Канторович // Наука и человечество: Международный ежегодник, 1977. — М., 1976. — С. 278: портр.

*Мухачева Э. А., Рубинштейн Г. Ш.* Математическое программирование: [Учебное пособие для студентов высших учебных заведений]. — Новосибирск, 1977.

*Федоренко Н. П.* О людях, математике и экономике // Академики рассказывают: Ученые о достижениях советской науки. — М., 1977. — (Эврика).

*Федоренко Н. П.* Применение математических методов в исследовании экономических процессов // 250 лет Академии наук СССР: Документы и материалы юбилейных торжеств. — М., 1977. — С. 501–502.

*Nove A., Nuty D. M.* Teoria economica del socialismo. — Mexico, Banco de Mexico, S.A., Fondo de cultura economica, 1977. — Serie de Lecturas, Vol. 23.

*Panne C. van de, Rahmana F.* The first algorithm for linear programming: an analysis of Kantorovich's method. — The University of Calgary. Discussion papers series. — 1977. — N 45.

### 1978

Алгебра и начала анализа: учеб. пособие для 10 классов средней школы / под ред. А. Н. Колмогорова. — 3-е изд. — М., 1978. — С. 160–161.

*Гранберг А. Г.* Математические модели социалистической экономики: Общие принципы моделирования и статистические модели народного хозяйства: [Учебное пособие для вузов по специальности «Экономическая кибернетика»]. — М., 1978. — С. 24–25.

*Мотидзукэ К.* Цена стоимости и система разрешающих множителей Л. В. Канторовича // Материалы 11 Советско-японского симпозиума ученых-экономистов, Москва, 28 нояб. — 1 дек. 1977 г.: (Сокр. стеногр.). — М., 1978. — Ч. 2. — С. 270–288.

*Katsenelinboigen A.* Political dilemma in science work // J. Post Keynesian Economics. — Winter 1978–79. — Vol. 1, N 2. [см. также 1997].

### 1979

*Аганбегян А. Г.* Управление социалистическими предприятиями: Вопросы теории и практики. — М., 1979. — С. 137, 155–160.

*Бухвалов А. В., Векслер А. И., Лозановский Г. Я.* Банаховы решетки — некоторые банаховы аспекты теории // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 2 (206). — С. 137–183.

Исследование операций. — 2-е изд., перераб. и доп. — Киев, 1979. — С. 150.

Канторович Леонид Витальевич // Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. — Киев, 1979. — С. 225–226.

*Каргаедов Р. Г.* Хозрасчет, эффективность и прибыль: (Очерки теории). — Новосибирск, 1979. — С. 268–269.

*Карасев М. В., Маслов В. П.* Квазиклассические солитонные решения уравнения Хартри: Ньютоновское взаимодействие с экранировкой // Теоретическая и математическая физика. — 1979. — Т. 40, № 2. — С. 242.

*Лаврентьев М. А.* Опыты жизни. 50 лет в науке // ЭКО. — № 7–12. — 1979; № 1–6. — 1980. (№ 11, С. 174; № 12, С. 158, 160; № 1, С. 152; № 2, С. 147).

*Левин В. И., Милотин А. А.* Задача о перемещении масс с разрывной функцией стоимости и массовая постановка проблемы двойственности выпуклых экстремальных задач // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 3 (207). — С. 3–67.

*Ляпунов А. А.* Вопросы теории множеств и теорий функций. — М., 1979. — С. 86, 201.

*Моисеев Н. Н.* Математика ставит эксперимент. — М., 1979. — С. 148.

*Новиков П. С.* Избранные труды: Теория множеств и функций: Мат. логика и алгебра. — М., 1979. — С. 97–98, 103.

Объективно обусловленные (оптимальные) оценки (о. о. оценки) // Лопатников Л. И. Краткий экономико-математический словарь. — М., 1979. — С. 177–179.

Пассажирский транспорт — на уровень современных задач // Советская Латвия. — 1979. — 31 мая.

*Spate Ehre.* Die Nobelpreisträger in Wirtschaftswissenschaft, II // Finanz und Wirtschaft. — 1979. — Nr. 35, 9 Mai.

### 1980

Авторитет научной школы: [О вручении Л. В. Канторовичу диплома иностранного члена Югославской академии наук и искусств] // Известия. — 1980. — 18 февр.

Габдуллаев Б. Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. — Казань, 1980. — С. 6–7, 38, 197.

Гапоненко Л. П. Метод типа Канторовича — Зейделя для решения нелинейных интегральных уравнений // Численные методы анализа: (Прикладная математика). — Иркутск, 1980. — С. 64–78. — Библиогр.: 7 назв.

Герт В. П., Тарасов О. В., Ширков Д. В. Аналитические вычисления на машинах в приложениях к физике и математике // Успехи физ. наук. — 1980. — Т. 130, № 1. — С. 113–147.

Казакевич Д. М. Очерки теории социалистической экономики. — Новосибирск, 1980. — С. 130, 132, 143, 144, 147, 159.

Кириченко В. Ф., Крысько В. А. К вопросу о решении нелинейных краевых задач методом Канторовича — Власова // Дифференциальные уравнения. — 1980. — Т. 16, № 12. — С. 2186–2189. — Библиогр.: 6 назв.

Курчатов В. А., Арсланов Ф. Х. О теореме Л. В. Канторовича для класса методов линеаризации приближенного решения функциональных уравнений // Изв. вузов. Математика. — 1980. — № 11. — С. 56–59. — Библиогр.: 6 назв.

Лаврентьев М. ...Прирастать будет Сибирию. — М., 1980. — С. 48, 51–52. — (Эврика).

Марчук Г. И. Молодым о науке. — М., 1980. — С. 43–44.

Оптимизация функционирования социалистической экономики: (Учебное пособие для вузов по специальности «Экономическая кибернетика»). — М., 1980. — С. 112, 219, 222, 224.

Ames E. Kantorovich and Production Planning // World Communism at the Crossroads. — Boston, 1980.

Kadner M. Stets auch lernend fur die Wissenschaft: [Interview] // Ostsee-Ztg. — 1980. — 26–27 Jan. — Portr.

Katsenelinboigen A. Soviet Economic Thought and Political Power in the USSR. — New York, 1980.

## 1981

Абрамов Л. М., Капустин В. Ф. Математическое программирование. — Л., 1981. — С. 76, 86.

Академик Леонид Витальевич Канторович: К семидесятилетию со дня рождения // Сиб. мат. журн. — 1981. — Т. 22, № 6. — С. 3–6, 1 л. портр.

Алгебра и начала анализа: учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы / под ред. А. Н. Колмогорова. — 2-е изд. — М., 1981. — С. 244.

Каценелинбойген А. Нужны ли в СССР Дон Кихоты — (Л. В. Канторович: ученый и человек. Его противоречия) // СССР. Внутренние противоречия. Вып. 2. — New York: Chalidze Publication, 1981.

Математико-экономические методы и модели: библиогр. указ. 1967–1973 гг. — Л., 1981. — С. 8, 55, 174, 177, 180, 188.

## 1982

Автобиография Леонида Витальевича Канторовича: пер. с англ. // Проблемы выпуклого анализа и теории экстремальных задач: сб. науч. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1982. — С. 50–57. — (Оптимизация; [Вып.] 28. Посвящается Л. В. Канторовичу в связи с его семидесятилетием). — Ротапр. [см. также 1976, 1998, 2004].

Булавский В. А. Оценки факторов и проблемы выбора // Там же. — С. 70–73.

Васильев В. А. Об одном классе операторов в пространстве регулярных функций множества // Там же. — С. 102–111.

Вершик А. М., Черняков А. Г. Поля выпуклых многогранников и оптимум по Парето — Семейлу // Там же. — С. 112–145.

Вирченко М. И. Л. В. Канторович и экономика // Там же. — С. 66–69.

Залгаллер В. А. О встречах с Л. В. Канторовичем // Там же. — С. 58–61.

Кутателадзе С. С. Об одном признаке гильбертова пространства // Там же. — С. 146–147.

*Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Рубинштейн Г. Ш.* Академик Леонид Витальевич Канторович: (К семидесятилетию со дня рождения) // Там же. — С. 5–28.

*Петрова Л. Т.* О программировании: [Воспоминания о работе по освоению ЭВМ в 1950-е годы под руководством Л. В. Канторовича] // Там же. — С. 62–65.

Список работ Л. В. Канторовича // Там же. — С. 29–49.

*Аганбегян А. Г.* Роль Л. В. Канторовича в развитии экономической науки // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 6. — С. 188–190.

*Кутателадзе С. С.* О математических работах Л. В. Канторовича // Там же. — С. 190–191.

*Макаров В. Л.* О вкладе Л. В. Канторовича в математическую экономику // Там же. — С. 190.

Академику Л. В. Канторовичу — 70 лет // Вестн. АН СССР. — 1982. — № 6. — С. 141: портр.

Академику Леониду Витальевичу Канторовичу — 70 лет // ЭММ. — 1982. — № 2. — С. 382–383.

*Александров А. Д., Гавурин М. К., Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Рубинштейн Г. Ш., Соболев С. Л., Фаддеев Д. К.* Леонид Витальевич Канторович: (К семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1982. — Т. 37, вып. 3. — С. 201–208, 1 л. портр. — Библиогр. «Список научных трудов Л. В. Канторовича»: С. 206–208.

*Бородин А. И.* Канторович Леонид Витальевич // Бородин А. И. Советские математики. — 2-е изд., перераб. и доп. — Киев, 1982. — С. 41–42.

*Владимиров Д. А., Гавурин М. К., Мысовский И. П.* Леонид Витальевич Канторович: (К 70-летию со дня рождения) // Вестн. ЛГУ. — 1982. — № 1. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 1. — С. 130–131: портр.

*Колмогоров А. Н., Залгаллер В. А.* Леонид Витальевич Канторович: (К 70-летию со дня рождения) // Математика в школе. — 1982. — № 2. — С. 77–78: портр. [см. также 1998].

К семидесятилетию академика Л. В. Канторовича // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1982. — № 1. — С. 213.

К семидесятилетию Леонида Витальевича Канторовича // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 5. — С. 160.

К юбилею академика Л. В. Канторовича // За науку в Сибири. — 1982. — 11 февр. — С. 7.

Канторович Леонид Витальевич // Академия наук СССР: Сибирское отделение: Персональный состав, 1957–1982: Действительные члены: Члены-корреспонденты. — Новосибирск, 1982. — С. 27: портр. — (СО АН СССР. 25 лет).

Конференция по пассажирскому транспорту // Ленингр. правда. — 1982. — 1 июля.

*Макаров В. Л.* Леонид Витальевич Канторович — выдающийся экономист современности: (К 70-летию со дня рождения) // ЭКО. — 1982. — № 1. — С. 145–150: ил.

Чествование Леонида Витальевича Канторовича: [К 70-летию со дня рождения] // ЭММ. — 1982. — Т. 18, вып. 4. — С. 741–743.

*Bos H. C.* Introductory remarks: [L. V. Kantorovich] // Current developments in the interface: Economics, econometrics, mathematics. — Dordrecht, Holland etc., 1982. — P. 197–199.

Kantorovich Leonid Vitalevich // Who's who in the Soviet Union. — München etc., 1984. — P. 138. — Bibliogr.: 5 ref.

*Korte Bernhard.* Mathematical programming activities in the USSR // Optima. — 1982. — N 6.

Stets auf der Suche nach Wegen, sein Wissen praktisch anzuwenden (Über die Zusammenarbeit hallescher Wissenschaftler mit Akademiemitglied Prof. Leonid Kantorowitsch) // Universitäts Zeitung (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg). — 1982. — May 6.

### 1983

*Боголюбов А. Н.* Канторович Леонид Витальевич // Боголюбов А. Н. Математики, механики: Биогр. справочник. — Киев, 1983. — С. 204–205: портр.

### 1984

*Васильев В.* Равновесие и оптимальное планирование // За науку в Сибири. — 1984. — 15 нояб.

[Л. В. Канторович] // Гедеванишвили Л. Д. Нобелевская премия и ее лауреаты. — Тбилиси, 1984. — С. 70–78, 126–128: портр. — (на груз. яз.). Рез.: рус.

*Майминас Е.* К истории и перспективам развития экономико-математических исследований в СССР // Проблемы планирования и прогнозирования. — М.: Наука, 1984.

*Рвачев С. Т.* Задача Монжа — Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике // Теория вероятностей и ее применения. — 1984. — Т. XXIX, вып. 4. — С. 625–653.

*Gaetano D.* L'economia Sovietica: Uno Squardo Dall'Interno. — Milano, 1984.

*Sutela P.* Socialism, Planning and Optimality. — Helsinki, 1984.

## 1985

*Станис Л. Я.* Рец. на кн.: Философско-методологические основания системных исследований: (Систем, анализ и систем, моделирование). 1983 // Научные доклады высшей школы. Философские науки. — 1985. — № 2. — С. 174.

*Янкулин В.* Открытие для Фанерного треста: О человеке, придумавшем мощный аппарат рационализации экономики // Лит. газ. — 1985. — 6 февр. — С. 10.

*Brentjes S.* Zur Herausbildung der linearen Optimierung // Ökonomie und Optimierung. — Berlin, 1985. — S. 298–330.

*Shilar H., Schwarz K.* Zur entwicklung des optimalitätsdenkens in der politischen ökonomie und zum zusammenhang von optimalen bewertungen und arbeitswertheorie // Ibid. — S. 195–397.

## 1986

*Аганбегян А. Г., Акилов Г. П., Александров А. Д., Булавский В. А., Вирченко М. И., Гранберг А. Г., Казажевич Д. М., Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Рубинштейн Г. Ш.* Выдающийся советский математик и экономист. Памяти академика Леонида Витальевича Канторовича // За науку в Сибири. — 1986. — 15 мая.

Академик Леонид Витальевич Канторович: [Некролог] // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1986. — № 5. — С. 232; То же // Правда. — 1986. — 10 апр.: портр.

В последний путь: [О похоронах Л. В. Канторовича] // Известия. — 1986. — 11 апр.

*Каценелинбойген А.* К 25-летию выхода в свет книги Л. В. Канторовича — Экономический расчет наилучшего использования ресурсов // СССР. Внутренние противоречия. — Вып. 15. — New York, 1986.

Леонид Витальевич Канторович: [Некролог] // Вестн. АН СССР. — 1986. — № 6. — С. 106–107: портр.

То же // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 8. — С. 176: портр.

Леонид Витальевич Канторович (1912–1986): [Некролог] // Математическое программирование и модели равновесия: сб. науч. тр. — Новосибирск, 1986. — (Оптимизация; Вып. 38); ЭММ. — 1986. — Т. 22, вып. 4. — С. 763–767: портр.

*Мальшев Б.* Памяти Л. В. Канторовича // Мосты и магистрали. — 1986. — 15 апр.

Некролог // Известия. — 1986. — 10 апр.: портр.

Некролог // New York Times. — 1986. — April 11: портр.

*Постышев Л.* Экономическая наука и математическое моделирование // Правда. — 1986. — 19 сент.

*Шалабин В. Г.* Юбилейная конференция в ЛГУ // ЭММ. — 1986. — Т. XXII, вып. 3. — С. 560–562.

## 1987

*Аганбегян А. Г., Александров А. Д., Гавурин М. К., Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Решетняк Ю. Г., Романовский И. В., Рубинштейн Г. Ш., Соболев С. Л., Фаддеев Д. К.* Леонид Витальевич Канторович: [Некролог] // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 2. — С. 177–180: 1 л. портр.

Мой путь в науке: (Предполагавшийся докл. в Моск. мат. о-ве) // Там же. — С. 183–213. — Библиогр.: 113 назв. (См. также 1990, 1996, 1998, 2002).

Список научных трудов Л. В. Канторовича // Там же. — С. 180–182.

Академик Леонид Витальевич Канторович: К 75-летию со дня рождения // Исследования по оптимальному планированию: сб. науч. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1987. — С. 5–6: 1 л. портр. — (Оптимизация; [Вып.] 40).

*Владимиров Д. А.* Работы Л. В. Канторовича по дескриптивной теории множеств и функций // Там же. — С. 7–11. — Библиогр.: 20 назв.

*Залгаллер В. А., Мухачева Э. А.* Развитие математических методов оптимизации раскроя // Там же. — С. 40–45. — Библиогр.: 7 назв.

*Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* О вкладе Л. В. Канторовича в теорию упорядоченных векторных пространств // Там же. — С. 26–39. — Библиогр.: 48 назв.

*Петрова Л. Т.* Комментарий к работам Л. В. Канторовича по крупноблочному программированию // Там же. — С. 12–16. — Библиогр.: 9 назв. [см. также 1998, 2004].

*Фет Я. И.* Об исследованиях Л. В. Канторовича в области архитектуры вычислительных машин // Там же. — С. 17–25. — Библиогр.: 24 назв.

*Акилов Г. П.* Он стрелял по невидимым целям // ЭКО. — 1987. — № 1. — С. 93–97 [см. также 1998, 2002].

Выдающийся советский математик и экономист // Там же. — С. 72: портр.

*Казакевич Д. М.* Новое направление в экономической науке // Там же. — С. 73–77.

*Макаров В. Л.* Глубокий исследователь // Там же. — С. 77–78.

*Петраков Н. Я.* Бескомпромиссный боец // Там же. — С. 84–85.

*Рубинштейн Г. Ш., Кутателадзе С. С.* В судьбе Леонида Витальевича проявилась историческая закономерность . . . : [Беседа] // Там же. — С. 86–92.

Леонид Витальевич Канторович (1912–1986): [Некролог] // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 1. — С. 3–6: 1 л. портр.

*Абасов Н. М., Кусраев А. Г.* Циклическая компактификация и пространства непрерывных вектор-функций: Посвящается светлой памяти Леонида Витальевича Канторовича // Там же. — С. 17–22. — Библиогр.: 14 назв.

*Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Оператор Максвелла в областях с негладкой границей: Светлой памяти дорогого учителя Леонида Витальевича Канторовича // Там же. — С. 23–36. — Библиогр.: 13 назв.

*Кутателадзе С. С.* О топологических понятиях, близких к непрерывности: Светлой памяти Леонида Витальевича Канторовича посвящаю // Там же. — С. 149–156. — Библиогр.: 9 назв.

*Макаров В. М.* Устойчиво регулярные операторы и единственность операторных идеалов с локально безусловной структурой: Посвящается памяти Леонида Витальевича Канторовича // Там же. — С. 157–162.

*Жиянов В. И., Кругликов А. Г.* Памяти академика Л. В. Канторовича // Моделирование роста и научно-технического прогресса в экономических системах. — М., 1987. — С. 5–9. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9). — Библиогр.: 7 назв.

*Лажман И. Л.* Заседание, посвященное 75-летию академика Л. В. Канторовича: [19 янв. 1987 г.] // ЭММ. — 1987. — Т. 23, вып. 4. — С. 757–758.

*Макаров В. Л.* О динамических моделях экономики и развитии идей Л. В. Канторовича: К 75-летию со дня рождения академика Л. В. Канторовича // ЭММ. — 1987. — Т. 23, вып. 1. — С. 10–24. — Библиогр.: 28 назв.

*Паенсон Н. В.* Памяти Леонида Витальевича Канторовича // Проблемы совершенствования системы транспортных тарифов: [Сб. ст.]. — М.: ЦЭМИ, 1987. — С. 5–10. — Светлой памяти Леонида Витальевича Канторовича посвящается.

Список работ академика Л. В. Канторовича, связанных с транспортными проблемами и проблемами совершенствования методологии построения цен и тарифов [43 назв.] // Там же. — С. 50–53.

*Казакевич Д. М.* Новое направление в экономической науке // Мосты и магистрали. — 1987. — 7 апр.

*Никулин В.* Достижения фундаментальных наук — производству. — М., 1987. — С. 16–17.

*Makarov V. Kantorovich Leonid Vitalievich* // The New Palgrave. A dictionary of economics. — 1987. — Vol. 3. — P. 14–15.



My journey in science (Supposed report to the Moscow Mathematical Society): пер. на англ. // Russian Math.l Surveys. — 1987. — Vol. 42, N 2. (См. также 1990, 1996, 1998, 2002).

Nobel Prize Winners. An H. W. Wilson Biographical Dictionary. — New York: The H. W. Wilson Company, 1987.

Silver Medal // J. Operational Res. Soc. — 1987. — Vol. 38, N 9. — P. 869–871. [см. также 1990].

### 1988

*Лившиц В. Н., Паенсон Н. В.* Памяти Леонида Витальевича Канторовича // Городской пассажирский транспорт: Материалы Всесоюзной конференции — Совершенствование системы пассажирских сообщений крупных городов и агломераций, Ленинград, 1–3 апр. 1986 г. — Л., 1988. — С. 260–267.

*Юдин Д. Б., Цой Э. В.* Отношение Канторовича и задачи обобщенного математического программирования // ЭММ. — 1988. — Т. 24, вып. 5. — С. 884–889.

*Янкуллин В.* Открытие для Фанерного треста: О человеке, придумавшем мощный аппарат рационализации экономики // Мир профессий: Человек: Знаковая система: Говорят изображения, схемы, карты, электронные помощники. — М., 1988. — С. 150–160.

*Gardner Roy.* The Resolving multipliers of L. V. Kantorovich // Mimio. — Indiana Univ., 1988.

### 1989

*Аганбегян А. Г., Казакевич Д. М.* Открытие на стыке математической и экономической наук и его значение для решения проблем современной экономики // Экономико-математические модели и методы: сб. науч. тр. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1989. — С. 26–33.

*Шилар Х.* Оптимизация и политическая экономия // Там же. — С. 33–39.

*Васильева Е. М., Лившиц В. Н.* Работы Л. В. Канторовича в области сетевых транспортных задач и развитие его идей в СССР // Там же. — С. 39–57. — Библиогр.: 42 назв.

*Белья А. А.* История советских экономико-математических исследований. — Л., 1989.

Леонид Витальевич Канторович. 1912–1986 // Материалы к библиографии ученых СССР. Серия математических наук, вып. 18. Составители Н. С. Дворцина и И. А. Махрова. Авторы вступительной статьи В. Л. Макаров, С. С. Кутателадзе, Г. Ш. Рубинштейн. — М.: Наука, 1989.

*Лившиц В. Н., Олейник Ю. А., Паенсон Н. В., Тихомиров Е. Ф.* Об академике Леониде Витальевиче Канторовиче // Канторович Л. В. Проблемы эффективности использования и развития транспорта. — М., 1989. — С. 7–14.

Хронологический указатель основных работ Л. В. Канторовича в области экономики, экономико-математических методов и экономики транспорта // Там же. — С. 289–302.

*Романовский И. В.* 50 лет: «Математические методы организации и планирования производства» Л. В. Канторовича // Памятные книжные даты. — М.: Книга, 1989. — С. 64–66.

*Gardner R. L. V.* Kantorovich: From Optimal Planning to Perestroika. — Bloomington, 1989.

### 1990

*Белья А. А.* О восприятии экономических работ Л. В. Канторовича на Западе // ЭММ. — 1990. — Т. 26, вып. 2. — С. 238–247.

*Белья А. А.* История советских экономико-математических исследований (1917 — начало 60-х годов). — Л., 1990.

*Брентъес С.* К истории возникновения линейного программирования: пер. с немецк. // Канторович Л. В. и др. Экономика и оптимизация. — М.: Наука, 1990. — С. 222–246. [см. также 1985].

*Шилар Х., Шварц Л.* Развитие оптимизационного мышления в политической экономии и связь оптимальных оценок и трудовой теории стоимости: пер. с немецк. // Там же. — С. 140–221. [см. также 1985].

*Gardner Roy.* L. V. Kantorovich: The Price Implications of Optimal Planning // J. Economic Literature. — 1990. — Vol. XXVIII. — P. 638–648.

*Leifman L.* From the editor // Functional Analysis, Optimization and Mathematical Economics. A Collection of Papers Dedicated to the Memory of Leonid Vital'evich Kantorovich. — New York; Oxford: Oxford Univ. Press, 1990. — P. ix–xi.

*Leontief W.* Foreword // Ibid. — P. v. [см. также 2004].

*Makarov V. L., Sobolev S. L.* Academician L. V. Kantorovich (19 January 1912 to 7 April 1986) // Ibid. — P. 1–7.

My journey in science (Supposed report to the Moscow Mathematical Society): пер. на англ. // Ibid. — P. 8–45 [см. также 1987, 1996, 2002].

Silver medal // Ibid. — P. 46–48. [см. также 1987].

*Fet Ya. I.* On L. V. Kantorovich's research in the field of computer architecture // Ibid. — P. 49–55.

### 1991

*Аганбегян А. Г., Акилов Г. П., Александров А. Д., Булавский В. А., Вирченко М. И., Гранберг А. Г., Казакевич Д. М., Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Рубинштейн Г. Ш.* Выдающийся советский математик и экономист // Оптимизация [К 80-летию академика Л. В. Канторовича. Часть I]. — Новосибирск: ИМ СО АН, 1991. — Вып. 50 (67). — С. 7–15. [см. также 1986].

*Вирченко М. И.* Предисловие // Там же. — С. 5–6.

Выступления Боярского А. Я., Колмогорова А. Н., Каца А. И., Валландера С. В., Вирченко М. И., Вага Л. А., Смергина А. А. на методологическом семинаре МГУ 25.05.1961 г. // Там же. — С. 88–116.

*Гельфанд И. М.* О работах Л. В. Канторовича: пер. с англ. // Там же. — С. 131–136. [см. также 1996, 1998, 2002].

*Горстка А. Б.* Базис и надстройка, или о роли стимулов при обучении // Там же. — С. 141–142.

*Кутателадзе С. С.* Четыре математических съезда в жизни Л. В. Канторовича // Там же. — С. 136–140.

Леонид Канторович (Leonid Kantorovich) // Экономическая школа. Вып. 1. — Л., 1991. — С. 226–228.

*Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Strijver A (eds.)*. History of Mathematical Programming. — North-Holland: Amsterdam, 1991.

### 1992

*Вирченко М. И.* Идеи Л. В. Канторовича по проблемам ренты в сельском хозяйстве и их развитие // Оптимизация [К 80-летию академика Л. В. Канторовича. Часть II]. — Новосибирск: ИМ СО АН, 1992. — Вып. 51 (68). — С. 145–155.

Лауреаты Нобелевской премии. Энциклопедия: А — Л: пер. с англ. — М.: Прогресс, 1992. — С. 502–504.

*Кемпбелл Р.* Маркс, Канторович, Новожилов: Стоимость против реальности: пер. с англ. // ЭММ. — 1992. — Т. 28, вып. 5–6. [см. также 1961].

### 1996

*Игнатъев М.* 40 лет секции кибернетики Дома ученых // Ведомости СПб. — 1996. — 22 нояб.

*Капустин В. Ф., Шалабин Г. В.* Л. В. Канторович и экономико-математические исследования: итоги, проблемы, перспективы // Вестн. СПбГУ. — 1996. — Сер. 5, вып. 2 (№ 12).

Biochronology of L. V. Kantorovich // L. V. Kantorovich. Selected Works [Classics of soviet mathematics. Vol. 3]. Part 1: Descriptive Theory of Sets and Functions. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces / Ed. by S. S. Kutateladze. — London: Gordon and Breach, 1996. — P. 13–16.

*Gelfand I. M.* Leonid Kantorovich and the synthesis of two cultures // Ibid. — P. 7–9. [см. также 1991, 1998, 200].

*Kutateladze S. S.* Editor's preface // Ibid. — P. 5–6.

*Kutateladze S. S.* The message of L. V. Kantorovich // Ibid. — P. 11–12.

My path in science (Supposed report to the Moscow Mathematical Society) // Ibid. — P. 17–54. [см. также 1987, 1990, 1998, 2002].

*Kutateladze S. S., Romanovsky I. V.* Editor's preface // Ibid. Part 2: Applied Functional Analysis. Approximation Methods and Computers / Ed. by S. S. Kutateladze and I. V. Romanovsky. — P. 3–5.

### 1997

*Каценеленбойген А. Л.* В. Канторович. Политическая дилемма в научной деятельности: пер. с англ. // ЭММ. — 1997. — Т. 33, вып. 3. — С. 31–42. [см. также 1978].

Нобелевский лауреат из Сибири // Наука в Сибири. — 1997. — № 1, янв.

### 1998

Автобиография Леонида Витальевича Канторовича: пер. с англ. // Очерки по истории информатики в России: сост.: Д. А. Поспелов и Я. И. Фет. — Новосибирск, 1998. — С. 506–511. [см. также 1976, 1982, 2004].

*Акилов Г. П.* Он стрелял по невидимым целям // Там же. — С. 456–459. [см. также 1987, 2002].

*Гельфанд И. М.* Леонид Канторович и синтез двух культур: пер. с англ., 1990 // Там же. — С. 460–462. [см. также 1991, 1996, 2002].

*Залгаллер В. А.* Воспоминания о Л. В. Канторовиче и об эмоциях, связанных с его экономическими работами // Там же. — С. 449–456.

*Колмогоров А. Н., Залгаллер В. А.* Леонид Витальевич Канторович // Там же. — С. 512–514. [см. также 1982].

Мой путь в науке (фрагменты) // Там же. — С. 417–428. — Библиогр.: 28 назв. [см. также 1987, 1990, 1996, 2002].

*Петрова Л. Т.* Комментарий к работам Л. В. Канторовича по крупноблочному программированию // Там же. — С. 446–449. [см. также 1987, 2004].

### 1999

*Бухвалов А. В., Дмитриев А. Л.* Л. В. Канторович и шестой курс экономического факультета ЛГУ в 1959 году в русле становления экономической науки в России // Петербургская Академия наук в истории академий мира. К 275-летию Академии наук. Материалы международной конференции. Том IV. — СПб., 1999. — С. 208–223. [см. также 2004].

Леонид Витальевич Канторович. [Подборка документов и писем]: Из истории экономической мысли // ЭММ. — Т. 35, вып. 1. — С. 25–42. [см. также 2004].

*Тихомиров В. М.* Письма до востребования (письма А. Н. Колмогорова П. С. Александрову, 1942 г.) // Вестн. РАН. — 1999. — Т. 69, № 3. — С. 243–255.

### 2000

К 40-летию первого научного совещания по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании // ЭММ. — 2000. — Т. 35, вып. 2. — С. 28–40.

*Орлова Т. Т.* Транспортная задача (история создания) // Транспортные проблемы Сибирского региона: сб. тр. ИрИИТА. — Иркутск, 2000. — С. 64–73.

### 2001

*Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Эвристический принцип Л. В. Канторовича // Сиб. журн. индустр. мат. — 2001. — Т. 4, № 2. — С. 18–28.

*Кутателадзе С. С., Макаров В. Л., Романовский И. В., Рубинштейн Г. Ш.* Научное наследие Л. В. Канторовича (1912–1986) // Там же. — С. 3–17.

## 2002

Леонид Витальевич Канторович: Человек и ученый: в 2 т. / Редакторы-составители В. Л. Канторович, С. С. Кутателадзе, Я. И. Фет. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, фил. «Гео», 2002. — Т. 1. — 544 с., ил. 48 с.

*Аганбегян А. Г.* Учитель, ученый, человек // Там же. — С. 115–125.

*Акилов Г. П.* Он стрелял по невидимым целям // Там же. — С. 126–129. [см. также 1987, 1998].

*Амбарцумян В. А., Соболев С. Л.* Письмо Президенту АН СССР А. Н. Несмеянову [О применении математических методов в экономической науке и планировании] (1957) // Там же. — С. 494–496.

*Бентзель Р. (Bentzel R.)*. Премия по экономическим наукам памяти Альфреда Нобеля: пер. с англ. [Речь на церемонии вручения премии] // Там же. — С. 526–527. [см. также 1976].

*Бирман М. Ш., Гавурин М. К., Залгаллер В. А., Крылов В. И., Мысовский И. П., Рубинштейн Г. Ш.* Выступления на заседании Ленинградского математического общества, посвященного 75-летию Л. В. Канторовича (27.01.1987 г.) // Там же. — С. 97–114.

*Вершик А. М.* О Л. В. Канторовиче и линейном программировании // Там же. — С. 130–152.

*Владимиров В. С., Кублановская В. Н.* Вычисления для атомного проекта // Там же. — С. 153–160.

*Гельфанд И. М.* Леонид Канторович и синтез двух культур: пер. с англ., 1990 // Там же. — С. 161–163. [см. также 1991, 1996, 1998].

*Вершик А. М., Залгаллер В. А., Фет Я. И.* Его главная идея // Там же. — С. 164–171.

*Канторович В. Л., Кутателадзе С. С., Фет Я. И.* От составителей // Там же. — С. 3–7.

*Канторович И. Н.* Дядя Леня // Там же. — С. 172–176.

*Кутателадзе С. С.* Пространства Канторовича // Там же. — С. 177–181.

*Леонтьев В. В.* Памяти Канторовича: пер. с англ. // Там же. — С. 182–183. [см. также 1990].

*Лившиц В. Н.* Воспоминания о Леониде Витальевиче Канторовиче // Там же. — С. 184–190.

*Михлин С. Г.* Воспоминания // Там же. — С. 191–198.

Мой путь в науке // Там же. — С. 15–17. [см. также 1938].

Мой путь в науке: (Предполагавшийся докл. в Моск. мат. о-ве) // Там же. — С. 22–75. Библиогр.: 112 назв. [см. также 1987, 1991, 1996, 1998 (фрагменты)].

*Натансон Г. И.* Несколько эпизодов, связанных с Леонидом Витальевичем // Там же. — С. 199–202.

*Новиков С. П.* Выступление на Новодевичьем кладбище 10 апреля 1986 г. // Там же. — С. 203–204.

*Орлова Т. Т.* ЭЛВЭ // Там же. — С. 205–212.

Ответы на вопросы Сони Брентъес // Там же. — С. 18–21.

*Петраков Н. Я.* Творец, умевший быть борцом // Там же. — С. 213–215.

*Тихомиров В. М.* О Леониде Витальевиче Канторовиче (1912–1986) // Там же. — С. 216–220.

*Фаддеев Д. К.* Со студенческих лет // Там же. — С. 221–225.

*Чесноков С. В.* Леонид Витальевич Канторович: штрихи к портрету // Там же. — С. 226–230.

*Васильев В. А., Вирченко М. И., Шестакова Н. В., Шмырев В. И.* Вспоминая Леонида Витальевича Канторовича. К 90-летию нобелевского лауреата из Сибири // Наука в Сибири. — 2002. — № 2 (янв.). — С. 5.

*Дмитриев А. Л., Иванова Е. А.* К 90-летию со дня рождения Л. В. Канторовича // Экономическая наука современной России. — 2002. — № 3. — С. 124–127.

*Курсаев А. Г., Кутателадзе С. С.* Л. В. Канторович и наука об управлении // Дарьял. — 2002. — № 3. — С. 203–227.

*Курсаев А. Г., Кутателадзе С. С.* Числа и пространства Л. В. Канторовича // Владикавказский мат. журн. — 2002. — Т. 1, вып. 1.

Леонид Витальевич Канторович. 1912–1986 // Библиографический указатель: ред. С. С. Кутателадзе. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002.

Решетняк Ю. Г., Кутателадзе С. С. Письмо Н. Н. Лузина Л. В. Канторовичу // Вестн. РАН. — 2002. — Т. 72, № 8. — С. 740–742.

### 2003

Бухвалов В. А. Л. В. Канторович как теоретик менеджмента. К 90-летию со дня рождения Нобелевского лауреата по экономике Л. В. Канторовича // Российский журнал менеджмента. — 2003. — № 2. — С. 141–150.

Вершик А. М. Выступление на заседании Ленинградского математического общества, посвященного 75-летию Л. В. Канторовича (27.01.1987 г.) // История информатики в России: Ученые и их школы / сост.: В. Н. Захаров, Р. И. Подловченко, Я. И. Фет. — М.: Наука, 2003. — С. 52–56.

Канторович В. Л. Леонид Витальевич Канторович // Там же. — С. 46–50.

Кряжев И., Певзнер С. Математик пришел в цех // Там же. — С. 52–55. [См. также 1949].

Залгаллер В. А. О замечательном человеке — Леониде Витальевиче Канторовиче (1912–1986) // Вестник Online. — 2003. — № 17 (328). — 20 авг.

### 2004

Вершик А. М. Метрика Канторовича: Начальная история и малоизвестные применения // Теория представлений, динамические системы. XI. Специальный выпуск. — СПб., 2004. — С. 69–85. — (Зап. науч. семина. ПОМИ, Т. 312).

Канторович В. Л. Несколько фактов, связанных с публикуемыми работами Л. В. Канторовича // Там же. — С. 17–23.

Кутателадзе С. С. Слово о Л. В. Канторовиче // Там же. — С. 24–29.

Меньшиков С. М. Актуальность экономической модели Л. В. Канторовича в наше время // Там же. — С. 30–46.

Мухачева Э. А., Мухачева А. С. Л. В. Канторович и задачи раскрыя-упаковки: Новые подходы для решения комбинаторных задач линейного раскрыя и прямоугольной упаковки // Там же. — С. 239–255.

Романовский И. В. О программистских работах Л. В. Канторовича с сегодняшней точки зрения // Там же. — С. 47–54.

Леонид Витальевич Канторович: Человек и ученый: в 2 т. / Редакторы-составители В. Л. Канторович, С. С. Кутателадзе, Я. И. Фет. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, фил. «Гео», 2004. — Т. 2. — 613 с., ил. 40 с.

Автобиография Леонида Витальевича Канторовича: пер с англ. // Там же. — С. 13–20. [см. также 1976, 1982, 1998].

Аганбегян А., Вайнштейн А., Олейник Ю. Первооткрыватели // Там же. — С. 328–329. [см. также 1964].

Боярский А. Я., Кронрод Я. А. Письмо в газету «Известия» по поводу книги Л. В. Канторовича «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» (1964) // Там же. — С. 331–333.

Вайнштейн А. Л., Олейник Ю. А. Возражения на письмо А. Боярского и Я. Кронрода в газету — Известия — (1964) // Там же. — С. 337–343.

Бухвалов А. В., Дмитриев А. Л. Л. В. Канторович и шестой курс экономического факультета ЛГУ в 1959 году в русле становления экономической науки в России (фрагменты) // Там же. — С. 86–90. [см. также 1999].

Вайнштейн А. Л., Ляпунов А. А., Соболев С. Л. Отзыв о научных работах и научной деятельности члена-корреспондента АН СССР Леонида Витальевича Канторовича (1962): [Выдвижение в академики] // Там же. — С. 280–285.

Вознесенский А. А., Вайнштейн О. Л., Фихтенгольц Г. М. Характеристика профессора Л. В. Канторовича (11.05.1943): [Выдвижение в чл.-кор. АН] // Там же. — С. 266.

Вулик Б. З., Натансон И. П., Новожилков В. В., Фаддеев Д. К. Отзыв о цикле работ члена-корреспондента АН СССР Л. В. Канторовича по линейному программированию (1960): [Выдвижение на Ленинскую премию] // Там же. — С. 280–285.

«За» и «Против» — сравните доводы! // Там же. — С. 355–362. [см. также 1965].

Кемпбелл Р. Рец.: Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов: пер. с англ. // Там же. — С. 384–386. [см. также 1960].

Климено К. И. Отзыв о работе Л. В. Канторовича «Экономический расчет наиболее целесообразного использования ресурсов» (1957) // Там же. — С. 273–274.

Колмогоров А. Н., Ляпунов А. А., Марков А. А. Выступления на Научном совещании по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании 4–8 апреля 1960 г. // Там же. — С. 143–147.

Колмогоров А. Н. Письмо Президенту АН СССР А. Н. Несмеянову: [О книге Л. В. Канторовича «Экономический расчет наиболее целесообразного использования ресурсов»] (1957) // Там же. — С. 270–271.

Колмогоров А. Н. По поводу письма А. Я. Боярского [в Комитет по Ленинским премиям], содержащего критику работ Л. В. Канторовича (1964) // Там же. — С. 334–336.

Купманс Т. Заметка о работе Канторовича «Математические методы организации и планирования производства»: пер. с англ. // Там же. — С. 382–384. [см. также 1960, 1990].

Лукомский Я. И., Лурье А. Л. Отзыв о работе Л. В. Канторовича «Экономический расчет наиболее целесообразного использования ресурсов» (1957) // Там же. — С. 271–272.

Люстерник Л. А. Отзыв о цикле работ Л. В. Канторовича по «Приложениям функционального анализа в прикладном анализе»: [Выдвижение на Сталинскую премию за 1948 г.] // Там же. — С. 317–324.

Петрова Л. Т. Комментарий к работам Л. В. Канторовича по крупноблочному программированию // Там же. — С. 52–55. [см. также 1987, 1998].

Работы молодых ученых // Там же. — С. 265. [см. также 1938].

Рао (Rao C. R.) Речь [на церемонии присуждения Л. В. Канторовичу почетной степени доктора наук (Honoris Causa) Индийского статистического института] (07.02.1978): пер. с англ. // Там же. — С. 413–415.

Смирнов В. И., Фихтенгольц Г. М. Отзыв о научной и педагогической деятельности Л. В. Канторовича (02.11.1932) // Там же. — С. 261.

Смирнов В. И. Отзыв о работах члена-корреспондента АН СССР Л. В. Канторовича (28.05.1962): [Выдвижение в академики] // Там же. — С. 290–292.

Славентатор Д. Созвездие молодых // Там же. — С. 263–264. [см. также 1934].

Соболев С. Л. Отзыв о научных работах члена-корреспондента АН СССР Л. В. Канторовича (1964): [Выдвижение в академики] // Там же. — С. 293–295.

Фихтенгольц Г. М. Отзыв о Л. В. Канторовиче (16.04.1930) // Там же. — С. 259–260.

Фихтенгольц Г. М. Письмо в Ученый совет факультета математики и механики [Ленинградского университета]: [Выдвижение в чл.-кор. АН] (30.05.1946) // Там же. — С. 267–268.

Фихтенгольц Г. М. Отзыв о работах проф. Л. В. Канторовича по «Приложениям функционального анализа в прикладном анализе» (16.02.1948): [Выдвижение на премию ЛГУ за 1947 г.] // Там же. — С. 317–321.

Иванов А. А., Залгаллер В. А., Мостепаненко М. В., Сыроеждин И. М. Письмо участников методологического семинара ЛОМИ в ЦК КПСС, тов. М. А. Сулову (Копия в редакцию журнала «Коммунист»): [По поводу статьи Л. Гатовского и М. Сакова в журнале «Коммунист»] (1961) // Там же. — С. 175–182.

Боярский А. Я., Мстиславский П. С., Помалов И., Хорунжий Л. А. Ответ журнала «Коммунист» [на письмо ЛОМИ в ЦК] (10.05.1961) // Там же. — С. 183–191.

Академики — Струмилин С., Островитянов К., чл.-кор. АН — Плотников К., Пашков А., Хачатуров Т., Дьяченко В., д.э.н. — Боярский А. и др. В плену теоретических ошибок: [Письмо в газету «Правда» о недопустимости выдвижения книги Л. В. Канторовича «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» на Ленинскую премию] (1964) // Там же. — С. 348–351.

Ляпунов А. А., Соболев С. Л. Математика и экономика: [Письмо в газету «Правда» — ответ на письмо С. Струмилина и др.] (1964) // Там же. — С. 351–355.

Петрашень Г. И. Ответ ЛОМИ на запрос Комитета по Ленинским премиям (1964) // Там же. — С. 341–343.

[Коллективное] Письмо научных сотрудников Института экономики АН СССР в Комитет по Ленинским премиям [с поддержкой кандидатур Канторовича, Немчинова и Новожилова] (1964) // Там же. — С. 343–348.

**2005**

*Романовский И. В.* Разумное обобщение дает больше, чем детальное исследование // Знаменитые универсанты. Очерки о питомцах Санкт-Петербургского университета. Т. III. — Л., 2005. — С. 459–474.

**2006**

*Кутателадзе С. С.* Линейное программирование и  $K$ -пространства // Сиб. журн. индустр. математики. — 2007. — Т. 10, № 1. — С. 115–119.

**2007**

*Кутателадзе С. С.* Феномен Канторовича // Сиб. мат. журн. — 2007. — Т. 48, № 1. — С. 3–4.

*Решетняк Ю. Г.* Слово о Леониде Витальевиче Канторовиче // ИМ СО РАН. — С. 1–8. — Препр. № 186.

*Кутателадзе С. С.* О математических работах Канторовича // Там же. — С. 8–13.

## Список авторов

- Абасов Н.М. 1987  
Абрамов Л.М. 1981  
Аганбегян А.Г. 1964(2), 1967, 1970, 1977, 1979, 1982, 1986, 1987, 1989, 1991, 2002, 2004  
Акилов Г.П. 1962, 1986, 1987, 1991, 1998, 2002  
Александров А.Д. 1982, 1986, 1987, 1991  
Александров П.С. 1999  
Амбарцумян В.А. 2002  
Амельченко В.В. 1973  
Арсланов Ф.Х. 1980  
Архангельский А. 1974  
Асеев В.А. 1974  
**Барсов А.С.** 1964  
Белянкин А. 1940  
Белых А.А. 1989, 1990(2)  
Бирман И.Я. 1960  
Бирман М.Ш. 1987, 2002  
Боголюбов А.Н. 1983  
Боев Г.П. 1951  
Бородин А.И. 1979, 1982  
Боярский А.Я. 1960, 1961, 1962(2), 1964, 1991, 2004(3)  
Брыжина Э.Ф. 1974  
Булавский В.А. 1960, 1982, 1986, 1991  
Бурмистров Е.Ф. 1973  
Бухвалов А.В. 1979, 1999, 2003  
**Вааг Л.А.** 1991  
Вайнштейн А.Л. 1964, 1966, 2004(3)  
Вайнштейн О.Л. 2004  
Валландер С.В. 1991  
Васильев В.А. 1982, 1984, 2002  
Васильева Е.М. 1989  
Векслер А.И. 1979  
Вертгейм Б.А. 1970  
Вершик А.М. 1982, 2002(2), 2004  
Виноградов В. 1966  
Вирченко М.И. 1963, 1967, 1982, 1986, 1991(3), 1992, 2002  
Владимиров В.С. 2002  
Владимиров Д.А. 1982, 1987  
Вознесенский А.А. 2004  
Воробьев Н.Н. 1964  
Вулих Б.З. 1962, 1970, 1972, 1977, 2004  
Габдулхаев Б.Г. 1980  
Гавурин М.К. 1962, 1972, 1982(2), 1987, 2002  
Гапоненко Л.П. 1980  
Гатовский Л.М. 1960  
Гедеванишвили Л.Д. 1984  
Гельфанд И.М. (Gelfand I.M.) 1991, 1996, 1998, 2002  
Геронимус Б.Л. 1977  
Герт В.П. 1980  
Герчук Я.П. 1959, 1961(2)  
Глобенко И.Г. 1969  
Горстко А.Б. 1991  
Гранберг А.Г. 1978, 1986, 1991  
Гурвич Ф.Г. 1974, 1976(2)  
Гусев В. 1962  
Дадаян В. 1960  
Дидерихс Ф.Ф. 1966  
Дмитриев А.Л. 1999, 2002  
Дьяченко В.П. 2004  
**Екимов А.А.** 1951  
**Железняк П.** 1960  
Жиянов В.И. 1987  
Залгаллер В.А. 1962, 1982(2), 1987, 1998(2), 2002(2), 2003, 2004  
**Иванов А.А.** 2004  
Иванов Ю. 1970  
Иванова Е.А. 2002  
Игнатьев М. 1996  
**Казакевич Д.М.** 1980, 1986, 1987(2), 1989, 1991  
Казакевич Л.Я. 1968  
Канторович В.Л. 2002, 2003, 2004(2)  
Канторович И.Н. 2002  
Капустин В.Ф. 1981, 1996  
Карагедов Р.Г. 1979  
Карасев М.В. 1979  
Кардаш В.А. 1963  
Католин Лев. 1967  
Кафтанов С. 1949  
Кац А. 1960(2), 1965, 1968, 1991  
Келдыш М.В. 1965  
Кириченко В.Ф. 1980  
Климено К.И. 2004  
Колганов М. 1964



- Колмогоров А.Н. 1957, 1963, 1972, 1978, 1981, 1982, 1991, 1998, 1999, 2004(3)  
Корбут А.А. 1960, 1964, 1966  
Кордемский Б.А. 1952  
Котов И.В. 1963(2), 1965, 1972  
Кочина П.Я. 1974  
Красносельский М.А. 1960  
Кроль А.П. 1973  
Кронрод Я.А. 2004  
Кругликов А.Г. 1987  
Крылов В.И. 2002  
Крысько В.А. 1973, 1980  
Кряжев И. 1949, 2003  
Кублановская В.Н. 2002  
Курчатов В.А. 1980  
Кусраев А.Г. 1987(2), 2001, 2002(2)  
Кутателадзе С.С. (Kutateladze S.S.) 1972, 1982(4), 1986, 1987(4), 1989, 1991(2), 2001(2), 2002(5), 2004(2), 2006, 2007(2)  
Лаврентьев М.А. 1979, 1980  
Лавров В.В. 1940  
Лазовский В. 1976  
Лахман И.Л. 1987  
Левин В.И. 1979  
Левшин Л.В. 1968  
Леонтьев А.П. 1976  
Либерман И.П. 1940  
Лившиц В.Н. 1988, 1989(2), 2002  
Линник Ю.В. 1972  
Лозановский Г.Я. 1979  
Лузин Н.Н. (Lusin Nicolas) 1930, 1953, 1958, 2002  
Лукомский Я.И. 2004  
Лурье А.Л. 1966, 1967, 1969, 1970, 1973(2), 2004  
Люстерник Л.А. 2004  
Ляпунов А.А. 1979, 2004(3)  
Майминас Е. 1984  
Макаров Б.М. 1987  
Макаров В.Л. (Makarov V.L.) 1971, 1972, 1982(4), 1986, 1987(3), 1989, 1990, 1991, 2001  
Мальшев Б. 1986  
Марков А.А. 2004  
Марчук Г.И. 1980  
Маслов В.П. 1979  
Меньшиков С.М. 2004  
Милотин А.А. 1979  
Минц Л.Е. 1961  
Митягин Б.С. 1972  
Михлин С.Г. 1950, 2002  
Мицкевич А. 1966  
Моисеев Н.Н. 1975, 1979  
Молчанов В. 1963  
Мостепаненко М.В. 2004  
Мстиславский П. 1961, 2004  
Мухачева А.С. 2004  
Мухачева Э.А. 1977, 1987, 2004  
Мысовских И.П. 1950, 1982, 2002  
Натансон Г.И. 2002  
Натансон И.П. 1938, 1962, 2004  
Немчинов В.С. 1965, 1968, 1969  
Немчук Т. 1969  
Никулин В. 1987  
Нит И.В. 1973  
Новиков П.С. 1979  
Новиков С.П. 2002  
Новожилов В.В. 1961, 1963(2), 1964, 1967, 1972(2), 2004  
Овсиенко Ю.В. 1975  
Олейник Ю.А. 1964, 1989, 2004(2)  
Орлова Т.Т. (Максимова Т.Т.) 1963, 2000, 2002  
Островитянов К.В. 1962, 1973, 2004  
Паенсон Н.В. 1987, 1988, 1989  
Панов Д.Ю. 1938  
Пашков А.И. 2004  
Певзнер С. 1949, 2003  
Петраков Н.Я. 1987, 2002  
Петрашень Г.И. 1962, 2004  
Петрова Л.Т. 1982, 1987, 1998, 2004  
Пинскер А.Г. 1962, 1972, 1974  
Плотников К.Н. 2004  
Помалов И. 2004  
Постышев Л. 1986  
Пузанова Г.Г. 1967  
Рапопорт Э.О. 1960, 1962  
Рвачев С.Т. 1984  
Решетняк Ю.Г. 1987, 2002, 2007  
Романовский И.В. (Romanovsky J.V.) 1960, 1970, 1987, 1989(2), 1996, 2001, 2004, 2005  
Рубинов А.М. 1972  
Рубинштейн Г.Ш. 1970, 1971, 1972, 1977, 1982(2), 1986, 1987(2), 1989, 1991, 2001, 2002  
Руслаев Н.В. 1952  
Саков М.П. 1960  
Сепегин Г. 1975  
Серебряков Б.Г. 1963  
Скотникова М. 1965  
Славетатор Л. 1934, 2004  
Смергин А.А. 1991  
Смирнов В.И. 1933, 1970, 2004(2)  
Соболев С.Л. (Sobolev S.L.) 1961, 1965, 1968, 1982, 1987, 1990, 2002, 2004(2)  
Солдатов В.Е. 1960, 1962

- Соломяк М.З. 1987  
 Станис Л.Я. 1985  
 Струмилин С.С. 2004  
 Сыроежин И.М. 1966, 2004  
**Т**арасов О.В. 1980  
 Терехов Л.Л. 1967  
 Тихомиров В.М. 1999, 2002  
 Тихомиров Е.Ф. 1989  
 Тихомиров Ю.М. 1965  
**Ф**аддеев Д.К. 1962, 1972, 1982, 1987, 2002, 2004  
 Федоренко Н.П. 1974, 1977(2)  
 Фет Я.И. (Fet Ya.I) 1987, 1990, 1998, 2002(2), 2003, 2004  
 Финн Э.А. 1970  
 Фихтенгольц Г.М. 1949(2), 1951, 2004(5)  
**Х**орунжий Л.А. 2004  
**Ц**ой Э.В. 1988  
**Ч**ерников С.Н. 1968  
 Черняк Ю. 1960  
 Черняков А.Г. 1982  
 Чесноков С.В. 2002  
 Четыркин Е.М. 1959  
 Чечик В.А. 1960  
**Ш**алабин В.Г. 1986, 1996  
 Шепелев Г.И. 1976  
 Шестакова Н.В. 2002  
 Ширков Д.В. 1980  
 Шмырев В.И. 2002  
 Эльсгольц Л.Э. 1952, 1965  
**Ю**дин Д.Б. 1988  
**Я**нкулин В. 1985, 1988  
**A**mes E. 1980  
**B**ell D. 1966  
 Bentzel R. (Бентзель Р.) 1976, 2002  
 Birkhoff G. 1940, 1948  
 Bokare M.G. 1975  
 Bornstein M. 1964  
 Bos H.C. 1982  
 Brentjes S. (Брентъес С.) 1985, 1990  
 Bukovsky K. 1975  
**C**ampbel Robert W. (Кемпбелл Р.У.) 1960, 1961(2), 1992, 2004  
 Chambre H. 1972  
 Charnes A. 1958, 1962  
**D**ančo J. 1969  
 Dantzig G.V. (Данциг Дж.) 1963, 1966  
 Dobb M. 1960, 1964, 1966  
**E**ichler B. 1975  
 Ellman M. 1973  
**F**els E. 1967  
**G**aetano D. 1984  
 Gardner Roy 1988, 1989, 1990  
 Greub W. 1959  
**I**sbell J.H. 1962  
**J**ohansen L. 1966(3), 1967(2), 1976  
 Judy R.W. 1971  
**K**adner M. 1980  
 Katsenelinboigen A. (Каценеленбойген А.) 1977, 1980, 1981, 1986, 1997  
 Koopmans T.C. (Купманс Т.) 1960, 1962, 2004  
 Korte Bernhard 1982  
**L**EIFMAN L. 1990  
 Lenstra J.K. 1991  
 Leontief W. (Леонтьев В.В.) 1959, 1960, 1990, 2002  
**M**alinvaud E. (Маленво Э.) 1975  
 Marlow W.H. 1962  
 Montias G.M. 1960, 1961  
 (Мотидзуки К.) 1978  
 Mucielski J. 1963  
**N**ove A. 1963, 1965, 1977  
 Nuty D.M. 1977  
**P**anne C. van de 1977  
 Peek P. 1976  
**R**ahmana F. 1977  
 Rao C.R. (Рао) 2004  
 Rey K. 1963  
 Rheinboldt W. 1959  
 Rinnooy Kan A.H.G. 1991  
**S**chwarz K. (Шварц К.) 1985, 1990  
 Shilar H. (Шилар Х.) 1985, 1989, 1990  
 Smolinski L. 1976  
 Spate Ehre 1979  
 Strijver A. 1991  
 Sutela P. 1984  
**T**empest P. (Темпест Питер) 1966(2)  
 Tintner G. 1967, 1975, 1976  
 Trzeciakowski W. 1963  
**U**lman H.P. 1976  
**W**ard B. 1960  
**Z**auberman A. 1961, 1962, 1967, 1972, 1975, 1976  
 Zieber Paul 1960

## Хронологический указатель трудов

### 1929

1. Об универсальных функциях // Журн. Ленингр. физ.-мат. о-ва. — 1929. — Т. 2, вып. 2. — С. 13–21.
2. Sur le théorème de M. Vitali // C. R. Séanc. Soc. Sci. Lettres, Varsovie. — 1929. — Т. 22. — P. 142–148.
3. Sur les ensembles projectifs de la deuxième classe // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1929. — Т. 189, N 27. — P. 1233–1235.
4. Sur les suites des fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young // Fund. Math. — 1929. — Т. 13. — P. 178–185.
5. Sur un problème de M. Steinhaus // Fund. Math. — 1929. — Т. 14. — P. 266–270.

Доклад:

- i. Об универсальных функциях. На Ленинградском физико-математическом обществе, весна 1929 г. Оpubл. в [1929, 1].

### 1930

1. О проективных множествах // 1-й Всесоюзный съезд математиков, Харьков, 24–29 июня 1930 г. — Харьков, 1930. — Бюл. № 1. — С. 26–27.
2. То же: 1 // Докл. АН СССР — А. — 1930. — № 21. — С. 563–568.
3. О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна // 1-й Всесоюзный съезд математиков, Харьков, 24–29 июня 1930 г. — Харьков, 1930. — Бюл. № 2. — С. 27–28.
4. То же: 2 // Докл. АН СССР — А. — 1930. — № 22. — С. 595–600.
5. Sur les  $\delta s$ -fonctions de M. Hausdorff // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1930. — Т. 190, N 6. — P. 352–354. — Co-aut.: Livénson E.
6. Sur les ensembles projectifs de M. Luzin // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1930. — Т. 190, N 19. — P. 1113–1115. — Co-aut.: Livénson E.
7. Sur les fonctions du type (A) // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1930. — Т. 190, N 22. — P. 1267–1269.
8. Sur les suites des fonctions presque partout continues // Fund. Math. — 1930. — Т. 16. — P. 25–28.

Доклады:

- i. О проективных множествах. На Московском математическом обществе 1.02.1930 г. Оpubл. в [1929, 3], [5] и [6].
- ii. О проективных совокупностях. На I Всесоюзном съезде математиков, Харьков, 24–29.06.1930 г. Оpubл. в [1], [1929, 3], [5] и [6]. Сообщ.: Тр. Первого Всесоюзного съезда математиков // ОНТИ НКТП — М.; Л., 1936. — С. 16.
- iii. О некоторых разложениях по полиномам в форме С. Н. Бернштейна. Там же. Оpubл. в [2], [3] и [4]. Сообщ.: Там же. — С. 22.

### 1931

1. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. АН СССР. Отд.-ние мат. и естеств. наук. — 1931. — № 8. — С. 1103–1115.
2. Несколько замечаний о приближении к функциям посредством полиномов с целыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Отд.-ние мат. и естеств. наук. — 1931. — № 9. — С. 1163–1168.

## 1932

1. Об обобщенных производных непрерывных функций // *Мат. сб.* — 1932. — Т. 39, вып. 4. — С. 153–170.
2. Sur deux classes des opérations sur les ensembles fermés // *C. R. Séanc. Soc. Sci. Lettres, Varsovie.* — 1932. — Т. 25. — P. 1–7. — Co-aut.: Livénson E.
3. Un exemple d'une fonction semicontinue universelle pour les fonctions continues // *Fund. Math.* — 1932. — Т. 18. — P. 178–181.
4. Memoir on the analytical operations and projective sets. I // *Ibid.* — P. 214–279. — Co-aut.: Livénson E.

## 1933

1. Вариационное исчисление. — Л.: Кубуч, 1933. — 204 с. — Соавт.: Смирнов В. И., Крылов В. И.
2. О некоторых методах построения функции, совершающей конформное отображение // *Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук.* — 1933. — № 2. — С. 229–235.
3. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // *Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук.* — 1933. — № 5. — С. 647–652.
4. О конформном отображении // *Мат. сб.* — 1933. — Т. 40, вып. 3. — С. 294–325.
5. Memoir on the analytical operations and projective sets. II // *Fund. Math.* — 1933. — Т. 20. — P. 54–97. — Co-aut.: Livénson E.

## 1934

1. О конформном отображении многосвязных областей // *Докл. АН СССР.* — 1934. — Т. 2, № 8. — С. 441–445.
2. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // *Докл. АН СССР.* — 1934. — Т. 2, № 9. — С. 532–536.
3. Некоторые теоремы о линейных функционалах // *Докл. АН СССР.* — 1934. — Т. 3, № 5. — С. 307–312. — Соавт.: Фихтенгольд Г. М.
4. Об одном обобщении интеграла Стильтьеса // *Докл. АН СССР.* — 1934. — Т. 4, № 8/9. — С. 417–421.
5. Применение теории интегралов Стильтьеса к расчету балки, лежащей на упругом основании // *Тр. Ленингр. ин-та инженеров пром. стр-ва.* — 1934. — Вып. 1. — С. 17–34.
6. Об общих методах улучшения сходимости в способах приближенного решения граничных задач математической физики // *Тр. Ленингр. ин-та инженеров пром. стр-ва.* — 1934. — Вып. 2 — С. 65–72.
7. Некоторые исправления к моей статье «О конформном отображении» // *Мат. сб.* — 1934. — Т. 41, вып. 1. — С. 179–182.
8. О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей // *Мат. сб.* — 1934. — Т. 41, вып. 2. — С. 235–245.
9. Представление произвольной измеримой функции в виде предела последовательности полиномов // *Мат. сб.* — 1934. — Т. 41, вып. 3. — С. 503–510.
10. Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées // *Studia Math.* — 1934. — Т. 5. — С. 69–98. — Co-aut.: Fichtenholz G. M.

Переводы:

- [2] — Sur une méthode de résolution approchée d'équations différentielles aux dérivées partielles // Там же. — С. 534–536.  
 [3] — Quelques théorèmes sur les fonctionelles linéaires // Там же. — С. 310–312.

Доклады:

- i. О конформном отображении областей. На II Всесоюзном математическом съезде, Ленинград, 24–30.06.1934 г. Опубл. в [1] и [1936, 2]. Сообщ.: Бюллетень II Всесоюзного съезда математиков в Ленинграде, 24–30 июня 1934 г. — Л.: Изд-во АН, 1934. — С. 41.

- ii. О некоторых методах приближенного решения уравнений в частных производных. Там же. Публ. [1933, 3], [2] и [1936, 3]. Сообщ.: Там же. — С. 42.

## 1935

1. О полуупорядоченных линейных пространствах и их применениях в теории линейных операций // Докл. АН СССР. — 1935. — Т. 4, № 1–2. — С. 11–14.
2. О некоторых общих методах распространения пространства Гильберта // Докл. АН СССР. — 1935. — Т. 4, № 3. — С. 115–118.
3. Некоторые частные методы расширения пространства Гильберта // Докл. АН СССР. — 1935. — Т. 4, № 4–5. — С. 163–167.
4. О продолжении семейств линейных функционалов // Докл. АН СССР. — 1935. — Т. 1, № 4. — С. 204–210.
5. Sur un espace des fonctions à variation bornée et la différentiation d'une série terme à terme // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1935. — Т. 201, N 27. — P. 1457–1460.
6. Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen: (Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen erster Art) // Compositio Math. — 1935. — Bd 2, Fasc. 3. — S. 406–416.

Переводы:

[1] — Sur le prologement des fonctionelles linéaires // Там же. — С. 207–210.

[2] — Sur les espaces semi-ordonnés linéaires et leurs applications à la théorie des opérations linéaires // Там же. — С. 14–16.

[3] — Sur quelques méthodes générales de prolongement de l'espace de Hilbert // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1935. — Vol. IV (IX), N 3 (72). — P. 123–126.

[4] — Sur quelques méthodes particulières de prolongement de l'espace de Hilbert // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1935. — Vol. IV (IX), N 4/5 (73/74). — P. 171–175.

Доклады:

- i. О полноте системы функций. На конф. молодых ученых СССР, Москва. Публ. в [6].
- ii. О полуупорядоченных линейных пространствах. На Московск. мат. обществе, ноябрь 1935 г. Публ. в [2].

## 1936

1. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. — Л.; М.: ОНТИ; Гл. ред. общетехн. лит., 1936. — 528 с. — Соавт.: Крылов В. И.
2. О конформном отображении областей // Тр. 2 Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 24–30 июня 1934 г., Т. 2: Секцион. докл. — Л.; М., 1936. — С. 173.
3. О некоторых методах приближенного решения уравнений в частных производных // Там же. — С. 398.
4. К общей теории операций в полуупорядоченных пространствах // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 1, № 7. — С. 271–274.
5. Некоторые теоремы о полуупорядоченных пространствах общего вида // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 2, № 1. — С. 7–10.
6. Основы теории функций вещественного переменного с значениями, принадлежащими полуупорядоченному линейному пространству // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 2, № 9. — С. 359–363.
7. О некоторых классах линейных операций // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 3, № 1. — С. 9–13.
8. Общие формы некоторых классов линейных операций // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 3, № 3. — С. 101–106.
9. Об одном классе функциональных уравнений // Докл. АН СССР. — 1936. — Т. 4, № 5. — С. 211–216.

10. Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1936. — T. 202, N 10. — P. 813–816.
11. Les formes générales des opérations linéaires qui transforment quelques espaces classiques dans un espace semi-ordonné linéaire arbitraire // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1936. — T. 202, N 14. — P. 1251–1253.

Переводы:

- [4] — Sur la théorie générale des opérations dans les espaces semi-ordonnés // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1936. — Vol. I (X), N 7 (84). — P. 283–286.
- [5] — Einige Sätze über halbgeordnete Räume allgemeiner Art // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1936. — Vol. II (XI), N 1 (87). — P. 7–10.
- [6] — The elements of the theory of functions of real variable with values belonging to a semi-ordered space // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1936. — Vol. II (XI), N 9 (95). — P. 365–369.
- [7] — Über einige klassen von linearen operationen // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1936. — Vol. III (XII), N 1 (96). — P. 9–13.
- [8] — Allgemeine formen gewisser klassen von linearen operationen // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1936. — Vol. III (XII), N 3 (98). — P. 101–106.

Доклады:

- i. Эффективные методы в теории конформных отображений. На сессии математической группы АН, Москва, 21–23.03.1936 г. Кратк. излож.: Успехи мат. наук, вып. II. — М.; Л., 1936. — С. 272–274. Опубл. в [1937, 2].
- ii. О полупорядоченных линейных пространствах. Там же. Кратк. излож.: там же. Опубл. в [1937, 3].

### 1937

1. Конформное отображение круга на односвязную область // Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. — М.; Л.: НИИММ ЛГУ, 1937. — Т. 2. — С. 5–17.
2. Эффективные методы в теории конформных отображений // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. — 1937. — № 1. — С. 79–90.
3. О полупорядоченных пространствах // Там же. — С. 91–110.
4. О последовательностях линейных операций // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 14, № 5. — С. 255–259.
5. К проблеме моментов для конечного интервала // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 14, № 9. — С. 531–536.
6. Некоторые теоремы о сходимости почти везде // Там же. — С. 537–540.
7. К проблеме моментов для конечного интервала: [Поправка к статье] // Докл. АН СССР. — 1937. — Т. 16, № 3. — С. 150.
8. О функциональных уравнениях // Учен. зап. ЛГУ. — 1937. — Т. 3, № 7. — С. 24–50.
9. Применение одного метода приближенного решения уравнений в частных производных к решению задачи о кручении призматических стержней // Тр. Ленингр. ин-та инженеров пром. стр-ва. — Вып. 4. — С. 111–112. — Соавт.: Фрумкин П. В.
10. Linéaire halbgeordnete Räume // Mat. сб. — 1937. — Т. 2, вып. 1. — С. 121–168.
11. Sur quelques théorèmes concernant la théorie des ensembles projectifs // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1937. — T. 204, N 7. — P. 466–468. — Co-aut.: Livénson E. M.
12. Sur la representation des opérations linéaires // Compositio Math. — 1937. — T. 5, Fasc. 1. — P. 119–165. — Co-aut.: Vulkh B. Z.

Переводы:

- [4] — On the sequences of linear operations // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1937. — Vol. XIV, N 5. — P. 254–259.
- [5] — On the moment problem for a finite interval // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1937. — Vol. XIV, N 9. — P. 531–537. Correction to the note; Vol. XVI, N 3. — P. 147.

[6] — Some theorems on the almost everywhere convergence // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1937. — Vol. XIV, N 9. — P. 537–540.

Рукописи:

1. Функциональный анализ на основе теории полуупорядоченных пространств. Машинопись, 246 с.
2. О распределении печатной продукции. Оpubл. в [2002, 1]. С. 237–249.

Доклады:

- i. Применение общих теорем о сходимости линейных операций к исследованию сходимости некоторых процессов аппроксимации. На сессии математической группы АН 27–29.03.1937 г., Москва. Сообщ.: Успехи мат. наук, вып. V. М.; Л.: ОНТИ, 1938. — С. 256.
- ii. Теория линейных операций в полуупорядоченных пространствах. На сессии математической группы АН, 27.09.1937 г., Москва. Сообщ.: Там же. — С. 258.

### 1938

1. Теория функций вещественной переменной и функциональный анализ // Математика и естествознание в СССР: Очерки развития мат. и естеств. наук за двадцать лет. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. — С. 20–29. — Соавт.: Фихтенгольц Г. М.
2. Sur la continuité et sur le prolongement des opérations linéaires // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1938. — Т. 206, N 12. — P. 833–835.
3. Sur les fonctionnelles partiellement additives dans les espaces semiordonnés // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1938. — Т. 207, N 26. — P. 1376–1378. — Co-aut.: Pinsker A. G.
4. Sur un théorème de M. N. Dunford // Compositio Math. — 1938. — Т. 5, N 3. — P. 430–432. — Co-aut.: Vulikh B. Z.
5. Мой путь в науке // Ленингр. ун-т. — 1938. — 23 сент.

Доклады:

- i. Экстремальные проблемы, возникающие в производственных задачах. На научной сессии Педагогического института им. Герцена, ноябрь 1938 г. Оpubл. в [1989, 2] по рукописи 1938 г.
- ii. Теория полуупорядоченных множеств. Лекция в Ленингр. Доме науч.-техн. пропаганды 28.11.1938. (Стенограмма в архиве Л. В. Канторовича.)

Рукописи:

1. О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта. Оpubл. [1989, 2].

### 1939

1. Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. — 68 с.
2. О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта: (Рез. докл.). — Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. — 4 с.
3. К теории интегралов Стильтьеса — Римана // Учен. зап. ЛГУ. — 1939. — № 37. Сер. мат. наук, вып. 6. — С. 52–68.
4. The method of successive approximations for functional equations // Acta Math. Stockh. — 1939. — Vol. 71, N 1–2. — P. 63–97.
5. Sur les formes générales des fonctionnelles partiellement additives dans certains espaces semiordonnés // C. R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris. — 1939. — Т. 208, N 2. — P. 72–74. — Co-aut.: Pinsker A. G.
6. Реф.: Пинскер А. Г. О расширении полуупорядоченных пространств (ДАН СССР. 1938. Т. 21, № 1–2. С. 6–10) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 1, вып. 6. — С. 546–547.

7. Реф.: Пинскер А. Г. Аналитическое представление некоторых частично-аддитивных функционалов. (ДАН СССР. 1938. Т. 18, № 7. С. 397–401) // Там же. — С. 547.
8. Реф.: Пинскер А. Г. Об одном функционале в пространстве Hilbert'a (ДАН СССР. 1938. Т. 20, № 6. С. 411–413) // Там же. — С. 547.
9. Реф.: Гавурин М. О  $k$ -кратно-линейных операциях в пространствах Banach'a (ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 9. С. 547–551) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 1–2. — С. 20.
10. Реф.: Явец М. А. Классификация Borel–Young'a элементов полуупорядоченных пространств (Зап. НИИ математики и механики и Харьковск. мат. о-ва. Сер. 4. 1938. Т. 15, вып. 2. С. 35–40) // Там же. — С. 22.
11. Реф.: Пинскер А. Г. О некоторых свойствах расширенных  $k$ -пространств (ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 5. С. 220–224) // Там же. — С. 22.
12. Реф.: Юдин А. Решение двух проблем теории полуупорядоченных пространств (ДАН СССР. 1939. Т. 23, № 5. С. 418–422) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 3. — С. 148.
13. Реф.: Гавурин М. К построению дифференциального и интегрального исчисления в пространствах Banach'a (ДАН СССР. 1939. Т. 22, № 9. С. 552–556) // Там же. — С. 148–149.
14. К общей теории полуупорядоченных пространств. — Принято к печати в 1939 году. — Соавт.: Лоренц Г. Г. — Рукопись на немецком языке. Опубликовано в 2009 году: Zur allgemeinen Theorie der halbgeordneten Räume [On the general theory of semi-ordered spaces] // J. Approx. Theory. — 2009. — Vol. 156, N 1. — P. 28–51. — With Lorentz G.

## Доклады:

- i. О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта. На специальном совещании в ЛГУ, 13.05.1939. Опубл. в [1]. Рез. докл.: Л.: Изд-во ЛГУ, 1939. — 4 с. Опубл. в [2002, 1]. С. 250–252.
- ii. О применении математических методов в вопросах организации строительного производства. На совещании в ЛИИПС, 26.05.1939. Рез. докл.: Л., 1939. — 4 с.
- iii. О математических методах в экономике промышленности. На семинаре в Ленингр. Доме ученых.

## Рефераты:

Пинскер А. Г. О расширении полуупорядоченных пространств (ДАН. 1938. Т. 21, № 1/2. С. 6–10) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 1, вып. 6. — С. 546–547.

Пинскер А. Г. Аналитическое представление некоторых частично-аддитивных функционалов (ДАН. 1938. Т. 18, № 7. С. 397–401) // Там же. — С. 547.

Пинскер А. Г. Об одном функционале в пространстве Hilbert'a (ДАН. 1938. Т. 20, № 6. С. 411–413) // Там же. — С. 547.

Гавурин М. К. О  $k$ -кратно-линейных операциях в пространствах Banach'a (ДАН. 1939. Т. 22, № 9. С. 547–551) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 1/2. — С. 20.

Явец М. А. Классификация Borel–Young'a элементов полуупорядоченных пространств (Зап. НИИ математики и механики и Харьковск. мат. о-ва. Сер. 4. 1938. Т. 15, вып. 2. С. 35–40) // Там же. — С. 22.

Пинскер А. Г. О некоторых свойствах расширенных  $K$ -пространств (ДАН. 1939. Т. 22, № 5. С. 220–224) // Там же. — С. 22.

Юдин А. Решение двух проблем теории полуупорядоченных пространств (ДАН. 1939. Т. 23, № 5. С. 418–422) // Физ.-мат. РЖ. — 1939. — Т. 2, вып. 3. — С. 148.

Гавурин М. К построению дифференциального и интегрального исчисления в пространствах Banach'a (ДАН. 1939. Т. 22, № 9. С. 552–556) // Там же. — С. 148–149.

## Рукописи:

1. Zur allgemeinen theorie der halbgeordneten räume. Машинопись на немецком языке, 38 с. Резюме (К общей теории полуупорядоченных пространств) по-русски, 3 с. Соавт.: Лоренц Г. Р. Принято в печать 21.08.1939 в «Гр. Томск. ун-та». Публ. в [2007, 1].



## 1940

1. Определенные интегралы и ряды Фурье. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1940. — 248 с.
2. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем // Докл. АН СССР. — 1940. — Т. 28, № 3. — С. 212–215.
3. Linear operations in semi-ordered spaces: I // Мат. сб. — 1940. — Т. 7, вып. 2. — С. 209–284.
4. Реф.: Вулих Б. З. О метризации сходимостей в линейных пространствах (ДАН СССР. 1939. Т. 23, № 5. С. 433–437) // Физ.-мат. РЖ. — 1940. — Т. 3, вып. 5. — С. 426–427.
5. Реф.: Вулих Б. З.  $K$ -нормированные пространства (Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена. 1939. Т. 28. Каф. математики. С. 179–224) // Физ.-мат. РЖ. — 1940. — Т. 4, вып. 3. — С. 239.

## Переводы:

[2] — A new method of solving of some classes of extremal problems // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1940. — Vol. XXIX, N 3. — P. 211–214.

## Рефераты:

Вулих Б. З. О метризации сходимостей в линейных пространствах (ДАН. 1939. Т. 23, № 5. С. 433–437) // Физ.-мат. РЖ. — 1940. — Т. 3, вып. 5. — С. 426–427.

Вулих Б. З.  $K$ -нормированные пространства (Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена. 1939. Т. 28. Каф. математики. С. 179–224) // Физ.-мат. РЖ. — 1940. — Т. 4, вып. 3. — С. 239.

## Рукописи:

1. Применение математических методов в вопросах планирования перевозок. Оpubл. в [1949, 2]. Соавт.: Гавурин М. К.
2. Подбор поставов, обеспечивающий максимальный выпуск продукции в заданном ассортименте. Оpubл. в [1949, 6].

## 1941

1. Приближенные методы высшего анализа. — 2-е изд., перераб. — Л.; М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1941. — 618 с. — Соавт.: Крылов В. И.
2. Некоторые замечания о методе Ритца // Тр. Высш. инж.-техн. уч-ща Военно-Морск. флота. — 1941. — Вып. 3. — С. 3–16.
3. О сходимости вариационных процессов // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 30, № 2. — С. 107–111.
4. О сходимости метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Докл. АН СССР. — 1941. — Т. 30, № 7. — С. 579–582.
5. Рец.: Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А. Курс математического анализа (М.; Л., 1940. Т. 1. 460 с.) // Изв. АН СССР. Отд-ние мат. и естеств. наук. Сер. мат. — 1941. — Т. 5, № 4–5. — С. 381–383. — Соавт.: Натансон И. П.

## Переводы:

[3] — On the convergence of variational processes // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1941. — Vol. XXX, N 2. — P. 107–111.

[4] — On the convergence of the method of reduction to ordinary differential equations // C. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1941. — Vol. XXX, N 7. — P. 579–582.

## Доклады:

- i. Применение математических методов в вопросах планирования перевозок. На совместном заседании группы математики и транспортной группы Ленингр. Дома ученых, 26.02.1941. Оpubл. в [1949, 2]. Соавт.: Гавурин М. К.
- ii. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач. На ежегодной научной сессии ЛГУ, 12.05.1941. Оpubл. в [1957, 2].

## 1942

1. О перемещении масс // Докл. АН СССР. — 1942. — Т. 37, № 7–8. — С. 227–229.
2. Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Прикл. математика и механика. — 1942. — Т. 6, вып. 1. — С. 31–40.
3. Рациональные методы раскроя металла // Произв.-техн. бюл. / НКБ СССР. — 1942. — № 7–8. — С. 21–29.

Доклад:

- i. Математические проблемы планово-экономического анализа. На семинаре в МИАН, Казань.

Рукописи:

1. По поводу количественных методов решения вопросов, связанных с составлением наилучшего плана использования ресурсов для данного участка социалистического общества. (Тезисы доклада). Оpubл. в [2002, 1], С. 273–289.
2. Экономический расчет, обеспечивающий наиболее целесообразное использование ресурсов. Оpubл. в [1959, 2].
3. О мероприятиях, обеспечивающих увеличение выхода при раскрое древесины для получения тары. Отчет для завода «Парижская коммуна» (Ярославль). Частично опубл. в [1951, 1].

## 1943

Доклады:

- i. Методика раскроя материалов в серийном производстве. На первой технической конференции металлообрабатывающих заводов Ярославской области, 19–20.07. 1943.
- ii. Экономический расчет наиболее целесообразного использования ресурсов. На совещании в Госплане СССР, окт. 1943 г.
- iii. Экономический расчет наиболее целесообразного использования ресурсов. На семинаре в Ин-те экон. АН СССР, окт. 1943 г.
- iv. Об одном итеративном методе решения систем линейных алгебраических уравнений. На семинаре отдела приближенных вычислений МИАН, Москва, 21.10.1943. Оpubл. в [1945, 1]. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1947. — Т. 2, вып. 1. — С. 228.

Рукописи:

1. Показатели работы предприятий нуждаются в пересмотре. Оpubл. в [1991, 1], С. 16–44; [2002, 1], С. 375–396.
2. О принципах экономического расчета. Оpubл. в [2002, 1], С. 333–353.
3. Ответы на вопросы, замечания, возражения. Оpubл. в [2002, 1], С. 354–370.
4. По вопросу взаимоотношения некоторых понятий с понятиями, вводившимися субъективными школами. Оpubл. в [2002, 1], С. 317–330.

## 1944

1. Некоторые соображения по расстановке минных полей в связи с подсчетом вероятностей поражения // Тр. ВВМИСУ. — 1944. — Т. 6.

Рукописи:

1. Принципы методики определения целесообразной степени рассредоточения и сравнительной оценки различных мер повышения живучести. Оpubл. в [2001, 1].

## 1945

1. Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичного функционала // Докл. АН СССР. — 1945. — Т. 48, № 7. — С. 485–487.

Переводы:

[1] — On an effective method of solving extremal problems for quadratic functionals // С. R. (Doklady) Acad. Sci. l'URSS. — 1945. — Vol. XLVIII, N 7. — P. 455–460.

#### 1946

1. Теория вероятностей. — Л., 1946. — 153 с.
2. Об одном методе решения задач о минимуме квадратичных функционалов // Успехи мат. наук. — 1946. — Т. 1, вып. 5–6. — С. 241.

Доклады:

- i. Об одном методе решения задач о минимуме квадратичных функционалов. На заседании Моск. мат. о-ва, 28.05.1946 г. Резюме опублик. в [2]. Опублик. в [1945, 1], [1947, 1].
- ii. Методика расчета живучести систем объектов. На науч.-техн. конф. Вышш. инж.-техн. красн. знамен. уч-ща Воен.-мор. сил. Тезисы опублик. в [3].

#### 1947

1. О методе наискорейшего спуска // Докл. АН СССР. — 1947. — Т. 56, № 3. — С. 233–236.

Доклады:

- i. К общей теории приближенных методов. Серия докладов на семинаре в ЛОМИ (17.02., 24.02., 03.03., 24.03.1947 г.).
- ii. Функциональный анализ и его применения к прикладному анализу. На 4-й научной сессии ЛГУ 04.11.1947. Опублик. в [1948, 5].
- iii. Об одной проблеме Монжа. На Московском математическом обществе 23.12.1947. Опублик. в [1948, 6], [2004, 3].
- iv. Функциональный анализ и прикладная математика. На Отделении физ.-мат. наук АН СССР, дек. 1947 г. Опублик. в [1948, 5].

Рукописи:

1. Линейные операции в полупорядоченных пространствах II. (Машинопись 47 стр., не опубликовано. Вероятно, предполагалась публикация в Математическом сборнике.)

#### 1948

1. Приближенные методы // Математика в СССР за тридцать лет, 1917–1947. — М.; Л., 1948. — С. 759–801. — Соавт.: Крылов В. И.
2. О методе Ньютона для функциональных уравнений // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 59, № 7. — С. 1237–1240.
3. К общей теории приближенных методов анализа // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 60, № 6. — С. 957–960.
4. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 6. — С. 89–185.
5. То же // Вестн. ЛГУ. — 1948. — № 6. — С. 3–18.
6. Григорий Михайлович Фихтенгольц: (К шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 5. — С. 179–181. — Соавт.: Смирнов В. И., Натансон И. П.
7. То же // Вестн. ЛГУ. — 1948. — № 6. — С. 133–135. — Соавт.: Смирнов В. И., Натансон И. П.
8. Об одной проблеме Монжа // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 2. — С. 225–226.
9. О некоторых новых приемах вычислений на табуляторе, связанных с использованием двоичных разложений чисел // Успехи мат. наук. — 1948. — Т. 3, вып. 4. — С. 160–162. — Соавт.: Гавурин М. К.

10. Об одном методе последовательных приближений для решения интегральных уравнений // Бюл. науч.-исслед. работ / Упр. воен.-мор. учеб. заведений. Секция инж.-техн. — 1948. — Вып. 9. — С. 3–10.

Доклады:

- i. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. На совместном семинаре Отдела методов разработки Института горного дела АН и секции транспортных проблем АН СССР (предс. — акад. Терпигорев А. М.), Москва, 05.05.1948.
- ii. О функциональном преобразователе. На совещаниях в Институте машиноведения АН СССР, Москва, июль и окт. 1948 г.

#### 1949

1. Приближенные методы высшего анализа. — 3-е изд. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1949. — 695 с. — Соавт.: Крылов В. И.
2. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — С. 110–138. — Соавт.: Гавурин М. К.
3. Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций // Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института им. В. А. Стеклова. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — С. 3–25. — (Тр. МИАН; Т. 28).
4. О методе Ньютона // Там же. — С. 104–144.
5. О дифференциальных уравнениях вида  $x'' = f(x)$  // Там же. — С. 148–151.
6. Подбор поставок, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте // Лес. пром-сть. — 1949. — № 7. — С. 15–17; № 8. — С. 17–19.

Ред.:

Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения математического института им. В. А. Стеклова. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. — 183 с. — (Тр. МИАН; Т. 28).

Доклады:

- i. Математические методы в решении вопросов производственного планирования и технологии. На спец. семинаре для работников ленингр. промышленности в ЛОМИ, 28.11.1949.

#### 1950

1. Приближенные методы высшего анализа. — 3-е изд. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. — 695 с. — Соавт.: Крылов В. И.
2. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950. — 548 с. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

Доклады:

- i. Математические методы в вопросах технологии и планирования производства (Опыт и перспективы их внедрения). На 6-й научной сессии ЛГУ 26.12.1949–06.01.1950 г.
- ii. О плане внедрения законченных научных работ ЛОМИ в народное хозяйство. На Отделении физ.-мат. наук АН СССР 30.01.1950. Опубл. в [2002, 1], С. 399–413.
- iii. О функциональном преобразователе. На комиссии МИАН, ИВТАН и Минприбора 15.09.1950.

#### 1951

1. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. — Л.: Лениздат, 1951. — 198 с. — Соавт.: Залгаллер В. А.
2. Принцип мажорант и метод Ньютона // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 76, № 1. — С. 17–20.

3. Некоторые дальнейшие применения принципа мажорант // Докл. АН СССР. — 1951. — Т. 80, № 6. — С. 849–852.
4. Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 3. — С. 31–98. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.
5. Принцип мажорант и метод Ньютона // Там же. — С. 131–132.

Доклады:

- i. Принцип мажорант и метод Ньютона. На московск. мат. об-ве 27.02.1951. Оpubл. в [5].

### 1952

1. Приближенные методы высшего анализа. — 4-е изд. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. — 695 с. — Соавт.: Крылов В. И.
2. Рец.: Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.; Л., 1951. — 360 с. // Сов. кн. — 1952. — № 8. — С. 21–23.

### 1953

1. A felsőbb analizis közelitő módszerei. — Budapest: Akad. Kiado, 1953. — L. 703. — Co-aut.: Krylov V. I.
2. Рец.: Эльсгольд Л. Э. Вариационное исчисление. М.; Л., 1952. 168 с. // Сов. кн. — 1953. — № 6. — С. 32–33.

Доклады:

- i. О значении прогресса в вычислительной технике для прикладной математики. На семинаре в ЛОМИ, апрель 1953 г. (машинопись 12 с.)

Переводы:

[1950, 2] A felsőbb analizis közelitő módszerei. — Budapest: Akad. Kiado, 1953. — L. 703. — Co-aut.: Krylov V. I.

### 1954

1. А. с. 98671. СССР. Функциональный преобразователь. — № 436222/2323; заявл. 3.10.50; опубл. 30.09.54 (Бюл. изобр., № 7, 1954). — Соавт.: Гавурин М. К., Эпштейн В. Л.

Доклады:

- i. Об использовании счетно-аналитических машин и релейных устройств в математических вычислениях. На 10-й научной сессии ЛГУ 08–19.02.1954.

Рукописи:

1. Метод Ньютона для уравнений в пространствах, нормированных полуупорядоченными (Приложение к предполагавшемуся немецкому переводу [1950, 1]).
2. Значение современных счетных машин для человеческой культуры. Оpubл. в [2004, 4], С. 13–28.

### 1956

1. Таблицы для численного решения граничных задач теории гармонических функций. — М.: Гостехиздат, 1956. — 462 с. — Соавт.: Крылов В. И., Чернин К. Е.
2. Metode de Aproximație ale Analizei Superioare. — București: S.n., 1956. — Vol. 2–3. — 330 p. — Co-aut.: Krylov V. I.
3. Перспективы развития и использования электронных счетных машин // Математика, ее содержание, методы и значение. — М., 1956. — Т. 2. — С. 382–390.

4. Функциональный анализ и вычислительная математика // Тр. 3 Всесоюзного математического съезда, Москва, июнь–июль 1956 г. — М., 1956. — Т. 2: Крат. содерж. обзор. и секц. докл. — С. 43. — Соавт.: Соболев С. Л., Люстерник Л. А.
5. О математической символике, удобной при вычислениях на машинах // Там же. — С. 151. — Соавт.: Петрова Л. Т.
6. Об интегральных операторах // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 2. — С. 3–29.
7. Исидор Павлович Натансон: [К 50-летию со дня рождения] // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 4. — С. 193–196. — Соавт.: Фаддеев Д. К.
8. Приближенное решение функциональных уравнений // Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 6. — С. 99–116.
9. Счетные комбайны: [Беседа] // Сов. Латвия. — 1956. — 18 марта.

Переводы:

[1952, 1] — Metode de Aproximatie ale Analizei Superioare. — Bucuresti: S.n., 1956. — Vol. 2–3. — 330 p. — Co-aut.: Krylov V. I.

Доклады и выступления:

- i. Приближенные методы решения функциональных уравнений. Оpubл. в [6]. На Всесоюзной конференции по функциональному анализу и его применениям, Москва, 17–24.01.1956. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1956. — Т. 11, вып. 3 (69). — С. 224.
- ii. Об одной системе программирования. На конференции «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения», Москва, 12–17.03.1956. Соавт.: Петрова Л. Т., Яковлева М. А. Оpubл. в [1958, 2].
- iii. Функциональный анализ и вычислительная математика. На 3-м Всесоюзном математическом съезде, Москва, июнь — июль 1956. Соавт.: Соболев С. Л., Люстерник Л. А. Оpubл. в [3].
- iv. О математической символике, удобной при вычислениях на машинах. Там же. Соавт.: Петрова Л. Т. Оpubл. в [4].
- v. О проведении численных и аналитических вычислений на цифровых машинах. На заседании ленингр. общегородского мат. семинара 27.12.1956. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 6 (78). — С. 207.
- vi. О проведении численных и аналитических вычислений на машинах с программным управлением. На сессии АН Армянской ССР 27–30.11.1956. Оpubл. в [1957, 5].
- vii. Выступление на пленарном заседании Сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства 15–20.10.1956. Оpubл. в [1957, 7].

## 1957

1. Возможность применения математических методов в вопросах производственного планирования // Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий: Тез. докл. Межвуз. совещ. — Л., 1957. — Вып. 2. — С. 18–20.
2. [Выступление на пленарном заседании Сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства: Крат. излож.] // Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, 15–20 окт. 1956 г.: Пленар. заседания. — М., 1957. — С. 152–154.
3. Об одной математической символике, удобной при проведении вычислений на машинах // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 113, № 4. — С. 738–741.
4. О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 115, № 3. — С. 441–444.
5. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 115, № 6. — С. 1058–1061. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.
6. О проведении численных и аналитических вычислений на машинах с программным управлением // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1957. — Т. 10, № 2. — С. 3–16.
7. Некоторые дальнейшие применения метода Ньютона для функциональных уравнений // Вестн. ЛГУ. — 1957. — № 2. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 7. — С. 68–103.

## Доклады:

- i. Возможности применения математических методов в вопросах производственного планирования. На Межвуз. совещ. «Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий» 18–23.02.1957 в Ленинграде. Оpubл. в [6] и [1958, 4].
- ii. О методах проведения численных и аналитических вычислений на электронных счетных машинах, разрабатываемых в Ленинградском отделении МИАН. На Московском математическом о-ве 19.02.1957. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 3 (75). — С. 249.
- iii. Роль математики в анализе вопросов экономики социалистического общества. На семинаре в ЛГУ, 11.04.1957.
- iv. О методике планирования и экономического расчета, направленной на наилучшее использование ресурсов. На совместном семинаре мат. и экон. секций Ленингр. Дома ученых, апр. 1957 г.
- v. Применение математических методов в вопросах перспективного планирования (анализ эффективности капиталовложений). Там же, май 1957.
- vi. Роль математических методов в изучении вопросов экономики социалистического общества. На семинаре в МИАН, 09.05.1957.
- vii. Математический анализ некоторых планово-производственных задач. На ленингр. общегородском мат. семинаре 14.05.1957. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 6 (78). — С. 207.
- viii. Выступление на совещании в Институте экономики АН СССР «Закон стоимости и его использование в народном хозяйстве СССР», 20–27.05.1957 г. Оpubл. в [1959, 8] и [2004, 4], С. 57–68. Сообщ.: ВЭ, 1957, № 5, С. 137.
- ix. Математические методы в планово-экономических вопросах. На совещании в Отделении экон., фил. и прав. наук АН СССР, 20.06.1957. Оpubл. в [2002, 1], С. 470–488.
- x. Вычислительные проблемы, возникающие в планово-экономических вопросах. На научной сессии ЛГУ, 22.11–06.12.1957.
- xi. Оптимальное планирование и экономические показатели. На секции экон. статист. Московск. Дома ученых, 27 дек. 1957 г.

## Рукописи:

1. Замечания и возражения к ответу начальника ЦСУ СССР тов. В. Н. Старовского. Оpubл. в [2002, 1], С. 426–443. Совм. с Валландером С. В.
2. Замечания и возражения к ответу члена Госплана тов. Г. Сорокина. Оpubл. в [2002, 1], С. 446–462. Совм. с Валландером С. В.
3. Планово-экономический анализ поднять на подлинно научную высоту. Статья в «Правду». Оpubл. в [2002, 1], С. 463–468.
4. За дальнейшее совершенствование планово-экономического анализа. Статья в «Промышленно-экономическую газету».

## 1958

1. О применении современных математических методов при определении экономической эффективности капитальных вложений. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — 19 с.
2. Approximate Methods of Higher Analysis. — New York: Intersci. Publ. Inc., 1958. — XII, 681 p. — Co-aut.: Krylov V. I.
3. Näherungsmethoden der höheren Analysis. — Berlin: VEB Dt. Verl. Wiss., 1958. — XI, 611 p. — Co-aut.: Krylov V. I.
4. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. — Шанхай: Б.и., 1958. — Т. 1. — 242 с. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.
5. Игр теория // БСЭ. — 2-е изд. — 1958. — Т. 51. — С. 125–126. — Соавт.: Канторович И. Л.
6. Линейное программирование // Там же. — С. 175–177. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.
7. Операций исследование // Там же. — С. 216–218. — Соавт.: Иванов А. А.

8. Возможность применения математических методов в вопросах производственного планирования // Организация и планирование равномерной работы машиностроительных предприятий: Межвуз. совещ.: Докл. — М.; Л., 1958. — С. 338–353. — (Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та; Вып. 22).
9. Об одной системе программирования // Конференция «Пути развития советского математического машиностроения и приборостроения»: Секция универс. цифровых машин (Применение машин), Москва, 12–17 марта 1956 г. — М., 1958. — Ч. 3. — С. 30–36. — Соавт.: Петрова Л. Т., Яковлева М. А.
10. [Поправки к статьям: «О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач» (ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 3) и «Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах» (ДАН СССР. 1957. Т. 115, № 6)] // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 118, № 6. — С. 1054. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.
11. Григорий Михайлович Фихтенгольц: [К 70-летию со дня рождения] // Вестн. ЛГУ. — 1958. — № 7. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 2. — С. 5–13. — Соавт.: Натансон И. П.
12. Об одном функциональном пространстве вполне аддитивных функций // Там же. — С. 52–59. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.
13. Ред.: Математика / Отв. ред. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. — 96 с. — (Учен. зап. ЛГУ, № 271. Сер. мат. наук; Вып. 33).

## Переводы:

- [1942, 1] — On the translocation of mass // *Mgmt. Sci.* — 1958. — Vol. 5, N 1. — P. 1–4.
- [1949, 1] — Approximate Methods of Higher Analysis. — New York: Intersci. Publ. Inc., 1958. — XII, 681 p. — Co-aut.: Krylov V. I.
- [1950, 1] — Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — Шанхай: Б.и., 1958. — Т. 1. — 242 с. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.
- [1952, 1] — Näherungsmethoden der höheren Analysis. — Berlin: VEB Dt. Verl. Wiss., 1958. — XI, 611 p. — Co-aut.: Krylov V. I.
- [1957, 2] — On Methods of Analysis of Some Extremal Problems in Planning Production // Т. 86. Project RAND (U. S. Air Force).

## Доклады:

- i. О применении современных математических методов при определении экономической эффективности капитальных вложений. На пленарном заседании Всесоюз. науч.-техн. конф. по проблемам определения экономической эффективности кап. вложений и новой техники в нар. хоз-ве СССР, Москва, 9–14.06.1958. Оpubл. в [3], [1959, 7]. Сообщ.: ВЭ. — 1958. — № 7. — С. 158–159.
- ii. Об одном пространстве вполне аддитивных функций и некоторых экстремальных задачах. На межвузовской конференции по функциональному анализу и его применениям, Одесса, 20–25.10.1958. Соавт.: Рубинштейн Г. Ш. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, вып. 3. — С. 221–226.

## 1959

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Физматгиз, 1959. — 684 с. — Соавт.: Акилов Г. П.
2. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 344 с.
3. Линейное программирование // МСЭ. — 3-е изд. — 1959. — Т. 5. — С. 579–581. — Соавт.: Рубинштейн Г. Ш.
4. Операций исследование // МСЭ. — 3-е изд. — 1959. — Т. 6. — С. 916–917. — Соавт.: Иванов А. А.
5. Приближенные и численные методы // Математика в СССР за сорок лет, 1917–1957: в 2 т. — М., 1959. — Т. 1: Обзорные статьи. — С. 809–855. — Соавт.: Гавурин М. К.



6. Математические методы организации и планирования производства // Применение математики в экономических исследованиях. — [2-е изд.]. — М., 1959. — С. 251–309.
7. Дальнейшее развитие математических методов и перспективы их применения в планировании и экономике // Там же. — С. 310–353.
8. О применении современных математических методов при определении экономической эффективности капитальных вложений // Экономическая эффективность капитальных вложений и новой техники. — М., 1959. — С. 227–237.
9. [Выступление на совещании в Институте экономики АН СССР по проблеме товарного производства и использования закона стоимости при социализме] // Закон стоимости и его использование в народном хозяйстве СССР. — М., 1959. — С. 289–295.
10. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели // Докл. АН СССР. — 1959. — Т. 129, № 4. — С. 732–735. — Соавт.: Горьков Л. И.
11. [Выступление на общем годовичном собрании АН СССР 26–28 марта 1959 г.] // Вестн. АН СССР. — 1959. — № 4. — С. 59–61.
12. Григорий Михайлович Фихтенгольц: [Некролог] // Вестн. ЛГУ. — 1959. — № 19. Математика. Механика. Астрономия. Вып. 4. — С. 158–159. — Совм. с др.
13. То же // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, вып. 5. — С. 123–128. — Соавт.: Натансон И. П.
14. Ред.: Линейные неравенства и смежные вопросы: сб. статей под ред. Г. У. Куна и А. У. Таккера: С прил. кн. С. Вайда «Теория игр и линейное программирование»: пер. с англ. / под ред. Л. В. Канторовича, В. В. Новожилова. — М.: Изд-во иностр. лит., 1959. — 469 с.
15. Предисловие к русскому изданию // Там же. — С. 5–8.
16. Ред.: Работы по приближенному анализу. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. — 392 с. — (Тр. МИАН; Т. 52).
17. Предисловие // Там же. — С. 1–2.
18. А. с. 123762. СССР. Релейная клавишная вычислительная машина для автоматического выполнения арифметических операций. — № 595834/26; заявл. 29.03.58; опубл. 9.09.59 (Бюл. изобр., № 21, 1959). — Соавт.: Поснов Н. Н., Петров Ю. П.

## Переводы:

[1939, 1] — Математические методы организации и планирования производства. — Пекин: Б.и., 1959. — 77 с.

## Доклады и выступления:

- i. Выступление на заседании Президиума АН СССР по докладу З. Ф. Чуханова об эффективности кап. вложений и новой техники, 09.01.1959 г.
- ii. Выступление на Комиссии АН СССР по стоимости, 24.02.1959 г. Опубл. в [2004, 4], С. 103–108.
- iii. Выступление на Отд. эк., фил. и прав. наук АН 25.03. Опубл. в [1991, 3], [2004, 4], С. 108–111.
- iv. Выступление на Общем собрании АН СССР 27.03.1959 г. Опубл. в [9]. Полн. текст в [1998, 1], С. 437–445 и [2004, 4], С. 91–100.
- v. Оптимальное планирование и вопросы исчисления стоимости. На «Комиссии АН СССР по стоимости» 30.03.1959 г.
- vi. Выступление на совещании по математической лингвистике, Ленинград, 15–21.04.1959 г. Кратк. излож.: Успехи мат. наук. — Т. XIV, вып. 6. — С. 219–220.
- vii. Выступление на «Комиссии АН СССР по стоимости» 06.05.1959 г. Тезисы опубл. в [2004, 4]. С. 113–114.

## 1960

1. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. — М.: Изд-во АН СССР, 1960. — 347 с.
2. Оптимальное планирование и экономические показатели. — М.: ВИНТИ, 1960. — 18 с.

3. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — Шанхай: Б.и., 1960. — Т. 2. — 590 с. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.
4. Об исчислении производственных затрат // Вопр. экономики. — 1960. — № 1. — С. 122–134.
5. Mathematical methods of organizing and planning production // Mgmt Sci. — 1960. — Vol. 6, N 4. — P. 366–422.
6. Формулы вторгаются в жизнь: [О расширении сферы применения математики] // Ленингр. правда. — 1960. — 15 июня.

## Переводы:

[1939, 1] — Mathematical methods of organizing and planning production // Mgmt Sci. — 1960. — Vol. 6, N 4. — P. 366–422.

[1939, 1] — Metody matematyczne w organizacji i ekonomice przedsiębiorstwa. — Warszawa: Państw. Wyd-wo Ekon., 1960.

[1950, 1] — Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — Шанхай: Б.и., 1960. — Т. 2. — 590 с. — Соавт.: Вулих Б. З., Пинскер А. Г.

[3] — On the calculation of the production costs // Problems of Economics, III (May 1960). — P. 3–10.

## Доклады и выступления:

- i. Применение электронных машин и математических методов в оптимальном планировании. На конф. по вопросам применения ЭВМ для экономических расчетов, Таллинн, 10–11.02.1960.
- ii. Математические проблемы оптимального планирования экономики. На Моск. мат. общ-ве, 22.03.1960. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1960. — Т. XV, вып. 4. — С. 205.
- iii. Выступление по пленарным докладам В. С. Немчинова и И. С. Брука на науч. совещании о применении мат. методов в экономике и планир., Москва, 04.04.1960. Оpubл. в [1961, 2], [2000, 1] и [2004, 4], С. 117–121.
- iv. Оптимальное планирование и экономические показатели. Пленарный доклад. Там же, 05.04. Оpubл. в [2], [1961, 1].
- v. Выступление по докладу. Там же, 05.04. Оpubл. в [2000, 1], [2004, 4], С. 121–126.
- vi. Заключительное слово по докладу. Там же, 06.04. Оpubл. в [1961, 3], [2000, 1].
- vii. Выступление в прениях по докладам на секции «Математический анализ расширенного производства». Там же, 07.04. Оpubл. в [2000, 1].
- viii. Выступление в прениях по докладам на секции «Линейное программирование». Там же. Оpubл. в [1961, 4].
- ix. Применение математических методов при нахождении оптимальных плановых решений (эконометрия). Лекция в Ленингр. доме науч.-техн. пропаганды, 12.04.1960.
- x. Лекция в НИЭИ Госплана СССР, май 1960.
- xi. Выступление на Президиуме АН по итогам работы совещания о применении математических методов в экономике и планировании в апреле 1960 г., 20.05.1960. Оpubл. в [2004, 4], С. 130–132.
- xii. Проблемы численного анализа, возникающие при нахождении оптимальных плановых решений. На Второй науч. конф. по вычисл. мат. и вычисл. технике, Киев, 6–10.06.1960. Оpubл. в [4]. Сообщ.: Механизация и автоматизация производства. — 1960. — № 12. — С. 52–54.
- xiii. Проблемы математической экономики. На 4 Всесоюзном математическом съезде, Ленинград, 3–12 июля 1961 г. Кр. излож.: [1961, 5].
- xiv. Выступление на семинаре «Применение математических и статистических методов в изучении проблем народного потребления», Ереван, окт. 1960 г.

## Рукописи:

1. Письмо Главному редактору журнала «Management Science», профессору Р. М. Тралю, 31.12.1960. [Ответ на I вариант статьи: A. Charnes, W. Cooper. On some works of Kantorovich, Koormans and others]. Оpubл. в [1999, 1] и [2004, 4], С. 375–380.

## 1961

1. Rachunek Ekonomiczny Optymalnego Wykorsystania Zasobów. — Warszawa: Państw. Wyd-wo Ekon., 1961. — 506 p.
2. Оптимальное планирование и экономические показатели // Общие вопросы применения математики в экономике и планировании. — М., 1961. — С. 67–99. — (Тр. науч. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 1).
3. [О применении вычислительной машинной техники в экономике и планировании: Выступления в прениях] // Там же. — С. 160–164.
4. [Заключительное слово] // Там же. — С. 259–271.
5. [Выступления в прениях по докладам секции линейного программирования] // Линейное программирование. — М., 1961. — С. 122–123, 125–126. — (Тр. науч. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 4).
6. Проблемы математической экономики // 4 Всесоюзный математический съезд, 3 июля — 12 июля 1961 г.: Аннот. пленар. докл. — Л., 1961. — С. 13–14.
7. Ред.: Общие вопросы применения математики в экономике и планировании / под ред. Л. В. Канторовича, И. А. Кулева, Л. Е. Минца, В. В. Новожилова. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — 295 с. — (Тр. науч. совещ. о применении мат. методов в экон. исслед. и планир., 4–8 апр. 1960 г.; Т. 1).
8. Ред.: Численные методы оптимального планирования / под ред. Л. В. Канторовича, А. Г. Аганбегяна. — Новосибирск: СО АН СССР, 1961. — (Экономико-математическая серия — ИМ и ИЭ и ОПИ СО АН СССР, вып. 1).

## Переводы:

- [1939, 1] — I metodi matmatice di organizzazione e di pianificazione della produzione // Quaderni di Documentazione (Roma, Centro di studio sull economia Sovietica). — 1961. — N 3. — P. 9–36.
- [1959, 2] — Rachunek Ekonomiczny Optymalnego Wykorsystania Zasobów. — Warszawa: Panst. Wyd-wo Ekon., 1961. — 506 p.
- [1959, 3 и 4] — в Zastosowanie matematyki w badaniach ekonomicznych. — Warszawa: Panst. Wyd-wo Ekon., 1961.

## Доклады и выступления:

- i. Выступление на совещании о совершенствовании плановых показателей, Москва, Госэкономсовет, 26.01.1961.
- ii. Математические методы в экономике. На методологическом семинаре СО АН, 17.03 и 24.03.1961.
- iii. О более широком внедрении достижений науки и техники в народное хозяйство. На семинаре ИМ СО АН, 10.04.1961.
- iv. Математические методы в экономике. На методологическом семинаре МГУ, 25.05.1961. Опубл.: [1991, 4].
- v. Выступление на Научно-методической конференции МГУ по вопросам применения математических методов в экономических расчетах, 30–31.05.1961.
- vi. Выступление на Научной конференции по вопросам определения потребности населения в товарах, Киев, май 1961 г.
- vii. Выступление на заседании Научного совета АН по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании, 15.06.1961.
- viii. Проблемы математической экономики. На IV математическом съезде, Ленинград, 03–12.07. 1961. Опубл. в [5]. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17, вып. 1 (103). — С. 262.
- ix. О развитии математических методов решения экономических задач учеными Сибирского отделения АН СССР. На координационном совещании Научного совета АН по применению математических методов и вычислительной техники в экономических исследованиях и планировании 28–30.11.1961. Кратк. излож.: ВЭ. — 1962. — № 4. — С. 77.
- x. Математические модели социалистической экономики. На годичном собрании Отделения физ.-мат. наук АН, 1961.

Рукописи:

1. Оптимальный план и материальные стимулы его реализации [Ответ на статью Л. М. Гатовского и М. П. Сакова «О принципиальной основе экономических исследований», Коммунист, 1960, № 15]. Опубл.: [2004, 4], С. 149–173.

### 1962

1. Приближенные методы высшего анализа. — 5-е изд., испр. — М.; Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с. — Соавт.: Крылов В. И.
2. Исследование операций // Автоматизация производства и промышленная электроника: Энциклопедия соврем. техники. — М., 1962. — Т. 1. — С. 518–520. — Соавт.: Романовский И. В.
3. То же // Заоч. экон. курсы. — 1962. — Вып. 7. — С. 14–15. — (Прил. к Экон. газ. — 1962. — 8 сент.). — Соавт.: Романовский И. В.
4. [О развитии математических методов решения экономических задач учеными Сибирского отделения АН СССР: Выступление на координац. совещ. по вопр. исполыз. математики и вычисл. техники в экономике. Крат. излож.] // Вопр. экономики. — 1962. — № 4. — С. 77.
5. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 5. — С. 701–709.
6. Победы «электронных экономистов»: [О новых мат. методах в экономике] // Комс. правда. — 1962. — 7 июля.
7. Ред.: Работы по автоматическому программированию, численным методам и функциональному анализу / под ред. Л. В. Канторовича, В. Н. Фаддеевой. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. — 384 с. — (Тр. МИАН; Т. 66).
8. Предисловие // Там же. — С. 3. — Соавт.: Фаддеева В. Н.
9. Ред.: Чернин К. Е. Таблицы для численного решения граничных задач, связанных с уравнением Пуассона. — Л.: Мор. трансп., 1962. — 733 с. — (Тр. Аркт. и Антаркт. НИИ; Т. 252).
10. Ред.: Оптимальное планирование размещения и специализации производства в отдельных отраслях / под ред. Л. В. Канторовича, А. Г. Аганбегяна. — Новосибирск: СО АН, 1962. — («Экономико-математическая серия» ИМ и ИЭ и ОПП СО, вып. 3).

Рукописи:

1. О состоянии и задачах экономической науки. Опубл. в [1990, 1], [2004, 4], С. 195–207.

Доклады и выступления:

- i. Новые подходы в вычислительных методах и в обработке наблюдений. На семинаре в НГУ, май 1962 г. Опубл. в [2].
- ii. То же. На семинаре в ЛГУ, май 1962 г.
- iii. То же. На Моск. мат. о-ве, 22.05.1962. Сообщ.: Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17, вып. 5 (107). — С. 184.
- iv. Выступление на общем собрании АН СССР по результатам выборов в академию по экономич. специальностям, 29.06.1962 г.
- v. Математические модели оптимального планирования. На конф. по опыту и перспективам применения мат. методов и ЭВМ в планировании, Новосибирск, 12–17.10.1962. Сообщ.: ВЭ. — 1962. — № 12. — С. 149; Кр. излож.: ВЭ. — 1963. — № 3. — С. 81–82.

### 1963

1. Calcul Économique et Utilisation des Ressources. — Paris: Dunod, 1963. — XVII–XXVII, 306 p. — (Finance et Économic Appliquée; Vol. 15).
2. Проблемы математической экономики: (Тез. докл.) // Тр. 4 Всесоюзного математического съезда, Ленинград, 3–12 июля 1961 г. — Л., 1963. — Т. 1: Пленар. докл. — С. 100–101.
3. Амортизационные отчисления и эффективность применения новой техники в системе оптимального планирования // Применение математики и электронно-вычислительной техники

- в экономике: Межвуз. науч. конф. (16–18 дек. 1963 г.): Тез. докл. пленар. заседания. — Л., 1963. — С. 66–68.
4. Electronic computing machines // Mathematics: Its Content, Methods and Meaning / Ed. by A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev. — Providence, 1963. — Pt 4. — P. 143–190. — (Transl. of Math. Monogr.; Vol. 1). — Co-aut.: Lebedev S. A.
  5. [Проблематика математических методов в оптимальном планировании: Докл. на конф. по применению мат. методов и ЭВМ в планир., Новосибирск] // Вопр. экономики. — 1963. — № 3. — С. 81–82.
  6. Борис Захарович Вулик: (К пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1963. — Т. 18, вып. 6. — С. 242–243. — Соавт.: Акилов Г. П., Владимиров Д. А., Натансон И. П.
  7. Условие оптимального планирования // Экон. газ. — 1963. — 20 апр.

## Переводы:

- [1956, 2] — Electronic computing machines // Mathematics: Its Content, Methods and Meaning / Ed. by A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev. — Providence, 1963. — Pt 4. — P. 143–190. — (Transl. of Math. Monogr.; Vol. 1). — Co-aut.: Lebedev S. A.
- [1959, 2] — Calcul Économique et Utilisation des Ressources. — Paris: Dunod, 1963. — XVII–XXVII, 306 p. — (Finance et Économic Appliquée; Vol. 15).

## Доклады:

- i. Перспективы использования математико-экономических методов в сельском хозяйстве. На научной конференции по применению кибернетики в сельском хозяйстве, СибВИМ и НТО сельск. хоз., Новосибирск, 26–28.03.1963.
- ii. Выступление на расширенной сессии Научного совета АН по проблемам ценообразования, Москва, 26–30.03.1963. Кр. излож.: ВЭ. — 1963. — № 7. — С. 146–156; Вестн. АН. — 1964. — № 2. — С. 982–986.
- iii. Математические проблемы оптимального планирования. На коллоквиуме по применению математики в экономике в Институте экономики Венгерской АН, 18–22.06.1963. Оpubл. в [1965, 4].
- iv. Перспективы применения методов оптимального программирования в задаче подъема сельскохозяйственного производства. На обл. конф. работников с/х, Новосибирск, 04.10.1963.
- v. Выступление на симпозиуме «Экономико-математические модели в работах современных буржуазных экономистов», Новосибирск, 09–10.10.1963.
- vi. Математические методы оптимального планирования и их значение для сельскохозяйственного производства. На семинаре по вопросам применения линейного программирования и электронно-вычислительных машин для планирования потребности в с.-х. технике и ее использования, Сиб. ВИМ, 25.10.–02.11.1963.
- vii. Перспективы применения методов оптимального программирования в сельскохозяйственном производстве. На совещании «Применение математических методов в экономических исследованиях по сельскому хозяйству» во ВНИИ Экономики сельск. хоз., Москва, осень 1963 г. Оpubл. [1964, 2].

## 1964

1. Functional Analysis in Normed Spaces. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1964. — 773 p. — (Int. Ser. of Monogr. in Pure and Applied Math.; Vol. 46). — Co-aut.: Akilov G. P.
2. Funktionalanalysis in Normierten Räumen. — Berlin: Akademie, 1964. — XV, 622 p. — Co-aut.: Akilov G. P.
3. Tables for the Numerical Solution of Boundary Value Problems of the Theory of Harmonic Functions. — New York; Ungar: Frederick Under Publ. Co., 1964. — 462 p. — Co-aut.: Krylov V. I.
4. Динамическая модель оптимального планирования // Планирование и экономико-математические методы: К семидесятилетию со дня рождения академика В. С. Немчинова. — М., 1964. — С. 323–345.

5. Перспективы применения методов оптимального программирования в сельскохозяйственном производстве // Применение математических методов в экономических исследованиях по сельскому хозяйству. — М., 1964. — С. 12–20.
6. Победы «электронных экономистов» // Звездолеты и сфинксы. — М., 1964. — С. 12–14.
7. Mathematical methods of production planning and organization // The Use of Mathematics in Economics. — Edinburgh; London, 1964. — P. 225–279.
8. Further development of mathematical methods and the prospects of their applications in economic planning // Ibid. — P. 281–321.
9. [Выступление на общем собрании АН СССР, 3–5 февр. 1964 г.] // Вестн. АН СССР. — 1964. — № 4. — С. 75–77.
10. [Выступление на конференции «Круглого стола» в Агентстве печати Новости, посвященной применению математических методов в экономике: Излож., перераб. и доп.] // Вопр. экономики. — 1964. — № 9. — С. 77–83.
11. [Выступление на заседании «Кибернетика, планирование и социальная система» в редакции журнала «Вопросы экономики»: Крат. излож.] // План. хоз-во. — 1964. — № 5. — С. 91.
12. Коли наука достигае доскональності // Наука і життя. — 1964. — № 6. — С. 34–36. — Соавт.: Горстко А.
13. Ein dynamisches Modell der optimalen Planung // Sowjetwissenschaft. Gesellw. Beitr. — 1964. — Н. 7. — S. 707–723.
14. Ред.: Оптимальное планирование: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. Вып. 2. Алгоритмы / Отв. ред. — Новосибирск: Наука, 1964. — 76 с.

Переводы:

[1956, 1] — Tables for the Numerical Solution of Boundary Value Problems of the Theory of Harmonic Functions. — New York Ungar: Frederick Under Publ. Co., 1964. — 462 p. — Co-aut.: Krylov V. I., Chernin K. E.

[1959, 1] — Functional Analysis in Normed Spaces. — Oxford etc. Pergamon Press, 1964. — 773 p. — (Int. Ser. of Monogr in Pure and Applied Math.; Vol. 46). — Co-aut.: Akilov G. P.

[1959, 1] — Funktional Analysis in Normierten Raumen. — Berlin: Akademie, 1964. — XV, 622 p. — Co-aut.: Akilov G. P.

[1959, 3] — Mathematical methods of production planning and organization // The Use of Mathematics in Economics. — Edinburgh; London, 1964. — P. 225–279.

[1959, 4] — Further development of mathematical methods and the prospects of their applications in economic planning // Ibid. — P. 281–321.

[1] — Ein dynamisches Modell der optimalen Planting // Sowjetwissenschaft. Gesellw. Beitr. — 1964. — Н. 7. — S. 707–723.

Рукописи:

1. Предложения по вопросам методологии планирования и экономического анализа. Машинопись, 73 стр. Декабрь, 1964 г.

Доклады и выступления:

- i. Амортизационные платежи и оценка эффективности новой техники в системе оптимального планирования. На конференции в ЛИЭИ, Ленинград, янв. 1964 г. Опубл. в [1966, 3], тезисы [1963, 2].
- ii. Выступление на общем собрании АН СССР, 03–05.02.1964. Опубл. в [4].
- iii. Выступление по докладу В. П. Дьяченко «Теоретические основы и методика учета ценообразующих факторов при планировании цен» на совместном заседании Совета по ценообразованию и Отделения экономики АН, февр. 1964 г. Кр. излож.: ВЭ. — 1964. — № 7. — С. 147–152.
- iv. Возможности использования математического оптимального планирования в анализе эффективности новой техники. На конференции по методике определения экономич. эффек-

- тивности сел.-хоз. машин, ВИСХОМ, март 1964 г. Опул. в [3]. Тезисы докл.: М.: ВИСХОМ, 1964. — С. 10–11. — Соавт.: Булавский В. А.
- v. О социальных и методологических аспектах применения математических и кибернетических методов в социалистической экономике. На конференции «Круглого стола» «Кибернетика, планирование и социальная система», организованной журналами «Советский Союз», «Вопросы экономики» и «Экономической газетой» в редакции журнала «Вопросы экономики», март 1964 г. Опул. в [1965, 6]. Сообщ.: ВЭ. — 1964. — № 4. — С. 86; План. хоз-во. — 1964. — № 5. — С. 91. Кр. излож.: USSR. Soviet life today, Sept. 1964. «<Cybernetics, Economic Planning and the Social System. The Round Table Conference». — P. 13 (8–17); ВЭ. — 1964. — № 9. — С. 63–110; Экономич. газета. — 1964. — № 16.
- vi. Выступление на объединенной сессии научных советов АН, посвященной экономическим вопросам пятилетнего плана, Москва, Госплан СССР, 19.05.1964.
- vii. Современные научные методы оптимального планирования строительства, строительного производства и его мат.-техн. обеспечения. На совещании Госстроя СССР «Математические методы и электронно-вычислительная техника в проектировании и организации строительства», Москва, 25–27.11.1964. Опул. в [1965, 5].

## 1965

1. Математические проблемы расчета и анализа оптимальных динамических моделей: Препр. — Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1965. — 15 с.
2. The Best Use of Economic Resources. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1965. — VII–XVI, 349 p.
3. Сякай сюги кэйдай то сигэн хайбун. — Токио: Собунся, 1965. — 390 p.
4. Оптимальные модели перспективного планирования // Применение математики в экономических исследованиях. — М., 1965. — Т. 3. — С. 7–87. — Соавт.: Макаров В. Л.
5. [Ответы на вопросы издательства «Экономика»] // Экономическая наука и хозяйственная практика: Экон. ежегодник. — М., 1965. — С. 150–151.
6. [Выступления на совещании в Агентстве печати Новости, март 1964 г.] // Экономисты и математики за «Круглым столом». — М., 1965. — С. 79–86, 161–163.
7. Математические проблемы оптимального планирования // Colloquium on Applications of Mathematics to Economics, Budapest, 1963. — Budapest, 1965. — P. 171–179.
8. Амортизационные платежи при оптимальном использовании оборудования // Докл. АН СССР. — 1965. — Т. 162, № 5. — С. 1015–1018. — Соавт.: Романовский И. В.
9. Памяти В. С. Немчинова // Вестн. АН СССР. — 1965. — № 1. — С. 122–123. — Совм. с др.
10. На основе математических методов // Экономика стр-ва. — 1965. — № 3. — С. 12–16.
11. Un modello dinamico di pianificazione ottimale // Statistica. — 1965. — Ann. 25, N 3. — P. 337–358.
12. Математика и экономика // Правда. — 1965. — 24 авг.
13. Принцип оптимальности [в плановом ценообразовании] // Экон. газ. — 1965. — № 45. — С. 9.
14. Ред.: Булавский В. А., Рубинштейн Г. Ш. Несколько лекций по линейному программированию / Отв. ред. — Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965. — 68 с.
15. А. с. 172567. Вычислительная система, состоящая из универсальной цифровой вычислительной машины и малой вычислительной машины. — № 867237/26–24, заявл. 2.11.63; опубл. 29.06.65. — Соавт.: Фет Я. И.

## Переводы:

- [1959, 2] — The Best Use of Economic Resources. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1965. — VII–XVI, 349 p.
- [1959, 2] — Shakai Shugi Keizai to Shigen Haibun. — Tokyo: Sobunsha, 1965. — 390 p.
- [1964, 1] — Un modello dinamico di pianificazione ottimale // Statistica. — 1965. — Ann. 25, N 3. — P. 337–358.
- [1964, 1] — A dynamic model of optimum planning // Mathematical studies in economics and statistics in the USSR and Eastern Europe, Winter 1964–65. — Vol. 1, N 2. — P. 41–67.

[1] — Mathematical problems of the calculation and analysis of the optimal dynamic models. — Novosibirsk, 1965. — 15 p.

[2] — Mathematics and Economics // Problems of economics. — Vol. VIII, N 5, September 1965. — P. 12–15.

Рукописи:

1. О Комитете народного благосостояния. Записка, машинопись, 4 стр.
2. О мероприятиях по повышению жизненного уровня населения. Записка, машинопись, 8 стр.
3. Основные препятствия на пути широкого применения оптимального планирования в народном хозяйстве. Записка М. В. Келдышу. Совм. с С. Л. Соболевым, март 1965 г. Опубл. в [2004, 4]. С. 304–306.

Доклады и выступления:

- i. О математическом образовании экономиста и инженера-экономиста. На пленуме научно-методического совета по математике МВ и ССО, 20.02.1965. Опубл. в [1966, 5].
- ii. Использование оборудования и амортизационные отчисления. На Всесоюзной конференции по оптимальному математическому программированию, Новосибирск, 31.05.–04.06.1965. Соавт.: Романовский И. В. Сообщ.: ЭММ. — 1965. — Т. 1, вып. 6.
- iii. Выступление на заседании Президиума АН СССР по докладу зам. пред. Госплана СССР Коробова А. В., 18.06.1965.
- iv. Выступление на совещании в Госплане СССР по докладу зам. пред. Госплана СССР Бачурина А. В., 04.10.1965.
- v. Об оптимальных динамических моделях. На Польском экономическом обществе, Варшава, 08.10.1965.
- vi. Выступления на совещании в Госкомцен, 14–15.10.1965.
- vii. Современные проблемы применения математических методов в экономике и планировании производства. На семинаре «Математические методы и ЭВМ в планировании и управлении с.-х. производством», Новосибирск, СибВИМ, 06–18.12.1965.
- viii. Выступление на заседании Президиума АН по вопросу о внедрении ВТ в экономику и управление н/х, 10.12.1965.
- ix. Оптимальное планирование в экономическую практику. Выступление на общем собрании АН в прениях по вопросам ценообразования, 14.12.1965. Опубл. в [1966, 10].
- x. Выступление на 1 Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов и ЭВМ в управлении промышленным предприятием, Москва, 20–23.12.1965.

## 1966

1. Математические методы оптимальной загрузки прокатных станков: (тез. докл.). — Новосибирск: Наука, 1966. — 13 с.
2. Calculul Economic al Folosiru Optima a Resurselor. — București: Ed. Științifică, 1966. — 407 p.
3. Математические оптимальные модели в планировании развития отрасли и в технической политике // Доклады на Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов и ЭВМ в отраслевом планировании и управлении. — Новосибирск, 1966. — С. 3–19.
4. Математические проблемы оптимального планирования // Математические модели и методы оптимального планирования. — Новосибирск, 1966. — С. 116–124.
5. Амортизационные отчисления и оценка эффективности новой техники в системе оптимального планирования // Математико-экономические проблемы: Тр. межвуз. науч. конф. «Применение математики и электрон.-вычисл. техники в экономике» (январь 1964 г.). — Л., 1966. — С. 3–11. — (Тр. Ленингр. инж.-экон. ин-та им. Пальмиро Тольятти; Вып. 58).
6. Модель оптимальной замены оборудования в условиях стационарной неравномерной нагрузки // Тезисы кр. науч. сообщений; [Международ. мат. конгр.]. Секция 13. Мат. пробл. управляющих систем. — М., 1966. — С. 21.
7. [Применение математических методов в экономике: Беседа] // Один раз в жизни: О лауреатах Ленинских премий 1965 года. — М., 1966. — С. 61–62.



8. Структура амортизационных отчислений при стационарной нагрузке машинного парка // Докл. АН СССР. — 1966. — Т. 166, № 2. — С. 309–312. — Соавт.: Романовский И. В.
9. [Выступление на общем собрании АН СССР в прениях по докладом о ценообразовании, 14 дек. 1965 г.] // Вестн. АН СССР. — 1966. — № 2. — С. 82–86.
10. Развитие математических методов экономического анализа // Вестн. АН СССР. — 1966. — № 10. — С. 9–14.
11. Арон Григорьевич Пинскер: (К 60-летию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1966. — Т. 21, вып. 6. — С. 169–170. — Соавт.: Владимиров Д. А., Вулих Б. З.
12. Андрей Васильевич Бицадзе: (К 50-летию со дня рождения) // Сиб. мат. журн. — 1966. — Т. 7, № 4. — С. 729–730.
13. О математической подготовке экономистов и инженеров-экономистов // Вестн. высш. шк. — 1966. — № 3. — С. 22–27. — Соавт.: Пинскер А. Г.
14. Математические методы в решении хозяйственных задач // Коммунист. — 1966. — № 10. — С. 64–73.
15. [О развитии и современных задачах экономико-математических методов: Беседа] // Сов. Союз. — 1966. — № 4. — С. 36. — (Сибирь на электрон. машине).
16. Ред.: Математические модели и методы оптимального планирования / Отв. ред. — Новосибирск: Наука, 1966. — 178 с.
17. Ред.: Математическое программирование / Отв. ред. — М.: Наука, 1966. — 135 с.
18. Ред.: Оптимальное планирование: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. Вып. 4. Программы / Отв. ред. — Новосибирск: Наука, 1966. — 140 с.
19. Ред.: Оптимальное планирование: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. Вып. 6. Программы / Отв. ред. — Новосибирск: Наука, 1966. — 189 с.
20. А. с. 188151. Сумматор для одновременного сложения нескольких двоичных слагаемых. — № 948838/26–24, заявл. 15.03.65; опубл. 20.10.66. — Соавт.: Фет Я. И., Иловайский И. В.

## Переводы:

[1959, 2] — Calculul Economic al Folosiru Optima a Resurselor. — Bucuresti: Ed. Stiintifica, 1966. — 407 p.

## Доклады и выступления:

- i. Математическое оптимальное планирование. Лекция в Центральной лектории общества «Знание», Москва, 02.02.1966.
- ii. Динамическая модель народного хозяйства. На семинаре по математическим моделям народного хозяйства, Новосибирск, 16–23.03.1966 г. Опубл. [1967, 3]. Кр. излож.: ЭММ. — 1966. — Т. 2, вып. 4. — С. 624.
- iii. Исходные положения программы работ по расчету преysкурантов на промышленную продукцию и грузовых тарифов на базе электронной вычислительной техники. На заседании Научно-методического совета Госкомцен, апр. 1966 г.
- iv. Математическое оптимальное планирование в социалистической экономике. Лекция в Госкомцен.
- v. Математические методы оптимальной загрузки прокатных станов. На секции Науч. совета Госснаба, 25.04.1966.
- vi. Математические методы оптимальной загрузки прокатных станов. На совещании по внедрению мат. методов и ЭВМ при загрузке прокатных станов и размещении заказов, Новосибирск, 24–26.05.1966. Опубл. в [7].
- vii. Выступление на Всесоюзной научно-технической конференции «Проблемы научной организации управления социалистической промышленностью», Москва, 07–10.06.1966.
- viii. Математические проблемы расчета и анализа оптимальных динамических моделей. В Институте экономики и статистики в Оксфорде, Англия, 27.06.1966.
- ix. Модель оптимальной замены оборудования в условиях стационарной неравномерной нагрузки. На Международном конгрессе математиков, Москва, 17–26.08.1966. Сообщ.: ЭММ. — 1966. — Т. 2, вып. 6. — С. 943.

- x. Оптимальная динамическая модель перспективного планирования. На совместном Европейском конгрессе Эконометрич. о-ва и Междунар. ин-та наук управл., Варшава, 02–07.09.1966. Кр. излож.: *Economika i organizacija prasy.* — 1966. — № 1. — С. 487.
- xi. Математические методы оптимальной загрузки прокатных станов. На Науч. совете Госснаба, 16.10.1966.
- xii. О долгосрочном планировании и прогнозировании. На Науч. сессии «Методологические проблемы долгосрочного экономического прогнозирования», организ. НИЭИ Госплана СССР и журн. «Плановое хозяйство», Москва, 14–17.12.1966. Кр. излож.: *План. хоз-во.* — 1967. — № 2. — С. 75; ВЭ. — 1967. — № 3. — С. 151.
- xiii. Некоторые теоретические вопросы построения системы пассажирских тарифов. На научно-технической конференции по принципам построения системы пассажирских тарифов на транспорте СССР и путям ее совершенствования, Москва, 19–20.12.1966. Опубл. в [1969, 2] и [1988, 7].
- xiv. Математические оптимальные модели в планировании развития отрасли и в технической политике. На I Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов и ЭВМ в отраслевом планировании и управлении, Новосибирск, 21–24.12.1966. Опубл. в [8] и [1967, 9]. Кр. излож.: ЭММ. — 1967. — Т. 3, вып. 3. — С. 464; *Вестн. АН.* — 1967. — № 5. — С. 110; ВЭ. — 1967. — № 10. — С. 105.
- xv. Математические методы оптимальной загрузки прокатных станов. На Пленарном Совете Госснаба, 25.12.1966.

## 1967

1. Функциональный анализ в нормированных пространствах: в 2 т. — Токио: Б.и., 1967. — 488 с. — Соавт.: Акилов Г. П.
2. Динамическая модель оптимального планирования // *Оптимальное планирование: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР].* — Новосибирск, 1967. — Вып. 8: Оптимальные динамические модели народнохозяйственного планирования. — С. 3–22.
3. Вопросы разработки и использования крупноагрегированной модели оптимального перспективного планирования // Там же. — С. 23–35. — Соавт.: Макаров В. Л.
4. Об исчислении нормы эффективности на базе однопродуктовой модели развития хозяйства // Там же. — С. 37–51.
5. Математические методы в решении хозяйственных задач // *Теория и практика хозяйственной реформы.* — М., 1967. — С. 159–173.
6. Математика в экономике // *Наука и человечество: Междунар. ежегодник, 1967.* — М., 1967. — С. 347–361. — Соавт.: Горстко А. Б.
7. Однопродуктовая динамическая модель при наличии мгновенной превращаемости фондов // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 174, № 3. — С. 522–525. — Соавт.: Глобенко И. Г.
8. Динамическая модель экономики // Докл. АН СССР. — 1967. — Т. 176, № 5. — С. 997–998. — Соавт.: Глобенко И. Г.
9. [Выступление на годичном собрании АН СССР. 6–7 февр. 1967 г.] // *Вестн. АН СССР.* — 1967. — № 3. — С. 202–203.
10. [Математические оптимальные модели в планировании развития отрасли и в технической политике: Докл. на I Всесоюз. конф. по применению экон.-мат. методов и ЭВМ в отраслевом планир. и упр., 21–24 дек. 1966 г.: Крат. излож.] // *Вестн. АН СССР.* — 1967. — № 5. — С. 110.
11. То же // *Вопр. экономики.* — 1967. — № 10. — С. 102–115.
12. Экстремальные состояния и экстремальные управления // *Вестн. ЛГУ.* — 1967. — № 7. *Математика. Механика. Астрономия.* Вып. 2. — С. 30–37. — Соавт.: Акилов Г. П., Рубинштейн Г. Ш.
13. Об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития хозяйства // *Экономика и мат. методы.* — 1967. — Т. 3, вып. 5. — С. 697–710. — Соавт.: Вайнштейн А. Л.
14. [Выступление на сессии «Методологические проблемы долгосрочного экономического прогнозирования» Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Совершенствование

методов и показателей народнохозяйственного планирования», НИЭИ при Госплане СССР и журнала «Плановое хозяйство», дек. 1966 г.] // План. хоз-во. — 1967. — № 2. — С. 75.

15. Extremal states and extremal controls // SIAM J. Control. — 1967. — Vol. 5, N 4. — P. 600–608. — Co-aut.: Akilov G. P. and Rubinshtein G. Sh.
16. Сфера обслуживания и наука // Правда. — 1967. — 20 марта.

Переводы:

[1959, 1] — Функциональный анализ в нормированных пространствах: в 2 т. — Токио: Б.и., 1967. — Соавт.: Акилов Г. П.

[1] — Extremal states and extremal controls // SIAM J. Control. — 1967. — Vol. 5, N 4. — P. 600–608. — Co-aut.: Akilov G. P. and Rubinshtein G. Sh.

[7] — A one-product dynamic model with instantaneous transformation of capital // Soviet Math. Dokl. — 1967. — Vol. 8. — Co-aut.: Globenko I. G.

[8] — A dynamic model of the economy // Soviet Math. Dokl. — 1967. — Vol. 8. — Co-aut.: Globenko I. G.

Доклады и выступления:

- i. Выступление на зональном координационном совещании по экономике и организации сельскохозяйственного производства Сибири, Новосибирск, янв. 1967 г.
- ii. Выступления о положении с вычислительной техникой и о математическом образовании на общем собрании отделения математики АН, 04–05.02.1967 г.
- iii. Математические модели социалистической экономики и экономическая реформа. На общем собрании отделения экономики АН 04–05.02.1967 г.
- iv. Выступление на общем собрании АН 06–07.02.1967 г. Опубл. в [9].
- v. Перспективы работы в области автоматизации программирования на базе крупноблочной системы. На семинаре в ЛОМИ, 11.02.1967 г. Опубл. в [1968, 3].
- vi. Модели роста экономики и норма эффективности. На объединенном семинаре ИМ и ЛЭМИ СО АН, 20.02.1967 г.
- vii. Выступление на заседании Научно-методического совета Госкомцен, 28.02.1967.
- viii. Об использовании математических моделей в ценообразовании на новую технику. На сессии Научного совета АН по ценообразованию «Совершенствование системы цен и ценообразования в связи с техническим прогрессом», 01.03.1967 г. Опубл. в [1968, 4].
- ix. Математико-экономические методы в повышении эффективности сельскохозяйственного производства. На Всесоюзном совещании «Математические методы и ЭВМ в повышении экономической эффективности оросительных систем», Новосибирск, 22–25.03.1967 г. Опубл. в [1968, 2].
- x. Возможности использования математических методов и ЭВМ в сельскохозяйственном производстве. На областной научно-производственной экономической конференции по вопросам экономики и организации с/х производства Новосибирской области, 28–29.03.1967 г.
- xi. Значение социологических исследований в разработке и реализации оптимального планирования и управления. На совещании «Количественные методы в социальных исследованиях», Сухуми, 17–20.04.1967. Опубл. в [1968, 6].
- xii. Об исчислении нормы эффективности на базе однопродуктовой модели развития хозяйства. На Всесоюзном симпозиуме по моделированию общественного производства, Новосибирск, 18–25.06.1967 г.
- xiii. Выступление по докладу Н. П. Федоренко на первом пленуме Научного совета АН по комплексной проблеме «Оптимальное планирование и управление народным хозяйством», Москва, 13–14.09.1967. Кр. излож.: ЭММ. — 1968. — Т. 4, вып. 1. — С. 146.
- xiv. Математические проблемы расчета и анализа оптимальных динамических моделей. Доклад в Центре по планированию при Правительстве Франции, Париж, окт. 1967 г.
- xv. Выступление на конференции по применению ЭММ и ЭВТ в планировании развития и размещения производства, Таллин, 20–22.12.1967. Сообщ.: ЭММ. — 1968. — Т. 4, вып. 2. — С. 295.

## 1968

1. Математическое оптимальное программирование в экономике. — М.: Знание, 1968. — 96 с. — (Новое в жизни, науке, технике. Сер. математика, кибернетика; № 8–9). — Соавт.: Горстко А. Б.
2. La Asignación Óptima de los Recursos Económicos. — Barcelona: Ed. Ariel, 1968. — VII–XXII, 308 p.
3. Пути применения математических методов в сельскохозяйственном производстве // Оптимальные модели орошения: Материалы совещ., Новосибирск, март 1967 г. — М., 1968. — С. 5–22.
4. Перспективы работы в области автоматизации программирования на базе крупноблочной системы // Автоматическое программирование, численные методы и функциональный анализ. — Л., 1968. — С. 5–15. — (Тр. Мат. ин-та; Т. 96).
5. Об использовании математических моделей в ценообразовании на новую технику // Совершенствование ценообразования и научно-технический прогресс. — М., 1968. — С. 46–50.
6. О путях дальнейшего совершенствования ценообразования // Итоги реформы цен и перспективы ценообразования: Тр. Объед. сес. науч. советов, 25–29 янв. 1968 г. — М., 1968. — С. 35–39.
7. Социология и экономика // Количественные методы в социальных исследованиях: Материалы совещ., Сухуми, 17–20 апр. 1967 г. — М., 1968. — С. 45–55. — (Информ. бюл. № 8. Сер. Материалы и сообщ.).
8. Сергей Львович Соболев: (К шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1968. — Т. 23, вып. 5. — С. 177–186. — Соавт.: Бицадзе А. В., Лаврентьев М. А.
9. Используя способности каждого: [О рационал. использ. рабочей силы] // Труд. — 1968. — 12 мая.
10. Ред.: Оптимальные модели орошения: Материалы совещ., Новосибирск, март 1967 г. / Науч. ред. Л. В. Канторович, П. Я. Полубаринова-Кочина, Л. В. Дудин-Барковский. — М.: Ин-т математики СО АН СССР, 1968. — 270 с.
11. А. с. 209032. СССР. Арифметическое устройство цифровой вычислительной машины. — № 1006197/26–24, заявл. 10.05.65; опубл. 17.01.68. — Соавт.: Фет Я. И., Иловайский И. В.

## Переводы:

[1959, 2] — La asignación Óptima de los recursos Económicos. — Barcelona: Ed. Ariel, 1968. — VII–XXII, 308 p.

## Доклады и выступления:

- i. О путях дальнейшего совершенствования ценообразования. На совместной сессии Научного совета АН по ценообразованию и Научно-методического совета Госкомцен, 25–29.01.1968. Сообщ.: ВЭ. — 1968. — № 6. — С. 154.
- ii. Выступление на Всесоюзном совещании по совершенствованию планирования и улучшению экономической работы в народном хозяйстве, Москва, Госплан СССР, 14–17.05.1968.
- iii. Выступление на Всесоюзной конференции по проблемам топливно-энергетического баланса СССР, Москва, май 1968 г.
- iv. Выступления по докладам на II Международном коллоквиуме «Методы оптимизации», Новосибирск, 19–25.06.1968.
- v. Выступление на Первой конференции молодых экономистов и социологов Сибири и Дальнего Востока, окт. 1968 г.
- vi. Об оценке нормы эффективности на основе однопродуктовой модели [ответы на замечания А. Л. Лурье]. На семинаре в ЦЭМИ АН СССР, 19.11.1968 г. Опубл. в [1970, 3].
- vii. Выступление на Всесоюзном научно-техническом семинаре-совещании по вопросам использования экономико-мат. методов и электронно-вычислительной техники в планировании и управлении народным хозяйством, Москва, ноябрь 1968 г.

- viii. Выступление на Всесоюзном научно-техническом совещании «Совершенствование планирования и учета транспортных издержек и оптимизация транспортно-экономических связей в народном хозяйстве», Москва, 17–19.12.1968.

## 1969

1. Optimálne Využitie Zdrojov. — Bratislava: Vyd-vo SAV, 1969. — 302 p.
2. Некоторые теоретические вопросы построения системы пассажирских тарифов // Система пассажирских тарифов на транспорте СССР и пути ее совершенствования: Материалы науч.-техн. конф. (19–20 дек. 1966 г.). — М., 1969. — С. 113–117.
3. Опыт оптимальной загрузки прокатных и трубных станков заказами на металлопродукцию и связанные с ним выводы об организации оптовой торговли средствами производства // 6 Международный симпозиум по материально-техническому снабжению, Тбилиси, сент.-окт. 1969 г. — М., 1969. — С. 3–10.
4. Краткий очерк научной, научно-организационной, педагогической и общественной деятельности академика С. Л. Соболева // Шапарнева М. А. Сергей Львович Соболев: К 60-летию со дня рождения. — Новосибирск, 1969. — С. 3–8. — Соавт.: Лаврентьев М. А., Бицадзе А. В.
5. Mathematical economics and optimal planning // Contemporary Soviet Economics: A Collection of Readings from Soviet Sources. — New York, 1969. — Vol. 1. — P. 40–53.
6. О возможности повышения производительности универсальных ЦВМ при решении экономико-математических задач // Экономика и мат. методы. — 1969. — Т. 5, вып. 2. — С. 276–279. — Соавт.: Фет Я. И.
7. [Выступление на пленарном заседании Всесоюзного совещания актива организаций Госснаба СССР, 30 июня — 1 июля 1969 г.] // Матер.-техн. снабжение. — 1969. — № 10. — С. 68–71.
8. Цена времени // Коммунист. — 1969. — № 10. — С. 82–94. — Соавт.: Богачев В.
9. Математика нужна всем // Правда. — 1969. — 14 июля. — (Пробл. и суждения).
10. Динамический подход и третья компонента // За науку в Сибири. — 1969. — 30 июля. — С. 2.
11. Математические методы — в народное хозяйство: [Беседа] // Сов. Молдавия. — 1969. — 31 июля.

## Переводы:

[1959, 2] — Optimálne Využitie Zdrojov. — Bratislava: Vyd-vo SAV, 1969. — 302 p.

[1966, 9] — Mathematical economics and optimal planning // Contemporary Soviet Economics: A Collection of Readings from Soviet Sources. — New York, 1969. — Vol. 1. — P. 40–53.

[1967, 10] — Die Mathematik in der Oekonomik // Wissenschaft und Menschheit. — Urania-Verl. Leipzig/Jena/Berlin. — 1969. — P. 329–350. — Co-aut.: Gorstko A. B.

## Доклады и выступления:

- i. Выступление на Всесоюзном симпозиуме «Исследование систем», Москва, 15–17.01.1969.
- ii. Перспективы применения экономико-математических методов в социалистическом сельском хозяйстве. На Всесоюзном научно-техническом совещании по проблеме «Внедрение в с.-х. производство и использование в экономических исследованиях мат. методов и современной выч. техники», Москва, 21–24.01.1969.
- iii. Выступление на Всесоюзном совещании работников ценообразования по докладу Председателя Госкомцен В. К. Ситнина, Москва, 04–06.02.1969.
- iv. Выступление на годичном собрании Отделения экономики АН, март 1969 г. Кр. излож.: ВЭ. — 1969. — № 5. — С. 151.
- v. Выступление на Всесоюзном научно-техническом совещании по рациональному использованию запасов полезных ископаемых при их добыче, Москва, весна 1969 г.
- vi. О значении оптимального планирования в некоторых актуальных вопросах экономики Сибири. На конференции по развитию и размещению производительных сил Сибири, Новосибирск, 20–25.05.1969.
- vii. Выступление на топливно-энергетич. секции. Там же, 22.05.

- viii. Организационные аспекты оптимального планирования. На Всесоюзной конференции по математическому программированию, Новосибирск, 26–31.05.1969.
- ix. Взаимосвязь отдельных частей оптимального программирования. Там же.
- x. Выступление на Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики, Новосибирск, 9–13.06.1969.
- xi. Выступление на Всесоюзной школе по оптимизации, Кишинев, июль 1969 г.
- xii. Выступление по докладу Председателя Госснаба В. Э. Дымшица на совещании актива Госснаба, Москва, 30.06–01.07.1969.
- xiii. Выступление на VI Междунар. симпозиуме по материально-техническому снабжению, Тбилиси, сент.–окт. 1969 г. Опубл. в [3].
- xiv. Выступление на Всероссийской научной конференции «Экономическая реформа и улучшение торгового обслуживания населения в городах», Ярославль, 9–12.12.1969 г.

Рукописи:

1. Ответ на возражения профессора А. Г. Куроша по поводу предложений о подготовке математических кадров, выдвинутых в моей статье в «Правде» 14 июля 1969 г. Опубл. в [2004, 4], С. 219–224.

### 1970

1. Математико-экономический анализ плановых решений // Материалы к заседанию секции оптимального планирования и управления сельским хозяйством Научного совета АН СССР и секции экономико-математического моделирования Ученого совета ВНИИ кибернетики МСХ СССР, 9–14 февр. 1970 г. — Новосибирск, 1970. — С. 3–31. — Соавт.: Вирченко М. И.
2. Модели роста управляемой экономики // Доклады, представленные на симпозиум по моделированию народного хозяйства, Новосибирск, 1970. — Новосибирск, 1970. — С. 3–29.
3. O výpočte normy efektívnosti na základe jednodukčného modelu rozvoja hospodárstva // Investície, Rovnováha, Optimálny Rast: Zborník Stat'i Svetových Ekonomov. — Bratislava, 1970. — S. 297–315. — Co-aut.: Vaňstein A. L.
4. Глеб Павлович Акилов: (К пятидесятилетию со дня рождения) // Оптимальное планирование: сб. тр. — Новосибирск, 1970. — Вып. 17. — С. 7–9. — Совм. с др.
5. Оптимальное чередование основного и модифицированного процессов Ньютона — Канторовича // Там же. — С. 10–28.
6. Статистическая модель сейсмичности и оценка основных сейсмических эффектов // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1970. — № 5. — С. 85–102. — Соавт.: Молчан Г. М., Кейлис-Борок В. И., Вилькович Е. В.
7. Еще об исчислении нормы эффективности на основе однопродуктовой модели развития народного хозяйства // Экономика и мат. методы. — 1970. — Т. 6, вып. 3. — С. 407–415. — Соавт.: Вайнштейн А. Л.
8. Об оценке эффективности капитальных затрат // Экономика и мат. методы. — 1970. — Т. 6, вып. 6. — С. 811–826. — Соавт.: Богачев В. Н., Макаров В. Л.
9. Методы оптимизации и математические модели экономики // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25, вып. 5. — С. 107–109.
10. Дифференциальные и функциональные уравнения, возникающие в моделях экономической динамики // Сиб. мат. журн. — 1970. — Т. 11, № 5. — С. 1046–1059. — Соавт.: Макаров В. Л.
11. Вопросы оптимального планирования // Пром-сть Армении. — 1970. — № 5. — С. 49–50.
12. Опыт оптимальной загрузки прокатных и трубных станов // Матер.-техн. снабжение. — 1970. — № 4. — С. 87–91.
13. Der Preis der Zeit // Sowjetwissenschaft. Gesellw. Beitr. — 1970. — Н. 1. — S. 81–95. — Co-aut.: Bogachev V.
14. Современные проблемы математической экономики // За науку в Сибири. — 1970. — 11 марта. — С. 4–7. — Соавт.: Макаров В. Л., Рубинштейн Г. Ш.
15. Город в зоне землетрясения: Экономика сейсмостойкого строительства // Правда. — 1970. — 28 июля. — Совм. с др.

## Доклады и выступления:

- i. Экономические условия технического прогресса. На Коллегии ГКНТ, 02.02.1970.
- ii. Математико-экономический анализ плановых решений. На заседании секции сельского хозяйства Научного совета АН по оптимальному планированию и управлению и секции «Экономико-математического моделирования» Ученого совета ВНИИ кибернетики МСХ СССР, 09–14.02.1970. Соавт.: Вирченко М. И. Оpubл. в [2].
- iii. Технический прогресс и экономическая наука. Выступление на Общем собрании АН, 03–05.03.1970.
- iv. Современные проблемы математической экономики. На научной сессии ИМ СО АН, апр. 1970 г.
- v. Выступление на совещании по вопросам методики и практики совместной оптимизации топливно-энергетич. балансов страны и отдельных экономических районов, Тбилиси, 07–09.04.1970.
- vi. Экономико-математический анализ в планировании развития сельскохозяйственного производства. На Всесоюзном совещании «Применение экономико-математических методов и ЭВМ в сельском хозяйстве», Вильнюс, 02–05.06.1970. Кр. излож.: ЭММ. — 1970. — Т. 6, вып. 5. — С. 792; ВЭ. — 1970. — № 10. — С. 155.
- vii. Модели роста управляемой экономики. На Международном симпозиуме по моделированию народного хозяйства, Новосибирск, 22–26.06.1970. Оpubл. в [1]. Кр. излож.: ЭММ. — 1970. — Т. 6, вып. 6. — С. 942. Сообщ.: Советская Сибирь. — 1970. — 1 июля.
- viii. Выступление на пленарном заседании по докладу Р. Г. Кравченко. На XIV Международной конференции экономистов-аграрников, Минск, 24.08.–02.09.1970. Сообщ.: Информационный бюллетень конф. № 6, 30.08.1970.
- ix. Выступление на секции «Эконометрические методы в сельском хозяйстве». Там же.
- x. Выступление на симпозиуме по большим системам энергетики, Иркутск, сент. 1970 г.
- xi. Значение социологических исследований в разработке принципов оптимального планирования и управления. На Международном конгрессе социологов, Варна, сент. 1970 г. Сообщ.: Sociological abstracts, 1970, E 3890/ SCT 0170.
- xii. Выступление на научном симпозиуме по проблеме регионального долгосрочного экономического прогнозирования (на примере Сибири и Дальнего Востока), Кемерово, 5–10.10.1970.
- xiii. Выступление на общем собрании Отделения экономики по докладу Н. П. Федоренко «О совершенствовании системы перспективного планирования», ноябрь 1970 г.
- xiv. Об оценке природных ресурсов. Выступление в дискуссии на тему «Экономические проблемы оптимизации природопользования» на Науч. совете АН по оптимальному планированию 17–18.12.1970.
- xv. Об учете фондоемкости в ценах. На Научно-методическом совете Госкомцен, 21.12.1970 г.

## 1971

1. Рациональный раскрой промышленных материалов. — 2-е изд., испр. и доп. — Новосибирск: Наука, 1971. — 299 с. — Соавт.: Залгаллер В. А.
2. Статистические вопросы оценки поверхностных эффектов, связанных с сейсмичностью // Алгоритмы интерпретации сейсмических данных. — М., 1971. — С. 80–128. — (Вычисл. сейсмология; Вып. 5). — Соавт.: Молчан Г. М., Вилькович Е. В., Кейлис-Борок В. И.
3. Математико-экономический анализ плановых решений и экономические условия их реализации // Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. — Новосибирск, 1971. — Ч. 1. — С. 5–40. — Соавт.: Вирченко М. И.
4. Значение электронно-вычислительной техники в деле совершенствования ценообразования // Применение экономико-математических методов и ЭВМ в ценообразовании и планировании цен в СССР: (Материалы к Междунар. науч. конф.). — М., 1971. — С. 43–67.
5. Линейное программирование // Математика и кибернетика в экономике: слов.-справ. — М., 1971. — С. 44–49. — Соавт.: Романовский И. В.
6. Математическое программирование // Там же. — С. 64–67. — Соавт.: Романовский И. В.
7. Симплексный метод // Там же. — С. 152–155. — Соавт.: Горстко А. Б.

8. Управляющие параметры в экономической системе // 5 Всесоюзное совещание по проблемам управления, Москва, 1971 г.: реф. докл. — М., 1971. — Ч. 1. — С. 195–198. — Соавт.: Макаров В. Л.
9. О математической подготовке экономистов и инженеров-экономистов // Сб. науч.-метод. ст. по математике: Пробл. преподавания математики в вузах. — 1971. — Вып. 1. — С. 27–32. — Соавт.: Пинскер А. Г.
10. О ценах, тарифах и эффективности экономики // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1971. — № 1. — С. 23–30.
11. Ред.: Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч. 1 / Науч. ред. Л. В. Канторович, В. П. Можин. — Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1971. — 182 с.
12. От редакторов // Там же. — С. 3–4. — Соавт.: Можин В. П.
13. А. с. 300115. Цифровое вычислительное устройство. — Заявл. 18.03.69; опубл. 13.01.71. — Соавт.: Толстьев В. П., Фет Я. И.

Переводы:

[1970, 3] — Once Again on Calculating the Norm of Effectiveness on the Basis of a OneProduct National Economic Development Model. — MATEKON. — N 2, Winter 1970–71.

[1970, 4] — Estimating the Effectiveness of Capital Expenditures. — MATEKON. — N 1, Fall 1971.

Рукописи:

1. Об универсальном машиностроении. Записка в ГКНТ. Машинопись, 7 стр.
2. Об импорте оборудования. Записка в ГКНТ. Машинопись, 2 стр.

Доклады и выступления:

- i. Воспоминания о В. В. Новожилове. На годичном собрании Ленингр. филиала Научного совета АН СССР по проблеме «Экономическая эффективность основных фондов, капитальных вложений и новой техники», посвященного памяти В. В. Новожилова 19.01.1971 г. Опубл. в [2004, 4], С. 230–233. Кр. излож.: ВЭ. — 1971. — № 6. — С. 155–157.
- ii. Выступление на Всесоюзном совещании «Информационно-вычислительная система планирования, учета, отчетности и оперативного управления сельскохозяйственным производством», Москва, 02–05.03.1971.
- iii. Проблемы математической экономики. На конференции по математической экономике, Новосибирск, 26–31.05.1971.
- iv. Выступление на «Круглом столе» по моделям экономики. Там же.
- v. Значение электронно-вычислительной техники для совершенствования ценообразования. На международной конференции по применению экономико-математических методов и ЭВМ в ценообразовании и планировании цен, Москва, 20–22.09.1971. Опубл. в [7] и [1974, 5]. Кр. излож.: ЭММ. — 1972. — Т. 8, вып. 1. — С. 149; ВЭ. — 1971. — № 12. — С. 144.
- vi. Управляющие параметры в экономической системе. На секции «Управление экономическими системами» V Всесоюзного совещания по проблемам управления, Москва, 04–08.10.1971. Соавт.: Макаров В. Л. Реферат опубл. в [4]. Кр. излож.: ЭММ. — 1972. — Т. VIII, вып. 2. — С. 302.
- vii. Экономические показатели сельскохозяйственных предприятий. На научно-методическом совещании стран — членов СЭВ по проблеме «Разработка и внедрение математических методов и электронно-вычислительной техники в сельском хозяйстве», Вильнюс, 18–22.10.1971. Опубл. в [8].
- viii. Выступление на Всесоюзном симпозиуме «Роль сферы услуг в воспроизводстве общественного продукта», Таллин, 30.11–03.12.1971.
- ix. Математические проблемы оптимального планирования и управления. На Первой конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством, Москва, 13–16.12.1971. Соавт.: Гольштейн Е. Г., Макаров В. Л., Романовский И. В. Опубл. в [1972, 3].



- Кр. излож.: Успехи мат. наук. — 1972. — Т. XXVII, вып. 3 (165). — С. 229; ЭММ. — 1972. — Т. VIII, вып. 3. — С. 457; ВЭ. — 1972. — № 6. — С. 147–150.
- x. О математическом обеспечении «АСУ-Металл». На Науч. совете Госснаба, Москва, 20.12.1971. Оpubл. в [1972, 4].

## 1972

1. Оптимальные решения в экономике. — М.: Наука, 1972. — 231 с. — Соавт.: Горстко А. Б.
2. Croirea Economică a Materialelor în Industrie. — București: Ed. Tehnică, 1972. — 248 p. — Co-aut.: Zalgaller V. A.
3. Пути развития вычислительных средств для решения больших задач оптимального планирования и управления // Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1972. — Вып. 6. — С. 5–7.
4. Évaluation de l'efficacité d'investissements de capitaux // Économic Mathématique en URSS. — Paris, 1972. — С. 69–99. — (Cah. de l'ISEA. Sér. G N 30. Écon. et Soc.; Т. 6, N 1). — Co-aut.: Bogachev V. N. and Makarov V. L.
5. Control parameters in an economic system // Proceedings of the IFAC 5th World Congress, Paris, June 12–17, 1972. Pt 3. Ecology and Systems Engineering: Large Scale: Sensitivity Optimization and Adaptation Theory. — Pittsburgh, 1972. — Paper 28.4. — P. 1–5. — Co-aut.: Makarov V. L.
6. Современный математический аппарат управления экономикой // Вестн. АН СССР. — 1972. — № 10. — С. 70–79. — Соавт.: Гольштейн Е. Г., Макаров В. Л., Романовский И. В.
7. О математическом обеспечении АСУ «Металл» // Приборы и системы упр. — 1972. — № 12. — С. 8–10.
8. Возраст открытий: Какой он — молодой ученый // Смена. — 1972. — № 16. — С. 15. — (Анкета журн. «Смена»).
9. Предисловие к русскому изданию // Моришима М. Равновесие, устойчивость, рост: Многоотраслевой анализ: пер. с англ. — М., 1972. — С. 5–7.
10. Ред.: Вопросы анализа плановых решений в сельском хозяйстве. Ч. 2: Экономическая оптимизация в орошении / Науч. ред. — Новосибирск: Изд-во АН СССР, 1972. — 205 с.
11. Пат. 92143. ГДР: Rechenwerk. — Заявл. 20.10.71; опубл. 25.08.72. — Co-aut.: Tolstjev V. P. and Fet Y. I.

## Переводы:

[1970, 4] — Évaluation de l'efficacité d'investissements de capitaux // Économic Mathématique en URSS. — Paris, 1972. — P. 69–99. — (Cah. de l'ISEA. Sér. G N 30. Écon. et Soc.; Т. 6, N 1). — Co-aut.: Bogachev V. N. and Makarov V. L.

[1971, 1] — Croirea Economică a Materialelor în Industrie. — București: Ed. Tehnică, 1972. — 248 p. — Co-aut.: Zalgaller V. A.

## Доклады и выступления:

- i. Современный математический аппарат управления экономикой. На заседании Научного совета по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством, посвященном 60-летию Л. В. Канторовича, Москва, янв. 1972 г.
- ii. Экономическая оценка и плата за ресурсы. На Науч. совете АН по хозрасчету, май 1972 г.
- iii. Выступление на Второй науч.-техн. конференции «Проблемы научной организации управления социалистической промышленностью», Москва, ГКНТ, 04–06.07.1972.
- iv. Оптимизационные модели и экономическая практика. На Европейской конференции эконометрического общества, Будапешт, 05–08.09.1972. Кр. излож.: ЭММ. — 1973. — Т. IX, вып. 4. — С. 790–791.
- v. Управляющие параметры в экономической системе. В Институте экономики Венгерской АН, 10.09.1972.
- vi. Выступление на симпозиуме «Теория больших систем», Иркутск, 29–30.09.1972.

- vii. О методологических проблемах долгосрочного планирования. Выступление в дискуссии «Методические вопросы разработки долгосрочного плана развития СССР» на расширенном пленуме Научного совета АН по комплексной проблеме «Оптимальное планирование и управление народным хозяйством», Москва, 25.10.1972. Оpubл. в [1973, 3]. Кр. излож.: ЭММ. — 1973. — Т. IX, вып. 2. — С. 367.
- viii. Модели роста и их использование в долгосрочном планировании и прогнозировании. На конференции Международной экономич. ассоциации по долгосрочному планированию и прогнозированию, Москва, 11–16.12.1972. Соавт.: Макаров В. Л. Оpubл. в [8] и [1975, 1]. Крат. излож.: Вестн. АН СССР. — 1973. — № 4. — С. 68; ЭММ. — 1973. — Т. IX, вып. 3. — С. 587; ВЭ. — 1973. — № 4. — С. 157.
- ix. Выступления в дискуссиях. Там же. Оpubл. в [1975, 2].
- x. Выступление на Всесоюзном совещании «Применение выч. техники и АСУ на предприятиях и в отраслях промышленности», Москва, 1972 г.

## 1973

1. Сейсмический риск и принципы сейсмического районирования // Вычислительные и статистические методы интерпретации сейсмических данных. — М., 1973. — С. 3–20. — (Вычислит. сейсмология; Вып. 6). — Соавт.: Кейлис-Борок В. И., Молчан Г. М.
2. Рубинштейн Геннадий Соломонович (Шлёмович): К 50-летию со дня рождения // Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1973. — Вып. 9. — С. 5–8. — Совм. с др.
3. Однопродуктовая динамическая модель экономики, учитывающая изменение структуры фондов при наличии технического прогресса // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 211, № 6. — С. 1280–1283. — Соавт.: Жиянов В. И.
4. [Модели роста и их применение в долгосрочном планировании: Докл. на конф., посвящ. долгосроч. планир. и прогнозированию, провед. Междунар. экон. ассоц., Москва, 11–16 дек. 1972 г.: Крат. излож.] // Вестн. АН СССР. — 1973. — № 4. — С. 68. — Соавт.: Макаров В. Л.
5. Плодотворность взаимопроникновения естественных и общественных наук // Вопр. философии. — 1973. — № 10. — С. 39–41.
6. Ученый, педагог, практик: [К 50-летию со дня рождения Г. С. Рубинштейна] // За науку в Сибири. — 1973. — 16 мая. — С. 3. — Совм. с др.
7. А. с. 409222. Устройство для умножения. — Заявл. 09.02.71, № 1624119 / 18–24; Оpubл. 30.11.73. — Соавт.: Толстьев В. П., Фет Я. И.
8. Пат. 1357598. Великобритания: Digital arithmetic units. — Заявл. 9.11.71, 52017 / 71. Heading 04 A; Оpubл. в 1973 г. — Co-aut.: Tolstjev V. P. and Fet Y. I.
9. Пат. 3758767. США: Digital serial arithmetic unit. — Заявл. 19.10.71. Ser. N 190, 610; Оpubл. 11.09.73. — Co-aut.: Tolstjev V. P. and Fet Y. I.

## Переводы:

[1] — A one-product dynamic model of economics, taking account of the change in structure of stocks with industrial progress // Soviet Math. Dokl. — 1973. — Vol. 14, N 4. — P. 1231–1235. — Co-aut.: Zhiianov V. I.

## Доклады и выступления:

- i. Основные положения системы оптимального размещения заказов потребителей. На Всесоюзном совещании участников разработки АСУ «Металл» и ОАСУ «Чермет», Москва, 29–31.01.1973.
- ii. Динамические модели научно-технического прогресса. На шестой зимней школе по математическому программированию и смежным вопросам, Дрогобыч, 24.01–05.02.1973. Соавт.: Жиянов В. И. Оpubл. в [1975, 5]. Кр. излож.: Успехи мат. наук. — 1973. — Т. XXVIII, вып. 6 (174). — С. 234–236.
- iii. Выступление на Межведомственном совете по ценам по докладу Председателя Госкомцен В. К. Ситнина, 05.02.1973.

- iv. Выступление на Научном совете АН по комплексной проблеме «Оптимальное планирование и управление народным хозяйством» в дискуссии о совершенствовании кредитных отношений, Москва, 26.02.1973. Кр. излож.: ЭММ. — 1973. — Т. IX, вып. 4. — С. 789; ВЭ. — 1973. — № 6. — С. 151.
- v. Выступление на общем собрании отделения экономики АН о применении методов оптимизации в текущем планировании и управлении народным хозяйством, 27.02.1973. Кр. излож.: ЭММ. — 1973. — Т. IX, вып. 4. — С. 785.
- vi. Модели оптимизации народнохозяйственного планирования. На школе в ГВЦ Госплана СССР, март 1973 г.
- vii. Плодотворность взаимопроникновения естественных и общественных наук. На «Круглом столе» по вопросам взаимодействия естественных и общественных наук в редакции журнала «Вопросы философии», апр. 1973 г. Оpubл. в [5].
- viii. О научно-техническом уровне отраслевых АСУ. Выступление на Коллегии ГКНТ 19.04.1973.
- ix. Об изобретательской работе. Выступление на коллегии ГКНТ по докладу Председателя Госкомизобретений Ю. Е. Максарова, 15.05.1973.
- x. Выступление на Межведомственном совете по ценам по докладу Ю. В. Яковца «Проблемы развития системы цен в десятой пятилетке и в долгосрочной перспективе», 25.05.1973.
- xi. Выступление на расширенной сессии Научного совета АН по комплексной проблеме Научные основы хозяйственного расчета, май 1973 г. Сообщ.: ВЭ. — 1973. — № 8. — С. 159.
- xii. Перспективы крупноблочного подхода в прикладной математике, программировании и вычислительной технике. На совещании «Математические основы и техническая реализация крупноблочных вычислительных процессов», Ленинград, ЛОМИ, 28–29.05.1973. Оpubл. в [1974, 3].
- xiii. Экономико-математические модели производственно-транспортного типа в материально-техническом снабжении. На VIII Международном симпозиуме по материально-техническому снабжению, Румыния, Северная Мангалия, 24–30.09.1973. Оpubл. в [4].
- xiv. Теоретические основы установления твердых фиксированных платежей. На конференции «Экономическая оценка земель и ее применение», Рига, 12–13.11.1973. — Соавт.: Вирченко М. И.
- xv. Выступление на Всесоюзном симпозиуме по имитационному моделированию экономических систем, Москва, 26–28.11.1973.
- xvi. Прогресс экономической науки на вооружение хозяйственного руководства. На совещании по экономической науке в ЦК КПСС 29.11.1973. Оpubл. в [1974, 9].
- xvii. Выступление на Всесоюзной научной конференции «Проблемы экономической эффективности научно-технического прогресса», Москва, 17–19.12.1973.
- xviii. Выступление на Всесоюзной научной конференции «Проблемы совершенствования системы цен и методов ценообразования в связи с разработкой долгосрочного перспективного и пятилетнего (1976–1980) планов развития народного хозяйства СССР», Москва, 19–21.12.1973.
- xix. Выступление на конференции «Опыт и перспективы разработки и внедрения АСУ МТС», Москва, 25–26.12.1973.

## 1974

1. Значение электронно-вычислительной техники для совершенствования ценообразования // Математические методы и ЭВМ в ценообразовании и планировании цен: (Материалы Международн. науч. конф., Москва, сент. 1971 г.). — М., 1974. — С. 127–136.
2. Комплексный подход к реализации массовых вычислений // Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1974. — Вып. 13. — С. 5–11. — Соавт.: Петрова Л. Т., Фет Я. И.
3. Перспективы крупноблочного подхода в прикладной математике, программировании и вычислительной технике // Численные методы и автоматическое программирование. — Л., 1974. — С. 5–11. — (Зап. науч. семинаров ЛОМИ; Т. 48).
4. Об одном подходе к расчету цен и рентных оценок земли в условиях сложившегося размещения сельского хозяйства // Тезисы докладов Всесоюзного научно-технического сове-

- пания «Автоматизированная система управления в сельском хозяйстве», Минск, 1–3 апр. 1975 г. Секция 1: Подсистема планирования и оперативного управления в АСУ-сельхоз. — М., 1974. — С. 21–27.
5. Экономические проблемы научно-технического прогресса // Экономика и мат. методы. — 1974. — Т. 10, вып. 3. — С. 432–448.
  6. Роль транспортного фактора при размещении производства // Вопр. экономики. — 1974. — № 3. — С. 79–90. — Соавт.: Журавель А.
  7. Владимир Иванович Соболев: (К шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, вып. 1. — С. 247–250. — Совм. с др.
  8. Оптимальное планирование: Нерешенные задачи // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1974. — № 5. — С. 3–9.
  9. Функции воспитания научного мышления курса математики во втузе: (Прения по докл. А. Д. Мышкиса и Б. О. Солоноуца «О программе и стиле преподавания математики во втузах») // Сб. науч.-метод. ст. по математике: Пробл. преподавания математики в вузах. — 1974. — Вып. 4. — С. 11–13.
  10. The role of the transport factor in the location of production // Probl. Econ. — 1974. — Vol. 17, N 7. — С. 3–24. — Co-aut.: Zhuravel A.
  11. Рец.: Новое исследование по теоретическим основам оптимального планирования: [Волконский В. А. Принципы оптимального планирования. М., 1973. 239 с.] // Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1974. — № 6. — С. 120–124. — Соавт.: Гурвич Ф. Г.
  12. Рец.: Лурье А. Л. Экономический анализ моделей планирования социалистического хозяйства. М., 1973. 435 с. // Экономика и мат. методы. — 1974. — Т. 10, вып. 4. — С. 833–836. — Соавт.: Богачев В. Н.
  13. Достижения экономической науки — в практику // Экон. газ. — 1974. — № 26. — С. 14.
  14. А. с. 427390. Электромеханическое запоминающее устройство. — № 1635542/18–24, заявл. 19.03.71; опубл. 5.05.74. — Соавт.: Куликов Б. И., Фег Я. И.

Переводы:

[2] — The role of the transport factor in the location of production // Probl. Econ. — 1974. — Vol. 17, N 7. — С. 3–24. — Co-aut.: Zhuravel' A.

Доклады и выступления:

- i. Опыт оптимальной загрузки прокатных и трубных станов и занарядки заказов на металлопродукцию и связанные с ним выводы об организации оптовой торговли средствами производства. На совещании разработчиков АСУ «Металл», Днепропетровск, 29–31.01.1974.
- ii. Выступление на международном симпозиуме ученых и специалистов стран — членов СЭВ и СФРЮ «Научно-техническая революция и социальный прогресс», Москва, янв.–февр. 1974 г.
- iii. Выступление на Всесоюзном совещании по проблемам экономич. эффективности АСУ, Москва, ГКНТ и АН, февр. 1974 г.
- iv. Выступление на советско-венгерском симпозиуме по вопросам совершенствования управления народным хозяйством, Москва, 14–16.03.1974 г.
- v. Выступление на Отд. физ.-техн. пробл. энергетики АН, 21.03.1974 г.
- vi. Динамические модели научно-технического прогресса. На международной конференции «Моделирование экономических процессов», Ереван, 15–20.04.1974 г. Опубл. в [1975, 4]. — Соавт.: Жиянов В. И.
- vii. Функции воспитания научного мышления курса математики во втузе. На Пленуме Научно-методического совета по математике МВО, 01–03.04.1974 г.
- viii. Динамические модели технологических нововведений. На 7-й конференции ИФИП «Методы оптимизации», Новосибирск, 01–07.07.1974 г. Опубл. в [1975, 13]. Соавт.: Жиянов В. И.
- ix. Dynamic models of technological changes. Доклад на IV Всемирном конгрессе экономистов, Будапешт, 19–24.08.1974 г. Опубл. в [11].
- x. Выступление в дискуссии по докладу Н. П. Федоренко об экономической оценке природных ресурсов на совместном заседании Секции наук о земле и Научного совета АН по проблемам

биосферы, Москва, 17.10.1974 г. Крат. излож.: ЭММ. — 1975. — Т. 11, вып. 3. — С. 603.

- xi. Выступление в дискуссии по использованию систем моделей в планировании на Международном семинаре Европейской экономической комиссии, Москва, 02–11.12.1974 г. Сообщ.: ЭММ. — 1975. — Т. 11, вып. 3. — С. 601.
- xii. Выступление на Всесоюзной конференции «Итоги экономических экспериментов в отраслях народного хозяйства», Москва, 12.1974 г. Крат. излож.: ВЭ. — 1975. — № 4. — С. 154; Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1975. — № 6. — С. 161–162.

### 1975

1. Модели роста и их применение в долгосрочном планировании и прогнозировании: [Докл. и дискус.] // Долгосрочное планирование и прогнозирование: Материалы конф. Междунар. экон. ассоц., Москва, дек. 1972 г. — М., 1975. — С. 164–181, 414–415. — Соавт.: Макаров В. Л.
2. [Выступления по докладам Н. П. Федоренко, И. Хэтени, А. Г. Аганбегяна, Э. Мэнсфилда и Х. Ожака] // Там же. — С. 360–361, 420–421, 483–484, 512–514.
3. Математические методы в экономике // Будущее науки. Перспективы, гипотезы, нерешенные проблемы: Междунар. ежегодник. — М., 1975. — Вып. 8. — С. 224–234. — Соавт.: Романовский И. В.
4. Динамические модели научно-технического прогресса // Тр. Международной конференции «Моделирование экономических процессов», Ереван, апр. 1974 г. — М., 1975. — С. 7–15. — Соавт.: Жиянов В. И.
5. То же // Тр. Шестой зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. — М., 1975. — С. 64–84.
6. Dynamic models of technological changes // Optimization Techniques: IFIP Techn. Conf., Novosibirsk, July 1–7, 1974. — Berlin etc., 1975. — P. 42–47. — (Lecture Notes in Computer Sci.; N 27). — Co-aut.: Zhiyanov V. I.
7. [Выступление на Всесоюзной научной конференции «Итоги экономических экспериментов в отраслях народного хозяйства и перспективы дальнейшего совершенствования экономического механизма хозяйственной реформы», дек. 1974 г.: Крат. излож.] // Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1975. — № 6. — С. 161–162.
8. Putting the achievements of economic science into practice // Probl. Econ. — 1975. — Vol. 18, N 6. — P. 3–9.
9. Математические методы — экономике: [К присуждению Л. В. Канторовичу и Т. Купмансу Нобелев. премии по экономике 1975 г.] [Беседа] // Лит. газ. — 1975. — 22 окт. — С. 13.
10. Ред.: Математика и кибернетика в экономике: слов.-справ. — 2-е изд., перераб. и доп. / Чл. редкол. — М.: Экономика, 1975. — 700 с. — Совм. с др.
11. Предисловие [редколлегии] // Там же. — С. 3–4.

Переводы:

[1974, 9] — Putting the achievements of economic science into practice // Probl. Econ. — 1975. — Vol. 18, N 6. — P. 3–9.

Доклады и выступления:

- i. Выступление на Отд. экономики АН по докладу А. М. Бирмана, 16.01.1975.
- ii. Выступление по коллективному докладу «О государственной сети вычислительных центров» на Коллегии ГКНТ, 11.02.1975.
- iii. Выступление на совещании в Госкомцен «Усиление роли цен в стимулировании научно-технического прогресса», 14.02.1975.
- iv. Цены на принципиально новую продукцию. На Междуведомственном совете по ценам, 19.02.1975 г. Крат. излож.: Изв. АН. Сер. экон. — 1976. — № 1. — С. 145–146.
- v. Обоснование цен и рентных оценок земли для целей оптимального планирования. На совещании «Автоматизированная система управления в сельском хозяйстве», Минск, 01–03.04.1975 г. Соавт.: Вирченко М. И., Шестакова Н. В. Опубл. в [1974, 6].

- vi. The growth models of controlled economy with technological change. На Третьем Международном конгрессе эконометрического общества, Торонто, 21–26.08.1975.
- vii. Интервью для польского телевидения об Оскаре Ланге, сент. 1975 г. Оpubл. [2004, 4], С. 229.
- viii. Выступление на бюро Отделения экономики АН по докладу Н. П. Федоренко «Проблемы совершенствования планирования и управления народным хозяйством», 16.09.1975.
- ix. Выступление на «Московском радио», вещание на скандинавские страны, 21.10.1975 г.
- x. Mathematics in economics: achievements, difficulties, perspectives. Нобелевская лекция, Стокгольм, 11.12.1975 г. Оpubл. [1976, 9].
- xi. Problems of Application of Optimization Methods in Industry. На семинаре Шведского общества промышленников, Стокгольм, 15.12.1975. Оpubл. в [1976, 7].

Рукописи:

- 1. Ответы на вопросы Сони Брентье. Оpubл. в [2002, 1], С. 18–21.

### 1976

- 1. Optymalne Decyzje Ekonomiczne. — Warszawa: Państw. Wyd-wo Ekon., 1976. — 292 p. — Co-aut.: Gorstko A.
- 2. Essays in optimal planning / Selected Works with an Introduction by L. Smolinski. — New York: Int Arts and Sci. Press, 1976. — 251 p.
- 3. Idem // Probl. Econ. — 1976. — Vol. 19, N 4–6. — P. 3–9, 24–50, 57–225.
- 4. Problems of Application of Optimization Methods in Industry. — Stockholm: Tryckeriaktiebolaget Svea, 1976. — 35 p. — (Semin. at the Fed. of Swed. Industries, Stockholm, Dec. 15, 1975). — Co-aut.: Koopmans T. C.
- 5. Математические методы в управлении экономикой // Наука и человечество: Междунар. ежегодник, 1977. — М., 1976. — С. 279–287. — Соавт.: Романовский И. В.
- 6. К работе «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» // Чаплыгин С. А. Избранные труды: Механика жидкости и газа: Математика: Общая механика. — М., 1976. — С. 446–449.
- 7. К проблеме оптимизации взаимоотношения общества и природы // Взаимосвязь наук при решении экологических проблем: (Тез. к теорет. конф.). — Москва; Обнинск, 1976. — С. 27–29.
- 8. Growth models and their application to long-term planning and forecasting // Methods of Long-Term Planning and Forecasting: Proc. of Conf. Held by the Int. Econ. Ass. at Moscow. — East Kilbride (Scotland), 1976. — P. 51–66. — Co-aut.: Makarov V. L.
- 9. Dynamic models of scientific-technical progress // Progress in Operations Research. — Amsterdam; London, 1976. — Vol. 2. — P. 537–546. — (Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai; N 12).
- 10. [Autobiography] // Les Prix Nobel en 1975. — Stockholm, 1976. — P. 261–264.
- 11. Mathematics in economics: Achievements, difficulties, perspectives: Nobel Memorial lecture, Dec. 11, 1975 // Ibid. — P. 265–272.
- 12. Idem // Math. Programming. — 1976. — Vol. 11, N 3. — P. 204–211.
- 13. Theoretical aspects of policy studies // USA: Conference'76, May 10–13, 1976. — Laxenburg (Austria), 1976. — P. 233–236.
- 14. [Выступление на сессии Междуведомственного научного совета по проблемам ценообразования, Москва, февр. 1975 г.: Крат. излож.] // Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1976. — № 1. — С. 145–146.
- 15. [Доклад на Научном совете АН СССР по комплексной проблеме «Единая транспортная система СССР»: Крат. излож.] // Вестн. АН СССР. — 1976. — № 10. — С. 124–125.
- 16. Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы: Лекция в Шведской королевской академии наук в связи с присуждением Нобелевской премии за 1975 год // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1976. — № 3. — С. 124–134.
- 17. И все же — хозрасчетная фирма изобретений: [Беседа] // Изобретатель и рационализатор. — 1976. — № 10. — С. 14.

18. Математические методы в экономике // *Zinātne un Tehnika*. — 1976. — № 5. — С. 12–16. — Соавт.: Романовский И. В.
19. Economic problems of scientific and technical progress // *Scand. J. Econ.* — 1976. — Vol. 78, N 1. — P. 521–541.
20. *Idem* // *Soc. Sci.* — 1976. — Vol. 7, N 3. — P. 82–101.
21. Modern mathematical system of economic management // *Probl. Econ.* — 1976. — Vol. 19, N 4–5. — P. 226–242. — Co-aut.: Romanovsky I. V., Golshtein E. G., and Makarov V. L.
22. Optimal utilization of rolling and pipe mills // *Ibid.* — P. 243–251.
23. Оптимально планиране: нерешени задачи // *Социально управление*. — 1976. — № 3. — С. 15–21.
24. Алгебра экономики: [Беседа] // *Неделя*. — 1976. — 1–7 марта. — С. 10–11.
25. Время точных решений: [Беседа] // *Комс. правда*. — 1976. — 17 марта.
26. Ред.: Фет Я. И. Массовая обработка информации в специализированных однородных процессах / Отв. ред. — Новосибирск: Наука, 1976. — 199 с.

## Переводы:

- [1972, 1] — *Optymalne Decyzje Ekonomiczne*. — Warszawa: Panst. Wyd-wo Ekon., 1976. — 292 p. — Co-aut.: Gorstko A.
- [13], [14] — L. V. Kantorovich: *Essays in optimal planning*:  
[1975, 10] — *Mathematical methods in economics*. — P. 3–8.  
[1974, 9] — *Let us apply the achievements of economic science*. — P. 9–15.  
[1974, 7] — *Optimal planning: unresolved problems*. — P. 16–23.  
[1964, 1] — *A dynamic model of optimal planning*. — P. 24–50.  
[1959, 5] — *Some functional relations which arise in analysis of one-product economic model*. — P. 51–56. — Co-aut.: Gor'kov L. I.  
[1967, 7] — *A one-product dynamic model with instantaneous transformation of capital*. — P. 57–63. — Co-aut.: Globenko I. G.  
[1967, 8] — *A dynamic model of the economy*. — P. 64–67. — Co-aut.: Globenko I. G.  
[1967, 2] — *On the calculation of the norm of effectiveness on the basis of one-product model of development of the economy*. — P. 68–90. — Co-aut.: Vainstein A. L.  
[1970, 3] — *Once again on the calculation of the norm of effectiveness on the basis of one-product national economic development model*. — P. 91–107. — Co-aut.: Vainstein A. L.  
[1970, 4] — *Estimating the effectiveness of capital expenditures*. — P. 108–134. — Co-aut.: Bogachev V. N., Makarov V. L.  
[1973, 1] — *A one-product dynamic model of economics, taking into account the change in the structure of capital under technological progress*. — P. 135–141. — Co-aut.: Zhiianov V. I.  
[1967, 9] — *Optimal mathematical models in planning the development of branch and in technical policy*. — P. 142–167.  
[1966, 3] — *Depreciation changes and estimation of the effectiveness of new technology in a system of optimal planning*. — P. 168–182.  
[1974, 1] — *Economic problems of scientific-technical progress*. — P. 183–211.  
[1971, 6] — *Concerning prices, rates, and economic effectiveness*. — P. 212–221.  
[1972, 2] — *Ways to develop computing means for solving large optimal planning and control problems*. — P. 222–225.  
[1972, 3] — *A modern mathematical system of economic management*. — P. 226–242. — Co-aut.: Gol'shtein E. G., Makarov V. L., Romanovskii I. V.  
[1970, 7] — *Optimal utilization of rolling and pipe mills*. — P. 243–251.  
[1974, 1] — *Economic problems of scientific and technical progress* // *Scand. J. Econ.* — 1976. — Vol. 78, N 1. — P. 521–541. *Idem* // *Soc. Sci.* — 1976. — Vol. 7, N 3. — P. 82–101.  
[1975, 1] — *Growth models and their application to long-term planning and forecasting* // *Methods of Long-Term Planning and Forecasting: Proc. of Conf. Held by the Int. Econ. Ass. Moscow*. — East Kilbride (Scotland), 1976. — P. 51–61. — Co-aut.: Makarov V. L.

[9] — Математика в экономике: достижения, трудности, перспективы: Лекция в Шведской королевской академии наук в связи с присуждением Нобелевской премии за 1975 год // ЭКО. — 1976. — № 3. — С. 124–134.

Доклады и выступления:

- i. Выступление на Всесоюзном семинаре «Рациональный раскрой материалов с использованием ЭВМ и математических методов», Москва, 07–09.01.1976. Крат. излож.: Вестн. машиностроения. — 1976. — № 9. — С. 54.
- ii. Выступление на Отдел. экономики по докладу В. П. Красовского «О путях повышения эффективности капиталовложений и основных фондов в 10-й пятилетке», 20.01.1976.
- iii. Выступление по докладу о разработке «АСУ — Прибор» на Коллегии ГКНТ, 27.01.1976.
- iv. Лекция во Всероссийском театральном обществе, 24.02.1976.
- v. Выступление на коллегии ГКНТ по докладу министра черной металлургии УССР Г. А. Бибики «О создании интегрированных систем управления на предприятиях черной металлургии Украинской ССР», 23.03.1976.
- vi. Выступление на Бюро Отд. экономики АН по вопросу о мерах по ускорению науч.-техн. прогресса, 13.04.1976.
- vii. Theoretical aspects in the development of policy problem studies. На конференции в ПИАСА, 10–13.05.1976. Оpubл. в [11].
- viii. Экономические модели технического прогресса. В Высшей школе экономики и статистики, Варшава, 31.05.1976.
- ix. Dynamic models of scientific-technical progress. На IX Международном симпозиуме по математическому программированию, Будапешт, 23–27.08.1976. Оpubл. в [12]. Сообщ.: ЭММ. — 1977. — Т. 13, вып. 1. — С. 193.
- x. Состояние и перспективы развития научных исследований проблем транспорта в АН СССР и Академиях наук союзных республик. На Научном совете АН СССР по комплексной проблеме «Единая транспортная система СССР», 31.08.1976. Крат. излож.: Вестн. АН СССР. — 1976. — № 10. — С. 124–125.
- xi. То же. На Отд. физ.-техн. проблем энергетики АН, сент. 1976 г.
- xii. То же. На Президиуме АН, окт. 1976 г.
- xiii. Оптимизация в экономике. Лекция в Пенсильванском университете, 20.09.1976.
- xiv. Экономические модели технического прогресса. Лекции в Принстонском университете 21.09.1976, в Йельском университете 23.09.1976, в Массачусетском технологическом институте 24.09.1976.
- xv. Выступление на конференции «Опыт создания и внедрения АСУ на транспорте и перспективы их развития для обеспечения координированной работы транспорта», Ленинград, 06–08.10.1976.
- xvi. Выступление по телевидению из ГВЦ Госснаба, 14.10.1976.
- xvii. Беседа «Математика в современном мире» в Политехническом музее, Москва, 28.10.1976. Совм. с М. А. Лаврентьевым, М. Р. Шура-Бура.
- xviii. Методы оптимизации в экономических исследованиях: Опыт и достижения. Лекция в Центральном научно-исследовательском институте экономики АН ГДР, Берлин, 29.10.1976.
- xix. Aktuelle Probleme der Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie. На 7 конференции по автоматизированной обработке экономической информации (VII Informationstagung in der Parkgaststätte Markkleberg), Лейпциг, 02–04.11.1976. Кр. излож.: Plenarvortrag auf der VII Internationale Tagung Über Ergebnisse der Ökonomischen Informationsverarbeitung. — MSR. — 1977. — N 5. — S. 283.
- xx. Выступление на совместном заседании Научных советов АН «Экономическая эффективность основных фондов, капиталовложений и новой техники» и «По комплексной проблеме единой транспортной системы СССР» по докладам В. Н. Лившица и Г. М. Меркиной о методике определения эффективности вложений на транспорте, ноябрь 1976 г. Оpubл. в [1978, 9].
- xxi. Выступление на конференции «Балансовые методы в анализе и планировании соц. экономики», Москва, 15–17.11.1976.



- xxii. К проблеме оптимизации взаимоотношения общества и природы. На конференции «Взаимосвязь наук при решении экологических проблем», Москва — Обнинск, 1976 г. Тезисы опубликованы в [2].

## 1977

1. Функциональный анализ. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1977. — 742 с. — Соавт.: Акилов Г. П.
2. Essays in Optimal Planning. — Oxford: Blackwell, 1977. — XXXII, 251 p.
3. Optimálne Rozhodnutie v Ekonomike. — Bratislava: Pravda, 1977. — 240 p. — Co-aut.: Gorstko A. B.
4. Рациональное использование ресурсов и ценообразование // Теоретические проблемы ценообразования в условиях развитого социализма. — М., 1977. — С. 46–58.
5. Разработка математического аппарата для задач экономики // Фундаментальные исследования: (Физико-математические науки). — Новосибирск, 1977. — С. 12–16. — Совм. с др.
6. Развитие математической экономики в Сибирском отделении Академии наук СССР // Изв. СО АН СССР. — 1977. — № 6. Сер. обществ. наук, вып. 2. — С. 14–25. — Соавт.: Макаров В. Л.
7. Математика и экономика — взаимопроникновение наук // Вестн. ЛГУ. — 1977. — № 13. Математика. Механика. Астрономия, вып. 3. — С. 31–38. — Соавт.: Гавурин М. К.
8. Оптимизационные методы в экономике: Результаты, трудности, перспективы // Кибернетика. — 1977. — № 2. — С. 68–72. — Соавт.: Романовский И. В.
9. Математика в экономике: Достижения, трудности, перспективы // Обществ. науки. — 1977. — № 2. — С. 101–110.
10. Значение себестоимости в механизме хозяйствования // Вопр. ценообразования. — 1977. — Вып. 3. — С. 21–24.
11. Научно-технический прогресс и экономическая наука // Полит. самообразование. — 1977. — № 6. — С. 110–119.
12. [Plenarvortrag auf der VII: Internationale Tagung über Ergebnisse der ökonomischen Informationsverarbeitung] // MSR. — 1977. — N 5. — S. 283.
13. Complexe vraagstukken // Impact. — 1977. — N 108. — P. 39–40.
14. Экономика и транспорт: [Беседа] // Гудок. — 1977. — 2 апр.
15. Ред.: Булавский В. А., Звягина Р. А., Яковлева М. А. Численные методы линейной программирования: (Специальные задачи). — М.: Наука, 1977. — 367 с.

## Переводы:

[1972, 1] — Optimálne Rozhodnutie v Ekonomike. — Bratislava: Pravda, 1977. — 240 p. — Co-aut.: Gorstko A. B.

[1976, 3] — Mathematische Methoden in der Leitung der Ökonomik / Wissenschaft und Menschheit 1977. — Verlag Harri Dueth Frankfurt am Main und Thun Verlag "Snanie" Moskau. — S. 279–288. — Co-aut.: Romanowski I. V.

[1976, 9] — Математика в экономике: Достижения, трудности, перспективы // Обществ. науки. — 1977. — № 2. — С. 101–110.

[1976, 13] — Essays in Optimal Planning. — Oxford: Blackwell, 1977. — XXXII, 251 p.

## Доклады и выступления:

- i. Выступление в ИАСА на Круглом столе «Corporation between Decision-maker and Model-builder», 26.01.1977.
- ii. Некоторые современные проблемы использования оптимизации в народном хозяйстве. Доклад в ИСЭП, Ленинград, 02.04.1977.
- iii. Выступление на Отделении экономики АН по докладу Н. Я. Петракова «О мерах по улучшению планирования народного хозяйства, стимулирования технического прогресса и повышения эффективности производства», 05.04.1977.
- iv. Выступление на Президиуме АН по проекту постановления СМ СССР по совершенствованию управлением народным хозяйством, 28.04.1977.
- v. Выступление на совещании в Стройбанке, 05.05.1977.

- vi. Выступление на семинаре актива Госснаба, Тула, 19.05.1977.
- vii. Выступление на совместном заседании Научных советов АН по эффективности капиталовложений и по комплексной проблеме единой транспортной системы СССР по докладом В. Н. Лившица и С. П. Арсеньева о методике определения эффективности капвложений на транспорте, 09.06.1977. Оpubл. в [1979, 2].
- viii. A model-based analysis of the dynamics of economic indicators as affected by the scientific and technological progress. На конференции в ИАСА «Systems Assessment of New Technologies: International Perspectives», 20.07.1977. Соавт.: Кругликов А., Жиянов В.
- ix. Mathematical methods in econometrics. Лекция в ИАСА, 09.08.1977.
- x. Выступления в дискуссии по обсуждению моделей экономического прогноза «Римского клуба», Москва, 29.08–01.09.1977.
- xi. Рациональное использование ресурсов и ценообразование. На сессии Межведомственного совета по ценам «Теоретические проблемы ценообразования в условиях развитого социализма», 21–22.09.1977. Оpubл. в [3]. Кр. излож.: ЭММ. — 1978. — Т. 14, вып. 1. — С. 192–193; План. хоз-во. — 1978. — № 2. — С. 155–156.
- xii. Оптимизационные модели и экономическая практика: проблемы реализации. На юбилейных чтениях в МГУ, посв. 15-летию кафедры мат. методов анализа экономики, 17–18.11.1977. Кр. излож.: ЭММ. — 1978. — Т. 14, вып. 4. — С. 803–804.
- xiii. Выступление на IV Всесоюзном симпозиуме по проблемам планирования и управления научными исследованиями и разработками, Звенигород, ноябрь 1977 г. Сообщ.: ВЭ. — 1978. — № 4. — С. 156.
- xiv. Выступление на конференции «Формирование и развитие сети путей сообщения единой транспортной системы СССР», Свердловск, 23–25.11.1977. Сообщ.: ВЭ. — 1978. — № 6. — С. 154.
- xv. Выступление по докладу К. Мотидзуки «Цена стоимости и система разрешающих множителей Л. В. Канторовича». На XI советско-японском симпозиуме ученых-экономистов, Москва, 28.11–01.12.1977. Оpubл. в [1978, 8].
- xvi. Измерение научно-технического прогресса. На 41-й сессии Международного статистического института, Калькутта, 05.12–15.12.1977.
- xvii. Проблемы и перспективы применения математики в экономике. Лекция в Индийском статистическом институте, Калькутта, 13.12.1977. Сообщ.: «The Statesman» (Калькутта). — 13 dec.
- xviii. То же. В Индийском институте социальных исследований, Дели, 16.12.1977.
- xix. Выступление на заседании Научного совета по комплексной проблеме единой транспортной системы СССР по докладу Д. К. Земляновского о развитии водного транспорта. Оpubл. в [1978, 12].

## 1978

1. Об улучшении использования изобретений в народном хозяйстве // Управление и новая техника: (Исследования, разработки, внедрение). — М., 1978. — С. 15–24.
2. Планирование исследований, разработок и внедрения новой техники // Там же. — С. 36–109.
3. Анализ динамики экономических показателей на основе однопродуктовых динамических моделей // Моделирование и анализ эффективности научно-технического прогресса. — М., 1978. — С. 5–25. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9). — Соавт.: Жиянов В. И., Хованский А. Г.
4. Укрупненный расчет вклада науки и техники в национальный доход СССР // Там же. — С. 56–64. — Соавт.: Кругликов А. Г.
5. О совершенствовании методики оценки народнохозяйственной эффективности новой техники // Там же. — С. 87–92. — Соавт.: Кругликов А. Г.
6. [Выступление на заседании Научного совета по проблеме экономической эффективности основных фондов, капитальных вложений и новой техники АН СССР (май 1977 г.)] // Методы и практика определения эффективности капитальных вложений и новой техники: сб. науч. информ. — М., 1978. — Вып. 29. — С. 39–42.
7. [Выступление по докладу К. Мотидзуки «Цена стоимости и система разрешающих множителей Л. В. Канторовича»] // Материалы 11 Советско-японского симпозиума ученых-

- экономистов, Москва, 28 нояб. — 1 дек. 1977 г.: (Сокр. стеногр.). — М., 1978. — Ч. 2. — С. 288–290.
8. Об использовании оптимизационных расчетов в отраслях народного хозяйства // Системный анализ и управление научно-техническим прогрессом: (Тез. к теорет. конф.). — М., 1978. — С. 23–31. — Соавт.: Зорин Ю. М., Шепелев Г. И.
  9. Экономическая эффективность совершенствования планирования и управления свеклосахарного производства с использованием экономико-математических методов и ЭВМ // Эффективность использования вычислительной техники и автоматизированных систем управления в народном хозяйстве республики: (Тез. докл. респ. совещ. 5 сент. 1978 г.). — Фрунзе, 1978. — С. 8–11. — Совм. с др.
  10. Las matemáticas en la econom'ia: logros, dificultades, perspectivas // Los Premios Nobel de Econom'ia, 1969–1977. — Mexico, 1978. — P. 264–275. — (El Trimestre Economico. Lecturas; N 25).
  11. Транспорт и народное хозяйство // Изв. АН СССР. Сер. экон. — 1978. — № 6. — С. 57–71. — Соавт.: Паенсон Н. В.
  12. [Выступление на сессии Междудементственного Научного совета по проблемам ценообразования Госкомцен Совета министров СССР и АН СССР, Москва, 21–22 сент. 1977 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1978. — Т. 14, вып. 1. — С. 192–193.
  13. Об использовании оптимизационных расчетов в АСУ отраслями народного хозяйства // Экономика и мат. методы. — 1978. — Т. 14, вып. 5. — С. 821–834. — Соавт.: Чешенко Н. И., Зорин Ю. М., Шепелев Г. И.
  14. [Выступление на Всесоюзной научной конференции «Хозяйственный механизм 10 пятилетки» по проблеме рационального использования ресурсов и управления экономикой, Москва, 16–17 марта 1978 г.: Крат. излож.] // Там же. — С. 1007.
  15. То же // Вопр. экономики. — 1978. — № 8. — С. 150.
  16. Григорий Яковлевич Лозановский: [Некролог] // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, вып. 1. — С. 199–202. — Совм. с др.
  17. Соломон Григорьевич Михлин: (К семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, вып. 2. — С. 213–216. — Соавт.: Кошелев А. И., Олейник О. А., Соболев С. Л.
  18. [Выступление на Юбилейной сессии Междудементственного Научного совета по проблемам ценообразования Госкомцен Совета министров СССР и АН СССР, посвященной 60-летию Великой Октябрьской социалистической революции: Крат. излож.] // План. хоз-во. — 1978. — № 2. — С. 155–156.
  19. [Выступление на сессии, посвященной проблемам дальнейшего совершенствования методологии и методов ценообразования на новую продукцию производственно-технического назначения: Крат. излож.] // План. хоз-во. — 1978. — № 12. — С. 144.
  20. Принцип дифференциальной оптимизации в применении к однопродуктовой динамической модели экономики // Сиб. мат. журн. — 1978. — Т. 19, № 5. — С. 1053–1064. — Соавт.: Жиянов В. И., Хованский А. Г.
  21. The development of mathematical economics at the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences // Probl. Econ. — 1978. — Vol. 20, N 10. — P. 75–96. — Co-aut.: Makarov V. L.
  22. Ökonomisch-mathematische Methoden: Zum Stand der Anwendung in der UdSSR und in der DDR [Interview] // RD. — 1978. — Bd 1. — S. 4–5.
  23. Президенту США господину Дж. Картеру: [Обращение по поводу создания в США нейтрон. бомбы] // Правда. — 1978. — 14 марта; Труд. — 1978. — 14 марта. — Совм. с др.
  24. Системный подход // Водный трансп. — 1978. — 29 июня.
  25. Насущные проблемы транспорта // Сов. Россия. — 1978. — 24 окт. — (Ученые анализируют и предлагают). — Соавт.: Заглядимов М.
  26. Ред.: Моделирование и анализ эффективности научно-технического прогресса / Отв. ред. — М.: ВНИИСИ, 1978. — 126 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9).

Переводы:

[1976, 3] — // Veda a lidstvo. — Bratislava, Obzor, 1978.

- [1976, 3] — // Veda a l'udstvo. — Praha, Horizont, 1978.
- [1976, 3] — // Czlowiek I nauka. — Warszawa, Wedza Powshehena, 1978.
- [1976, 8] — Leonid V. Kantorovich (Biografia) // Los Premios Nobel de Economia, 1969–1977. — Mexico, 1978. — P. 259–263. — (El Trimestre Economico. Lecturas; 25).
- [1976, 9] — Las mathematicas en economica: logros, dificultades, perspectives // Ibid. — P. 264–275.
- [1976, 11] — Теоретические аспекты исследования стратегии // Материалы конференции международного института прикладного системного анализа 1976 г. Т. 1. — М.: ВНИИСИ и КСА, 1978. — С. 186–189.
- [1977, 4] — The development of mathematical economics at the Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences // Prob. Econ. — 1978. — Vol. 20, N 10. — P. 75–96. — Co-aut.: Makarov V. L.

Доклады и выступления:

- i. Выступление на церемонии присуждения степени почетного доктора наук Индийского статистического института, Калькутта, 05.02.1978.
- ii. «Математика в экономике». Лекция в Дели, 14.02.1978.
- iii. Экономические проблемы использования оптимизационных расчетов в АСУ. На комиссии ГКНТ по оптимизации в АСУ, 23.02.1978.
- iv. Рациональное использование ресурсов и развитие механизма социалистического хозяйствования. На Всесоюзной научной конференции «Хозяйственный механизм 10 пятилетки», Москва, 16–17.03.1978. Крат. излож.: ВЭ. — 1978. — № 8. — С. 150; ЭММ. — 1978. — Т. 14, вып. 5. — С. 1007; ЭКО. — 1979. — № 2. — С. 123.
- v. Рациональное использование ресурсов и ценообразование. Лекция в Ленингр. финанс.-экономич. ин-те, 15.03.1978. Сообщ.: Советский экономист. — 17 марта.
- vi. Выступление на 2-м Всесоюзном совещании «Вычислительная техника и автоматизированные системы управления в народном хозяйстве», Москва, 15–17.05.1978. Сообщ.: ВЭ. — 1978. — № 12. — С. 142.
- vii. Некоторые вопросы системного анализа взаимосвязей транспортного и топливно-энергетического комплексов. На Всесоюз. семинаре «Системное моделирование социально-экономических процессов», Воронеж, 22–28.05.1978. Оpubл. в [1980, 5]. Соавт.: Паенсон Н. В.
- viii. Об улучшении использования оптимизационных расчетов в АСУ отраслей нар. хоз-ва. На коллегии ГКНТ, 20.06.1978.
- ix. The models of economic development with technical progress. На IV Международном конгрессе по кибернетике и системам управления, Амстердам, 21–25.08.1978.
- x. Ценообразование и технический прогресс. На сессии Междудементственного Научного совета по проблемам ценообразования Госкомцен и АН 21.11.1978. Оpubл. в [1979, 1]. Кр. излож.: План. хоз-во. — 1978. — № 12. — С. 144; ВЭ. — 1979. — № 3. — С. 147–148.
- xi. Состояние и перспективы развития научных исследований проблем транспорта в АН СССР и Академиях наук союзных республик. На заседании Президиума АН СССР, 23.11.1978 г.
- xii. Выступление на заседании Отделения математики по обсуждению школьных программ, 05.12.1978. Оpubл. в [1979, 4].
- xiii. Анализ состояния использования оптимизационных расчетов в АСУ отраслей народного хозяйства. На Всесоюзном семинаре по пробл. анализа экон.-мат. методов планир. и управл. нар. хоз-вом и взаимодействия АСУ различных уровней, Звенигород, 02–06.12.1978. Кр. излож.: ЭММ. — 1979. — Т. 15, вып. 3. — С. 626–627.
- xiv. Оптимальные решения в экономике использования ресурсов сельского хозяйства. На сессии АН СССР «Наука — сельскому хозяйству», 06–07.12.1978.
- xv. О принципах формирования тарифов на транспорт в единой транспортной системе народного хозяйства. На совместном заседании Научного совета по комплексной проблеме единой транспортной системы СССР и секции «Транспортные тарифы» Междудементственного совета по ценообразованию, 07.12.1978.

- xvi. Организация занарядки металлопродукции с учетом требований оптимизации условий производства, прикрепления потребителей к поставщикам и транспорта. На заседании рабочей группы «АСУ — Металл» Госнаба СССР, 28.12.1978.
- xvii. Выступление на Отд. экономики АН по докладу Н. П. Федоренко «Проблема совершенствования планирования и управления н/х», 1978 г.
- xiii. Об использовании оптимизационных расчетов в отраслях народного хозяйства. На конференции «Системный анализ и управление научно-техническим прогрессом», Москва — Обнинск, 1978 г. Опубл. в [10]. Соавт.: Зорин Ю. М., Шепелев Г. И.

## 1979

1. Ценообразование и технический прогресс // 60 лет планового ценообразования в СССР. — М., 1979. — С. 32–43.
2. [Выступление на заседании Научного совета по проблеме экономической эффективности основных фондов, капитальных вложений и новой техники АН СССР (май 1977 г.)] // Методы и практика определения эффективности капитальных вложений и новой техники: сб. науч. информ. — М., 1979. — Вып. 30. — С. 88–91.
3. Сергей Львович Соболев: [К семидесятилетию со дня рождения] // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 1. — С. 3–15. — Совм. с др.
4. Борис Захарович Вулих: [Некролог] // Успехи мат. наук. — 1979. — Т. 34, вып. 4. — С. 133–137. — Совм. с др.
5. Глобальная оценка вклада науки и техники в экономику // Достижения и перспективы. — 1979. — Вып. 4. — С. 30–38. — Соавт.: Кругликов А. Г.
6. Математика в современной школе // Математика в шк. — 1979. — № 4. — С. 6–11. — Соавт.: Соболев С. Л.
7. Проблема человека // Искусство кино. — 1979. — № 10. — С. 23–29.
8. Предисловие // Пирогов Г. Г., Федоровский Ю. П. Проблемы структурного оценивания в эконометрии. — М., 1979. — С. 3–5.
9. Благодатная почва: [Ответы на анкету «Лит. газ.» «Мировой уровень советской науки»] // Лит. газ. — 1979. — 18 апр. — С. 13.
10. Приглашение к точности // Комс. правда. — 1979. — 26 дек. — (Прогнозы: вчера, сегодня, завтра).
11. Пат. 2150853. ФРГ: Divisions-Vorrichtung für ein serielles Vier-Spezies-Rechenwerk. — Заявл. 12.10.71. — 26.4.73. — 5.4.79; Опубл. 5.04.79. — Co-aut.: Tolstjev V. P. and Fet Y. I.
12. Ред.: Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством. Тезисы докладов Всесоюзной конференции 17–19.12.1979 / Отв. ред. — М.: ВНИИСИ, 1979. — 392 с.

## Переводы:

[1978, 7] — On the use of optimization methods in automated management systems for economic ministries // Matekon. — 1979. — Vol. 15, N 4. — P. 42–65. — Co-aut.: Cheshenko N. I., Zorin Yu. M., Shepelev G. I.

## Доклады и выступления:

- i. Цены и технический прогресс. Немчиновские чтения в МГУ, 13–15.01.1979.
- ii. Выступление по телевидению на «Круглом столе» по проблемам транспорта, 21.02.1979.
- iii. Выступление в дискуссии по докладу Н. П. Федоренко «Проблемы народнохозяйственного критерия оптимальности», 12–13.04.1979 г. Опубл. в [1982, 6]. Кр. излож.: ЭММ. — 1979. — Т. XV, вып. 6. — С. 1085–1086; Politicka Ekonomie. — 1980. — Ros. 28, N 10. — S. 1055–1056.
- iv. Пассажирский транспорт — на уровень современных задач. На конференции «Организация и развитие системы пассажирских сообщений СССР», Рига, 30.05–01.06.1979. Сообщ.: Советская Латвия. — 1979. — 31 мая.
- v. Выступление на Президиуме АН по докладу Н. П. Федоренко о работе ЦЭМИ, 14.06.1979. Кр. излож.: ЭММ. — 1979. — Т. XV, вып. 6. — С. 1233; Вестн. АН. — 1980. — № 3. — С. 8–9.

- vi. Dynamic models of scientific and technological progress. Лекция в Институте эконометрии и исследования операций, Бонн, 22.06.1979.
- vii. Динамические модели научно-технического прогресса. Лекция в Институте экономики Венгерской АН, 06.07.1979.
- viii. Mathematical-Economic modeling of scientifically and technological progress. На 9-й Международной конференции ИФИП (IFIP) по методам оптимизации, Варшава, 04–08.09.1979. Оpubл. в [1980, 12].
- ix. The Importance of Mathematical Optimization in Economics. Выступление там же на круглом столе по системной технике в экономике. Оpubл. в [1980, 13].
- x. Проблемы внедрения оптимизационных методов. На Научном совете АН «Оптимальное планирование и управление народным хозяйством», 28.09.1979. Кр. излож.: ЭММ. — 1980. — Т. XVI, вып. 2. — С. 391.
- xi. Выступление на заседании в ЛГУ 02.10.1979 г., посвященного памяти Б. З. Вулиха.
- xii. Оптимизационные методы в текущем планировании. На Всесоюз. конференции «Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством», Москва, 17–19.10.1979. Оpubл. в [1980, 5]. Кр. излож.: ЭММ. — 1980. — Т. XVI, вып. 3. — С. 599–600; ВЭ. — 1980. — № 4. — С. 156; План. хоз-во. — 1980. — № 2.
- xiii. Выступление на конференции по транспорту на дальние расстояния Международной экономической ассоциации, Москва, 15–20.10.1979 г. Оpubл. в [1982, 7].
- xiv. Принципы формирования закупочных цен на сельскохозяйственную продукцию и возможные пути их исчисления. На сессии Межведомственного Научного совета по проблемам ценообразования «Основные направления совершенствования ценообразования на продукцию агропром. комплекса в свете решений июльского (1978 г.) Пленума ЦК», Москва, 13–14.11.1979. Соавт.: Вирченко М. И. Оpubл. в [1980, 3].
- xv. Отчет о работе Научного совета АН по комплексной проблеме «Единая транспортная система» Отделением физ.-техн. проблем энергетики и экономики за 1979 г., 04.12.1979.
- xvi. Выступление на бюро Отделения экономики АН по докладу Е. З. Майминаса «Проблемы анализа и разработки целей экономического и социального развития в долгосрочном планировании», 11.12.1979.
- xvii. О задачах Академии наук в решении актуальных проблем развития народного хозяйства. Выступление на Сессии общего собрания АН СССР, 14.12.1979.
- xviii. Выступление на конференции «Теоретические и методологические проблемы экономической эффективности социалистического воспроизводства» в Ин-те экономики АН, 17–18.12.1979. Сообщ.: ВЭ. — 1980. — № 8. — С. 151.

## 1980

1. Analisi Funzionale. — М.: Mir, 1980. — 764 p. — (Nuova Biblioteca di Cultura. Ser. Scient.). — Co-aut.: Akilov G. P.
2. Транспорт в системе народного хозяйства: (Планово-экономические проблемы) // Развитие транспортного комплекса: сб. — М., 1980. — С. 5–49. — Соавт.: Паенсон Н. Е.
3. Математические методы в управлении экономикой // Наука стран социализма. 70-е гг. — М., 1980. — С. 309–319. — Соавт.: Романовский И. В.
4. Принципы формирования закупочных цен на сельскохозяйственную продукцию и возможные пути их исчисления // Основные направления совершенствования ценообразования на продукцию аграрно-промышленного комплекса в свете решений июльского (1978 г.) Пленума ЦК КПСС. — М., 1980. — С. 61–78. — Соавт.: Вирченко М. И.
5. Оптимизационные методы в текущем планировании // Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством: Материалы Всесоюз. конф., Москва, 17–19 окт. 1979 г. — М., 1980. — С. 12–21.
6. Некоторые вопросы системного анализа взаимосвязей транспортного и топливно-энергетического комплексов // Системное моделирование социально-экономических процессов: Материалы Всесоюз. семинара [22–28 мая 1978 г.]. — Воронеж, 1980. — С. 15–27. — Соавт.: Паенсон Н. В.

7. A few words on application of optimization methods to economic problems // Extremal Methods and System Analysis: An International Symposium on the Occasion of Prof. A. Charnes Sixtieth Birthday, Austin (Texas), Sept. 13–15, 1977. — Berlin etc., 1980. — P. 85–95. — (Lecture Notes in Economics and Math. Systems; N 174). — Co-aut.: Romanovsky I. V.
8. Mathematical-economic modelling of scientific and technical progress // Optimization Techniques: Proc. 9th IFIP Conf., Warsaw, Sept. 4–8, 1979. — Berlin etc., 1980. — Pt 1. — P. 30–36. — (Lect. Notes in Control and Inform. Sci.; N 22).
10. Проблемы совершенствования управления транспортной системой страны // Хоз-во и право. — 1980. — № 6. — С. 3–10. — Соавт.: Заглядимов М.
11. [Выступление в дискуссии по проблеме народнохозяйственного критерия оптимальности в СССР, Москва, 12–13 апр. 1979 г.: Крат. излож.]. — Politická Ekonomie. — 1980. — Roč. 28, N 10. — S. 1055–1056.
12. Рец.: Методические основы отраслевой оптимизации: [Аганбегян А. Г., Албегов М. М., Казакевич Д. М. и др. Основные методические положения оптимизации развития и размещения производства. М., 1978. 271 с.] // План. хоз-во. — 1980. — № 5. — С. 126–128.
13. Необходим высокий уровень экономического анализа // За науку в Сибири. — 1980. — 12 июня. — С. 4–5.
14. Экономический механизм управления транспортом: [Беседа] // Гудок. — 1980. — 23 дек.
15. Ред.: Использование методов оптимизации в текущем планировании и оперативном управлении производством: Материалы Всесоюз. конф., Москва, 17–19 окт. 1979 г. / Отв. ред. — М.: ВНИИСИ, 1980. — 264 с.
16. Ред.: Развитие транспортного комплекса: сб. / Отв. ред. — М.: Наука, 1980. — 192 с.

## Переводы:

[1977, 1] — Analisi Funzionale. — М.: Mir, 1980. — 764 p. — (Nuova Biblioteca di Cultura. Ser. Scient.). — Co-aut.: Akilov G. P.

## Доклады и выступления:

- i. Математика и социалистическая хозяйственная практика. На конференции «Математика, кибернетика, экономика», Росток, 21.01.1980.
- ii. Вопросы применения оптимизационных методов в народном хозяйстве. Лекция в Институте управления, Берлин, 29.01.1980.
- iii. Выступление на Всесоюзном научном симпозиуме «Комплексное прогнозирование развития науки и техники», Москва, 30–31.01.1980.
- iv. Выступление на комиссии СМ СССР по выбору экономич. показателей работы транспорта, 26.02.1980.
- v. Выступление на НТС МПС по проекту организации скоростного движения на линии Москва — Ленинград, 22.03.1980.
- vi. Роль ценового механизма в повышении эффективности народного хозяйства. На Всесоюзном совещании по вопросам ценообразования, 07–08.04.1980. Опубл. в [1981, 1]. Кр. излож.: ЭММ. — 1980. — Т. XVI, вып. 5. — С. 1010–1011; ВЭ. — 1980. — № 11. — С. 152.
- vii. Выступление на «Радио Москва». Вещание на Югославию, 11.04.1980.
- viii. Меры по улучшению использования в Госнабе оптимизационных расчетов и основные направления их развития. На НЭС Госнаба, 29.04.1980.
- ix. Выступление на секции «Планирование и прогнозирование цен» Межведомственного Научного совета по проблемам ценообразования по докладу С. С. Гдалевича «Вопросы прикладного использования двойственных оценок», 23.05.1980.
- x. Выступление на Всесоюзной научной конференции по развитию производительных сил Сибири, Новосибирск, 10–15.06.1980.
- xi. Роль ценового механизма в повышении эффективности сельского хозяйства. На Межведомственном Научном совете по проблемам ценообразования, 16.06.1980.
- xii. Экономические проблемы научно-технического прогресса. На школе в Красноярске, 15–21.06.1980.

- xiii. Оптимизационные методы в повышении эффективности народного хозяйства. На Всесоюзном семинаре «Математическое обеспечение расчетов линейного и прямоугольного раскроя», Уфа, 22–27.06.1980.
- xiv. Выступление на Шестом Международном экономическом конгрессе «Человеческие ресурсы, занятость и развитие», Мехико, 02–12.08.1980.
- xv. Доклад на заседании рабочей группы ГКНТ по подготовке предложений по экономическому стимулированию НТП в объединениях и на предприятиях, 25.08.1980.
- xvi. Математические методы в проблемах повышения эффективности народного хозяйства. На школе-семинаре «Математические методы оптимизации в больших экономических и технических системах», Баку, 22.09–01.10.1980. Сообщ.: Бакинский рабочий. — 1980. — 25 окт.
- xvii. Выступление о показателях работы транспорта. На Бюро отделения экономики АН, 28.10.1980. Опубл. в [9].
- xviii. То же. На Президиуме НТС МПС, 03.11.1980.
- xix. Математические методы и экономика. На учебно-методической конференции «Развитие экономико-математических методов и их использование в подготовке специалистов по экономической кибернетике», Таллин, 08–11.10.1980. Опубл. в [1982, 4]. Сообщ.: ВЭ. — 1981. — № 6. Кр. излож.: ЭММ. — 1981. — Т. XVII, вып. 4. — С. 812.
- xx. Экономико-математические методы анализа научно-технического прогресса. На Ученом совете ВНИИСИ, 13.11.1980 г.
- xxi. Экономические и плановые проблемы развития инфраструктуры. На Всесоюзной конференции «Эффективность развития инфраструктуры в народном хозяйстве СССР», Таллин, 02–05.12.1980.
- xxii. Вопросы экономии энергетических ресурсов и транспорт. На совместном заседании Научных советов АН по единой транспортной системе и по перспективным транспортным средствам, 17.12.1980.

## 1981

1. Analyse Fonctionnelle. Т. 1: Operateurs et Fonctionnelles Linéaires. — М.: Mir, 1981. — 490 p. — Co-aut.: Akilov G. P.
2. Analyse Fonctionnelle. Т. 2: Equations Fonctionnelles. — М.: Mir, 1981. — 343 p. — Co-aut.: Akilov G. P.
3. Роль ценового механизма в повышении эффективности народного хозяйства // Материалы Всесоюзного совещания по вопросам ценообразования. — М., 1981. — С. 31–35.
4. Экономика и современные средства управления в решении задачи совершенствования советской торговли // Методологические проблемы совершенствования управления торговлей в свете решений XXVI съезда КПСС: Тез. сообщ. науч. разраб. и материалы к Всесоюз. симпозиуму специалистов. — М., 1981. — Ч. 1. — С. 18–19.
5. Zur Nutzung von Optimierungsrechnungen in automatisierten Leitungssystemen durch die Volkswirtschaftszweige der UdSSR // Planungs und Prognosemodelle: Erfahrungen Probleme Entwicklungstendenzen. — Berlin, 1981. — S. 11–26. — Co-aut.: Cheshenko N. I., Zorin Yu. M., and Shepelev G. I.
6. Марк Александрович Красносельский: К шестидесятилетию со дня рождения // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 2. — С. 215–220. — Совм. с др.
7. Математические модели в проблемах ценообразования // Успехи мат. наук. — 1981. — Т. 36, вып. 4. — С. 204–205. — Соавт.: Макаров В. Л.
8. [Выступление на учебно-методической конференции «Развитие экономико-математических методов и их использование в подготовке специалистов по экономической кибернетике», Таллин, 8–11 окт. 1980 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1981. — Т. 17, № 4. — С. 812.
9. [Разработка общетранспортной методики определения эффективности капитальных вложений: Выступление на 1 Всесоюз. семинаре «Пробл. функционирования и развития произв. инфраструктуры», Лобня, апр. 1981 г.: Крат. излож.] // Вопр. экономики. — 1981. — № 9. — С. 152.



10. [Цена и экономическая оценка ресурсов: Докл. на 6 сов.-амер. симпоз. экономистов, Алма-Ата, 8–11 июля 1981 г.: Крат. излож.] // Там же. — С. 155.
11. Matematiniai metodai ir ekonomika // Mokslas ir Technika. — 1981. — N 9. — P. 6–7.

## Переводы:

[1977, 1] — Analyse Fonctionnelle. T. 1: Operateurs et Fonctionnelles Linéaires. — М.: Mir, 1981. — 490 p. — Co-aut.: Akilov G. P. Analyse Fonctionnelle. T. 2: Equations Fonctionnelles. — М.: Mir, 1981. — 343 p. — Co-aut.: Akilov G. P.

[1978, 7] — Zur Nutzung von Optimierungsrechnungen in automatisierten Leitungssystemen durch die Volkswirtschaftszweige der UdSSR // Planungs und Prognosemodelle: Erfahrungen Probleme Entwicklungstendenzen. — Berlin, 1981. — S. 11–26. — Co-aut.: Cheshenko N. I., Zorin Yu. M., Shepelev G. I.

[1978, 7] — // “Economie appliquee”. — 1981. — С. 1083–1174. — Co-aut.: Cheshenko N. I., Zorin Yu. M., Shepelev G. I.

## Доклады и выступления:

- i. Математические модели в проблемах ценообразования. На совместном заседании семинара имени И. Г. Петровского и Московского мат. о-ва, 19–22.01.1981. Рез. опубл. в [3]. Соавт.: Макаров В. Л.
- ii. О работе транспортного совета. На Отделении физико-технических проблем энергетики, 16.03.1981.
- iii. Проблемы рационализации транспортных потоков в СССР. На Первом Всесоюзном семинаре «Проблемы функционирования и развития производственной инфраструктуры», г. Лобня (Московская обл.), 07–10.04.1981. Кр. излож.: ВЭ. — 1981. — № 9. — С. 152.
- iv. Выступление на Третьем Всесоюзном совещании по философским вопросам естествознания, Москва, апр. 1981 г. Опубл. в [1983, 7]. Кр. излож.: Вопр. философии. — 1982. — № 1. — С. 147.
- v. Выступление на заседании Президиума АН по продовольственной программе СССР, 30.04.1981.
- vi. Вопросы применения оптимизационных методов в народном хозяйстве. На VII Всесоюзной школе-семинаре по управлению большими системами, Неринга, май 1981 г. Кр. излож.: Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 8. — С. 169; Приборы и системы управления. — 1982. — № 9. — С. 46.
- vii. Ценообразование и экономическая оценка ресурсов. На 6-м Советско-американском симпозиуме «Государство и формирование цен в СССР и США», Алма-Ата, 8–12.06.1981. Кр. излож.: ВЭ. — 1981. — № 9. — С. 155.
- viii. Prices and production efficiency. На конференции Междунар. экономич. ассоц., Афины, 31.08–04.09.1981. Соавт.: Макаров В. Л. Опубл. в [1984, 11].
- ix. Хозяйственный механизм на транспорте. На заседании Науч. совета АН по единой транспортной системе, 28.10.1981.
- x. Выступление на Всесоюзной научно-практической конференции «Вопросы теории и практики совершенствования механизма управления народным хозяйством в свете решений XXVI съезда КПСС», Москва, ЦЭМИ, 25–27.11.1981. Сообщ.: ВЭ. — 1982. — № 5.
- xi. Выступление на Международном симпозиуме «Прогнозирование науки и потребности человека: тенденции, методы, рекомендации», Тбилиси, 06–11.12.1981.
- xii. Экономика и современные средства управления в задаче совершенствования торговли. На Всесоюзном симпозиуме «Методологические проблемы совершенствования управления торговлей в свете решений XXVI съезда КПСС», Москва, 8–10.12.1981. Тезисы опубл. в [2]. Кр. излож.: ЭММ. — 1982. — Т. XVIII, вып. 4. — С. 739–741.
- xiii. О рациональном использовании топливно-энергетических ресурсов и направлениях экономики, связанных с развитием и функционированием транспорта. На Отделении физико-технических проблем энергетики, дек. 1981 г.

- xiv. Выступление на Отд. экономики АН по докладу С. С. Шаталина и В. Ф. Майера «О разделе «Социальные проблемы, повышение народного благосостояния и культуры» Комплексной программы НТП на 1986–2005 г.», 10.12.1981.
- xv. Некоторые направления совершенствования методики эффективности капиталовложений на транспорте. На совместном заседании транспортного совета и совета по эффективности 15.12.1981.

## 1982

1. Functional Analysis. — 2 ed. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1982. — 589 p. — Co-aut.: Akilov G. P.
2. Влияние превращаемости фондов и физического износа оборудования на экономическое развитие // Математические модели и статистический анализ научно-технического прогресса. — М., 1982. — С. 11–18. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 8). — Соавт.: Жиянов В. И.
3. О некоторых дискуссионных проблемах оценки эффективности капитальных вложений на транспорте // Определение эффективности капитальных вложений на транспорте. — М., 1982. — С. 51–67. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 8а). — Соавт.: Лившиц В. Н., Васильева Е. М., Фролова М. П.
4. О некоторых направлениях исследований в математической экономике // Итоги науки и техники. — М., 1982. — С. 3–21. — (Сер. Современ. пробл. математики; Т. 19). — Соавт.: Катышев П. К., Кирута А. Я., Полтерович В. М.
5. Автобиография Леонида Витальевича Канторовича // Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1982. — Вып. 28. — С. 50–57.
6. Математические методы и экономика // Развитие экономико-математических методов и их использование в подготовке специалистов по экономической кибернетике: Материалы учеб.-метод. конф., Таллин, 8–11 окт. 1980 г. — Тарту, 1982. — С. 13–19.
7. Математическая экономика // Математическая энциклопедия. — М., 1982. — Т. 3. — С. 584–591. — Соавт.: Макаров В. Л.
8. Транспортный фактор и тарифы в снижении ресурсоемкости и рациональном размещении производства // Роль цен и стандартов в ускорении научно-технического прогресса, улучшении качества продукции и снижении ее ресурсоемкости: (Тез. докл. и выступлений на Всесоюз. конф., Москва, 19–20 окт. 1982 г.). — М., 1982. — С. 11–13.
9. [Выступление в прениях на конференции Международной экономической ассоциации по актуальным транспортным проблемам, Москва, окт. 1979 г.: Излож.] // Транспорт на дальние расстояния: Материалы конф. — М., 1982. — С. 173–174.
10. [Выступление на пленуме Научного совета АН СССР по комплексной проблеме «Оптимальное планирование и управление народным хозяйством»] // Проблемы народнохозяйственного критерия оптимальности: Материалы дискус. — М., 1982. — С. 143–145. — (Пробл. современ. экономики).
11. Planning, mathematics and economics // Current Developments in the Interface: Economics, Econometrics, Mathematics. — Dordrecht, Holland etc., 1982. — P. 201–209.
12. [Выступление на общем годичном собрании Отделения экономики АН СССР, 1 марта 1982 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1982. — Т. 18, вып. 4. — С. 730.
13. [Экономика и современные средства управления в решении задачи совершенствования советской торговли: Выступление на совещ. по методол. пробл. совершенствования упр. торговлей, 8–10 дек. 1981 г.: Крат. излож.] // Там же. — С. 739.
14. [Об актуальных проблемах применения математических методов в экономике: Выступление на чествовании в связи с 70-летием со дня рождения Л. В. Канторовича, 10 февр. 1982 г.: Крат. излож.] // Там же. — С. 742–743.
15. Ред.: Математические модели и стилистический анализ научно-технического прогресса / Отв. ред. Л. В. Канторович, А. Г. Кругликов. — М.: ВНИИСИ, 1982. — 94 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 8).
16. Ред.: Определение эффективности капитальных вложений на транспорте / под ред. Л. В. Канторовича, В. Н. Лившица. — М.: ВНИИСИ, 1982. — 103 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 8а).
17. Предисловие // Там же. — С. 3–6. — Соавт.: Лившиц В. Н.

18. Ред.: Проблемы прогнозирования и оптимизации работы транспорта: сб. / под ред. Л. В. Канторовича, В. Н. Лившица. — М.: Наука, 1982. — 328 с.

Переводы:

[1976, 8] — Автобиография Леонида Витальевича Канторовича // Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1982. — Вып. 28. — С. 50–57.

[1977, 1] — Functional Analysis. — 2 ed. — Oxford etc.: Pergamon Press, 1982. — 589 p. — Co-aut.: Akilov G. P.

Доклады и выступления:

- i. Planning, Mathematics and Economics. На Междунар. симпозиуме “On the development in econometrics and related fields”, Erasmus University, Rotterdam, 12–15.01.1982. Опубл. в [9].
- ii. Математические методы и экономическая практика. На совместном заседании Отделения математики, Отделения экономики и Сибирского отделения АН, посвященного 70-летию Л. В. Канторовича, ЦЭМИ, 10.02.1982 г. Крат. излож.: ЭММ. — 1982. — Т. 18, вып. 4. — С. 741–743.
- iii. Выступление на общем годовичном собрании Отделения экономики АН, 01.03.1982. Крат. излож.: Там же. — С. 730.
- iv. Модели научно-технического прогресса и оценка вклада нововведений в развитие народного хозяйства. На международном семинаре ВНИИСИ и ПАСА «Системы и научные решения», Москва, 22.04.1982.
- v. Математическое моделирование в задачах системного анализа и его применение. Там же, 23.04.1982.
- vi. Выступление на Всесоюзном теоретическом семинаре «Хозяйственный механизм зрелого социализма и главные направления его развития», Рига, 12–14.05.1982.
- vii. Выступление на Президиуме АН по вопросу «О деятельности Отделения экономики», май 1982 г. Крат. излож.: Вестн. АН. — 1983. — № 12. — С. 14–15.
- viii. Единая транспортная система: основные проблемы. На пленарном заседании Научного совета по комплексной проблеме единой транспортной системы СССР, 24.05.1982.
- ix. Выступление на Всесоюзной конференции «Проблемы совершенствования системы цен в целях экономии и рационального использования сырьевых, топливно-энергетических и других материальных ресурсов», Москва, 15–16.06.1982. Кр. излож.: ВЭ. — 1982. — № 12. — С. 145–146.
- x. Проблемы развития внутригородского пассажирского транспорта. На совместном заседании транспортного совета и ленинградской секции совета по оптимальному планированию, Ленинград, 29–30.06.1982. Опубл. в [1984, 4].
- xi. Применение линейного программирования в СССР. На Международном симпозиуме по математическому программированию, Бонн, 23–27.08.1982. Кр. излож. в [1983, 10].
- xii. Некоторые экономические проблемы реализации Продовольственной программы СССР. На совместной сессии АН СССР и ВАСХНИЛ по Продовольственной программе, 22–23.09.1982 г. Опубл. в [1984, 6].
- xiii. Выступление в дискуссии на IV Всесоюзной школе «Многопроцессорные вычислительные системы», Звенигород, 27.09–03.10.1982.
- xiv. Возможности использования математико-экономических моделей в работе по Комплексной программе НТП. На методологическом семинаре ВНИИСИ, 14.10.1982.
- xv. Оптимизационные модели и экономическая практика. На пятых Немчиновских чтениях, 03.12.1982. Крат. излож.: ЭММ. — 1982. — Т. 19, вып. 3. — С. 550–551.

### 1983

1. Оптимизационные задачи в условиях автоматизированных систем управления: (Докл. на Второй конф. по оптим. планир. и упр. нар. хоз-вом). — М.: ЦЭМИ, 1983. — 29 с.
2. Az árak és a termelés hatékonysága // Alkalmazkodás az új Árvizonyokhoz. — Budapest, 1983. — P. 31–52. — Co-aut.: Makarov V. L.

3. Системные идеи в математике // Философско-методологические основания системных исследований (системный анализ и системное моделирование). — М., 1983. — С. 56–82. — Соавт.: Плиско В. Е.
4. Системный подход в методологии математики // Системные исследования: Методол. пробл.: Ежегодник, 1983. — М., 1983. — С. 27–41. — Соавт.: Плиско В. Е.
5. Математические системы и моделирование // Оптимальные модели в системном анализе. — М., 1983. — С. 3–13. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9). — Соавт.: Плиско В. Е.
6. Оптимизация потребления в непрерывной и дискретной моделях двухсекторной экономики // Там же. — С. 14–20. — Соавт.: Коркина Е. И., Хованский А. Г.
7. Взаимопроникновение наук в совершенствовании управления народным хозяйством // Диалектика в науках о природе и человеке: Тр. 3 Всесоюз. совещ. по философ. вопр. соврем. естествознания. — М., 1983. — [Ч. 3]: Единство и многообразие мира, дифференциация и интеграция научного знания. — С. 342–348.
8. Пути использования математического моделирования и ЭВМ в планировании социалистической экономики // Совершенствование методологии народнохозяйственного планирования в свете решений XXVI съезда партии и июньского [1983 г.] Пленума ЦК КПСС: Тез. докл. Всесоюз. науч. конф., Москва, окт. 1983 г.: Пленар. заседание. — М., 1983. — С. 28–32.
9. О направлениях совершенствования хозяйственного механизма на транспорте // Методологические проблемы совершенствования хозяйственного механизма: сб. — М., 1983. — С. 140–142. — Соавт.: Паенсон Н. В.
10. 11 Международный симпозиум по математическому программированию [Бонн, 23–27 авг. 1982 г.] // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1983. — № 1. — С. 197–201. — Совм. с др.
11. [О результатах применения математических методов в экономике: Выступление на Пярых Немчиновских чтениях, 3 дек. 1982 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1983. — Т. 19, вып. 3. — С. 550–551.
12. [Выступление на общем годичном собрании Отделения экономики АН СССР, 1 марта 1983 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1983. — Т. 19, вып. 4. — С. 725–726.
13. [Методологические проблемы оценки эффективности принципиально новой техники: Докл. на Всесоюз. науч.-практ. конф. по пробл. методологии и практики оценки эффективности хозяйств, мероприятий, Москва, 9–10 февр. 1983 г.: Крат. излож.] // Там же. — С. 729.
14. [Выступление на пленарном заседании Второй конференции по оптимальному планированию и управлению народным хозяйством, Москва, 20–22 апр. 1983 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1983. — Т. 19, вып. 5. — С. 930–931.
15. Асимптотическая оптимизация потребления в модели двусекторной экономики // Сиб. мат. журн. — 1983. — Т. 24, № 5. — С. 71–75. — Соавт.: Коркина Е. И., Хованский А. Г.
16. Ред.: Зиядуллаев Н. С. Математические методы в системах управления региональной экономикой / Отв. ред. — Ташкент: Фан, 1983. — 200 с.
17. Ред.: Оптимальные модели в системном анализе / Отв. ред. Л. В. Канторович, А. Г. Кругликов. — М.: [ВНИИСИ], 1983. — 136 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 9).

Переводы:

[1981, viii] — Az árak és a termelés hatékonysága // Alkalmazkodás az új Árvizonyokhoz. — Budapest, 1983. — P. 31–52. — Co-aut.: Makarov V. L.

Доклады и выступления:

- i. Методология оценки экономической эффективности и научно-технический прогресс. На Всесоюзной научно-практической конференции «Методология и практика оценки эффективности хозяйственных мероприятий», Москва, 9–10.02.1983. Крат. излож.: ЭММ. — 1983. — Т. 19, вып. 4. — С. 729.
- ii. Выступление на общем годичном собрании Отделения экономики АН СССР, 01.03.1983. Крат. излож.: ЭММ. — 1983. — Т. 19, вып. 4. — С. 725–726.
- iii. О развитии научных исследований по проблемам транспорта. На совместном заседании ОЭ и ОФТПЭ АН, 20.04.1983.

- iv. Выступление на расширенном заседании Научного совета ГКНТ по проблеме использования оптимизационных задач в АСУ на тему: «Оптимизация раскроя фигурных заготовок» Звенигород, 15–17.04.1983.
- v. Оптимизационные задачи в условиях автоматизированных систем управления. На Пленарном заседании Второй конференции «Экономико-математические методы и ЭВМ в оптимальном планировании и управлении народным хозяйством», ЦЭМИ, 20–22.04.1983. Оpubл. в [1]. Крат. излож.: ЭММ. — 1983. — Т. 19, вып. 5. — С. 930–931.
- vi. О работе секции «Методы и модели оптимального планирования и прогнозирования в отраслях», там же, 22.04.1983.
- vii. Выступление на Международной конференции “Peace and Science”, Сан-Ремо, май 1983 г.
- viii. Выступление на XIX общесетевой научно-технической конференции по совершенствованию эксплуатационной работы железных дорог с применением математических методов и ЭВМ, Москва, 18–20.05.1983.
- ix. Об оптимизации трубопрокатного производства. На расширенном бюро Научного совета ГКНТ по проблеме использования оптимизационных задач в АСУ, 09.06.1983.
- x. Основные предложения по совершенствованию тарифов на железнодорожном транспорте. На расшир. засед. Бюро Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. единой трансп. системы СССР, июнь 1983 г. Оpubл. в [1987, 9].
- xi. Dynamic models of Technological Change. На совещании в ИААСА «Экономические структурные сдвиги: проблемы анализа», авг. 1983 г.
- xii. Системный анализ и некоторые проблемы научно-технического прогресса. На Международном симпозиуме «Диалектика и системный анализ», Москва, 13–16.09.1983. Оpubл. в [1986, 1]. Москва, 13–16 сент., 1983 г. Крат. излож.: Вопр. философии. — 1984. — № 9. — С. 139.
- xiii. О работе Научного совета по комплексной проблеме единой транспортной системы СССР. На ОФТПЭ 04.10.1983.
- xiv. Выступление на Международной конференции по дифференциальным уравнениям с частными производными, посвященной 75-летию С. Л. Соболева, Новосибирск, 10–14.10.1983.
- xv. Пути использования математического моделирования и ЭВМ в планировании социалистической экономики. На Всесоюзной конференции «Совершенствование методологии народнохозяйственного планирования в свете решений XXVI съезда партии и июньского (1983 г.) Пленума ЦК КПСС, Москва, 19–21.10.1983. Тезисы оpubл. в [9]. Крат. излож.: ЭММ. — 1984. — Т. 20, вып. 2. — С. 361.
- xvi. О совершенствовании транспортных тарифов. На заседании Научного совета по комплексной проблеме единой транспортной системы, 19.11.1983.
- xvii. Значение ценовой системы для эффективности производства и технического прогресса. На научной сессии «Система цен в хозяйственном механизме» Межведомственного научного совета по проблемам ценообразования, Москва, 23–24.11.1983.
- xviii. Выступление на Президиуме АН по вопросу «О работе ЦЭМИ и развитии и практическом использовании математико-экономических методов в СССР», 15.12.1983. Кр. излож.: Вестн. АН. — 1984. — № 10. — С. 6–8.
- xix. Выступление на Советско-венгерском симпозиуме по проблемам экономики транспорта, Москва, дек. 1983 г. Крат. излож.: ВЭ. — 1984. — № 5. — С. 156.

## 1984

1. Функциональный анализ. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1984. — 752 с. — Соавт.: Акилов Г. П.
2. Предисловие к 3-му и 2-му изд. // Там же. — С. 7–10. — Соавт.: Акилов Г. П.
3. Проблемы совершенствования системы внегородских пассажирских сообщений // Развитие системы пассажирских сообщений. — М., 1984. — С. 5–33.
4. Проблемы развития внутригородского пассажирского транспорта // Проблемы развития систем городского пассажирского транспорта: Материалы совмест. заседания Бюро Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. един. трансп. системы СССР и Ленингр. террит. секции

- Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. «Оптим. планир. и упр. нар. хоз-вом», состоявшегося в Ленинграде 29–30 июня 1982 г. — Л., 1984. — С. 4–10.
5. Экономические проблемы ускорения научно-технического прогресса // Управление экономическим и социальным развитием в регионе: (сб. науч. тр.). — Донецк, 1984. — С. 10–16.
  6. Раскрыта задача // Математическая энциклопедия. — М., 1984. — Т. 4. — С. 868–870. — Соавт.: Залгаллер В. А.
  7. Pianificazione ottimale e sviluppo economico // Gaetano D. di. L'Economia Sovietica: uno Squardo dall'interno. — Milano, 1984. — P. 73–87.
  8. The economics of earthquake prediction // Earthquake Prediction: Proc. of the Int. Sympos. on Earthquake Prediction [Paris, Apr. 2–6, 1979]. — Tokyo, 1984. — P. 703–711. — Co-aut.: Keilis-Borok V. I.
  9. Prices and production efficiency // The Economics of Relative Prices: Proc. of a Conf. Held by the Int. Econ. Assoc. in Athens, Greece. — London, 1984. — P. 3–23. — Co-aut.: Makarov V. L.
  10. Некоторые экономические проблемы реализации Продовольственной программы СССР // Изв. АН СССР. Сер. биол. — 1984. — № 2. — С. 289–293.
  11. Цены и эффективность производства // Экономика и мат. методы. — 1984. — Т. 20, вып. 1. — С. 28–41. — Соавт.: Макаров В. Л.
  12. [Выступление на Всесоюзной научной конференции «Совершенствование методологии народнохозяйственного планирования в свете решений XXVI съезда партии и июньского (1983 г.) Пленума ЦК КПСС», Москва, 19–21 окт. 1983 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1984. — Т. 20, вып. 2. — С. 361.
  13. [Выступление на Ежегодных Немчиновских чтениях, 13 янв. 1984 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1984. — Т. 20, вып. 4. — С. 769.
  14. Владимир Иванович Соболев: (К семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. — 1984. — Т. 39, вып. 4. — С. 179–180. — Совм. с др.
  15. Рафаэль Арамович Александрян: (К шестидесятилетию со дня рождения) // Там же. — С. 181–182. — Соавт.: Мергелян С. Н., Олейник О. А., Соболев С. Л.
  16. [Выступление на Советско-венгерском симпозиуме по проблемам экономики транспорта, Москва, дек. 1983 г.: Крат. излож.] // Вопр. экономики. — 1984. — № 5. — С. 156.
  17. [Выступление на международном симпозиуме «Диалектика и системный анализ», Москва, 13–16 сент., 1983 г.: Крат. излож.] // Вопр. философии. — 1984. — № 9. — С. 139.
  18. Советские ученые в защиту Пелтиера: [Письмо президенту США Р. Рейгану] // Известия. — 1984. — 26 июня. — Моск. веч. вып. — Совм. с др.
  19. Ред.: Проблемы развития систем городского пассажирского транспорта: Материалы совмест. заседания Бюро Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. «Единая транспорт. система СССР» и Ленингр. террит. секции Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. «Оптим. планир. и упр. нар. хоз-вом», состоявшегося в Ленинграде 29–30 июня 1982 г. / Отв. ред. — Л.: Наука, 1984. — 84 с. — Совм. с др.
  20. Ред.: Развитие системы пассажирских сообщений: сб. ст. / Отв. ред. Л. В. Канторович, Н. И. Бешева. — М.: Наука, 1984. — 169 с.
  21. Ред.: Совершенствование хозяйственного механизма на транспорте / Отв. ред. Л. В. Канторович, Е. Ф. Тихомиров. — М.: ЦЭМИ, 1984. — 223 с.
  22. Ред.: Теория, методология и практика системных исследований: Всесоюз. конф., 29–31 янв. 1985 г. Секция 7. Систем. исслед. науч.-техн. развития: тез. докл. / Отв. ред. вып. — М.: Наука, 1984. — 144 с.

Переводы:

[7] — Prices and Production efficiency // Matekon. — 1984. — Vol. XXI, N 1. — Co-aut.: Makarov V. L.

Доклады и выступления:

- i. Выступление на Немчиновских чтениях, 13.01.1984. Крат. излож.: ЭММ. — 1984. — Т. 20, вып. 4. — С. 769.

- ii. Выступление на Всесоюзной научно-практической конференции «Совершенствование управления экономикой развитого социализма», Москва, 29.02–01.03.1984.
- iii. Выступление на совещании в Отделе науки ЦК по вопросу о «О состоянии разработки и направлениях развития методов экономико-математического моделирования», 20.03.1984.
- iv. Выступление на Межведомственном совете по ценам по докладу Н. Я. Петракова «Проблема согласования политики доходов, цен и предложения товаров», 19.04.1984.
- v. Современное состояние разработки и использования оптимизационных задач в АСУ. На II Всесоюзной школе-семинаре по оптимизации и ее приложениям в экономике, Ашхабад, 15–22.05.1984.
- vi. Проблемы повышения эффективности транспорта Сибири. На Всесоюзной конференции «Развитие производительных сил Сибири и задачи ускорения НТП», Новосибирск, 27–29.05.1984. Соавт.: Паенсон Н. В. Оpubл. в [1985, 6].
- vii. Экономические проблемы ускорения научно-технического прогресса. На научной сессии «Региональные проблемы научно-технического прогресса», Донецк, 28.05.–01.06.1984. Оpubл. в [5].
- viii. Проблемы развития транспортной системы СССР. На научно-координационном совещании вузов страны по проблеме «Совершенствование планирования региональной производственной инфраструктуры», Томск, 20–22.06.1984.
- ix. О некоторых проблемах математической экономики. На симпозиуме «Современные проблемы математической экономики», Вильнюс, 03–04.07.1984.
- x. Mathematical methods in planning and economic decisions. Лекция в UNIDO, Вена, 30.08.1984.
- xi. Models of Control Dynamic Processes and their Application. Лекция в IIASA, 07.09.1984.
- xii. Выступление на заседании Ученого совета Университета им. Мартина Лютера в связи с присуждением степени почетного доктора, окт. 1984 г. Оpubл. в [1989, 1]. С. 13–18.
- xiii. Выступление на Всесоюзной конференции «Социальные и методологические проблемы научно-технического прогресса», Москва, 14–15.11.1984.
- xiv. Работу АСУ — на условия экономического эксперимента. Выступление на «Круглом столе» редакции ЭММ «Проблемы и перспективы развития автоматизированных систем управления» 05–06.12.1984. Оpubл. в [1985, 7].

## 1985

1. Ekonomski Račun Optimalnog Korištenja Resursa. — Zagreb: Izdanja Centra za Kulturnu Djelatnost, 1985. — 265 p.
2. Сопоставление моделей и оценка влияния сокращения лага строительства и лага НТП на динамику экономических показателей // Системное моделирование и оптимизационные методы в исследованиях научно-технического прогресса. — М., 1985. — С. 3–13. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 7). — Соавт.: Коркина Е. И., Хованский А. Г.
3. Пути использования математического моделирования и ЭВМ в планировании // Планирование, технический прогресс, эффективность. — М., 1985. — С. 211–217.
4. Die Entwicklung von Optimierungsmethoden in der UdSSR // Ökonomie und Optimierung. — Berlin, 1985. — S. 11–96.
5. The application of linear programming algorithms to some large scale problems // 12 International Symposium on Mathematical Programming, Cambridge (Massachusetts) Aug. 5–9, 1985. — P. 50A. — Co-aut.: Romanovsky I. V.
6. Генерирование столбцов в симплекс-методе // Экономика и мат. методы. — 1985. — Т. 21, вып. 1. — С. 128–138. — Соавт.: Романовский И. В.
7. Работу АСУ — на условия экономического эксперимента // Экономика и мат. методы. — 1985. — Т. 21, вып. 4. — С. 740–741.
8. [Выступление на общем годичном собрании Отделения экономики АН СССР, 11 марта 1985 г.: Крат. излож.] // Экономика и мат. методы. — 1985. — Т. 21, вып. 5. — С. 944.
9. [Выступление на Всесоюзном семинаре «Теория, методология и практика системных исследований», Москва, 21–31 янв. 1985 г.: Крат. излож.] // Там же. — С. 946.

10. Научно-технический прогресс — экономические проблемы // Экономика и орг. пром. пр-ва (ЭКО). — 1985. — № 1. — С. 3–26.
11. В поисках нового: [О науч. деятельности В. Г. Болтянского] // Математика в шк. — 1985. — № 2. — С. 68–72. — Совм. с др.
12. Единая транспортная: [О развитии един. трансп. системы] // Соц. индустрия. — 1985. — 3 апр.
13. Ред.: Системное моделирование и оптимизационные методы в исследованиях научно-технического прогресса / Отв. ред. Л. В. Канторович, А. Г. Кругликов. — М.: ВНИИСИ, 1985. — 140 с. — (ВНИИСИ. Сб. тр.; Вып. 7).

Переводы:

[1959, 2] — Ekonomski Račun Optimalnog Korištenja Resursa. — Zagreb: Izdanja Centra za Kulturnu Djelatnost, 1985. — 265 p.

Доклады и выступления:

- i. Моделирование научно-технического прогресса. На Всесоюзном семинаре «Теория, методология и практика системных исследований», Москва, 21–31.01.1985. Крат. излож.: ЭММ. — 1985. — Т. 21, вып. 5. — С. 946; Вопр. философии. — 1985. — № 12. — С. 140–141.
- ii. Об улучшении качества энергетического угля, его учета и оценке стоимости в зависимости от калорийности. На заседании временной научно-технической комиссии ГКНТ по совершенствованию поставок и использования энергетического угля на основе учета его теплотворной способности, февр. 1985 г.
- iii. Выступление на общем годичном собрании Отделения экономики АН, 11.03.1985. Крат. излож.: ЭММ. — 1985. — Т. 21, вып. 5 — С. 944.
- iv. The application of linear programming algorithms to some large scale applied problems. На 12 Международном симпозиуме по математическому программированию, Cambridge, Massachusetts, 05–09.08.1985. — Соавт.: Романовский И. В.
- v. Выступление на юбилейной конференции в ЛГУ в связи с 25-летием VI курса, сент. 1985 г. Крат. излож.: ЭММ. — 1986. — Т. 22, вып. 3. — С. 560–562.
- vi. Выступление на Научно-техническом совете МПС по докладу Ю. Н. Полякова «О продукте транспорта и его измерителе», 21.09.1985.
- vii. О роли транспорта в решении социальных проблем общества и значении социального аспекта в развитии транспорта. Вступительное слово к заседанию Научного совета АН по единой транспортной системе, сент. 1985 г.
- viii. Выступление на Государственной экспертной комиссии Госплана СССР по обсуждению «Методических указаний по комплексной оценке мероприятий по новой технике, направленных на ускорение НТП», 22.10.1985.
- ix. О результатах работы по теме «Методы моделирования НТП» за 1982–1985 гг. На ученом совете ВНИИСИ, 16.11.1985.
- x. О совершенствовании механизма взаимодействия транспорта с народным хозяйством. На Всесоюзной конференции «Основные экономические проблемы транспорта», Москва, 1985 г. — Соавт.: Паенсон Н. В.

Рукописи:

1. Некоторые предложения по совершенствованию методики формирования автомобильных грузовых тарифов (май 1985). Оpubл. в [1987, 10].

## 1986

1. Системный анализ и некоторые проблемы научно-технического прогресса // Диалектика и системный анализ. — М., 1986. — С. 158–166.
2. О вкладе А. Г. Пинскера в теорию полуупорядоченных пространств и векторную оптимизацию // Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1986. — Вып. 37. — С. 7–12.



3. Шире использовать оптимизационные методы в народном хозяйстве // Коммунист. — 1986. — № 9. — С. 44–54. — Соавт.: Албегов М., Безруков В.
4. Архитектура будущих ЭВМ // Природа. — 1986. — № 7. — С. 3–15. — Соавт.: Фет Я. И.
5. Транспорт и экономика // НТП: Пробл. и решения. — 1986. — 4–17 марта. — С. 5.
6. Scientific-technical progress: Econ. probl. // Probl. Econ. — 1986. — Vol. 28, N 10. — P. 3–25.
7. Прогресс и цены: [О системе ценообразования. Беседа] // Известия. — 1986. — 15 февр. — Моск. веч. вып.

Переводы:

[1985, 5] — Scientific-technical progress: Econ. probl. // Probl. Econ. — 1986. — Vol. 28, N 10. — P. 3–25.

Рукописи:

1. Заявление, подготовленное к Общему собранию АН СССР, проходившему 19–21.03.1986. Оubl. в [2004, 4], С. 255–258.

### 1987

1. Некоторые вопросы совершенствования механизма взаимодействия транспорта с другими отраслями народного хозяйства // Совершенствование хозяйственного механизма на железнодорожном транспорте. — М., 1987. — С. 12–25. — Соавт.: Паенсон Н. В.
2. Фундаментальная идея оптимизации // Достижения фундаментальных наук — производству. — М., 1987. — С. 18–30. — (Ускорение науч.-техн. прогресса).
3. Роль ценового механизма в повышении эффективности народного хозяйства: (Тез. докл. на Всесоюз. совещ. по вопр. ценообразования, Москва, 1981) // Проблемы совершенствования системы транспортных тарифов: [сб. ст.]. — М., 1987. — С. 11–16.
4. Некоторые теоретические вопросы построения системы пассажирских тарифов: (Докл. на науч.-техн. конф. «Система пассажир. тарифов на трансп. СССР и пути ее совершенствования», дек. 1966 г.) // Там же. — С. 17–22.
5. Транспортный фактор и тарифы в снижении ресурсоемкости и рациональном размещении производства: (Тез. докл. на Всесоюз. конф. «Роль цен и стандартов в ускорении науч.-техн. прогресса, улучшении качества продукции и снижении ее ресурсоемкости», Москва, сент. 1982 г.) // Там же. — С. 23–25.
6. Основные предложения по совершенствованию тарифов на железнодорожном транспорте: (Докл. на расшир. засед. Бюро Науч. совета АН СССР по комплекс. пробл. единой трансп. системы СССР, июнь 1983 г.) // Там же. — С. 26–28.
7. Некоторые предложения по совершенствованию методики формирования автомобильных грузовых тарифов (май 1985) // Там же. — С. 29–30.
8. Мысли и соображения по тарифам // Там же. — С. 33–49.
9. Мой путь в науке: (Предполагавшийся докл. в Моск. мат. о-ве) // Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 2. — С. 183–213.
10. Функциональный анализ (Основные идеи) // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28, № 1. — С. 7–16.
11. Оптимизационные методы и автоматизированные системы управления в задачах совершенствования хозяйственного механизма // Вестн. ЛГУ. Сер. 5. Экономика. — 1987. — Вып. 2. — С. 63–75.
12. «Смотреть на правду открытыми глазами!»: Последнее интервью выдающегося ученого // Неделя. — 1987. — 3–9 авг. — С. 10.
13. Ред.: Пути совершенствования транспортного строительства: [сб. ст.] / Отв. ред. Л. В. Канторович, Г. С. Переселенков. — М.: Наука, 1987. — 138 с.

Переводы:

[1] — My journey in science // Russian Math. Surves. — 1987. — Vol. 42, N 2.

## 1988

1. Основные проблемы развития пассажирского транспорта крупных городов // Городской пассажирский транспорт: Экономика, организация, транс.: Градостр. проектирование: Материалы Всесоюз. науч.-практ. конф. «Совершенствование сист. пассажир. сообщ. крупных городов и агломераций», сост. в Ленинграде 1–3 апр. 1986 г. — Л., 1988. — С. 8–11.

## 1989

1. Проблемы эффективного использования и развития транспорта. — М.: Наука, 1989. — 304 с.
2. О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта // Экономико-математические модели и методы. — Воронеж: Изд-во Воронежск. ун-та, 1989. — С. 13–18.
3. Выступление на заседании Ученого совета Университета им. Мартина Лютера в связи с присуждением степени почетного доктора, окт. 1984 г. // Там же. — С. 20–25.

## 1990

1. О состоянии и задачах экономической науки // Экономика и мат. методы. — 1990. — Т. 26, № 1. — С. 5–14.

Переводы:

[1985, 9] — Развитие оптимизационных методов в СССР // Канторович Л. В. и др. Экономика и оптимизация. — М.: Наука, 1990. — С. 5–65.

[1987, 1] — My journey in science // Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics. — New York; Oxford: Oxford University Press, 1990. — P. 8–45.

## 1991

1. Показатели работы предприятий нуждаются в пересмотре [1943, 1] // Оптимизация: сб. тр. [Ин-та математики СО АН СССР]. — Новосибирск, 1991. — Вып. 50 (67) [К 80-летию академика Л. В. Канторовича. Часть I]. — С. 16–44.
2. Письма Г. М. Маленкову, В. М. Молотову и В. Н. Старовскому, 1943–44 гг. // Там же. — С. 47–54.
3. Выступление на Отделении экономич., философ. и прав. наук АН, 25.03.1959 [1959, iii] // Там же. — С. 55–59.
4. Стенограмма доклада Л. В. Канторовича на обсуждении его книги «Экономический расчет наилучшего использования ресурсов» на Методологическом семинаре МГУ 25 мая 1961 г. [1961, iv] // Там же. — С. 61–88, 116–119.

## 1996

1. Selected Works. Part 1: Descriptive Theory of Sets and Functions. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces / Ed. by S. S. Kutateladze. — London: Gordon and Breach, 1996. — 374 p. [1987, 1] — P. 17–54, [1929, 4] — P. 55–61, [1929, 1] — P. 62–68, [1929, 5] — P. 69–72, [1930, 8] — P. 73–76, [1931, 3] — P. 77–79, [1932, 1] — P. 80–98, [1932, 2] — P. 99–103, [1932, 3; 1933, 5] — P. 104–200, [1937, 10] — P. 201–202, [1935, 3] — P. 203–206, [1935, 4] — P. 207–212, [1935, 2] — P. 213–216, [1937, 9] — P. 217–264, [1940, 3] — P. 265–341, [1939, 3] — P. 342–371.
2. Selected Works. Part 2: Applied Functional Analysis. Approximation Methods and Computers / Ed. by S. S. Kutateladze and J. V. Romanovsky. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1996. — 394 p. [1931, 1] — P. 7–16, [1931, 2] — P. 17–20, [1930, 3, 4] — P. 21–29, [1934, 8] — P. 30–33, [1933, 3] — P. 34–38, [1933, 4 + (1937, 1)] — P. 39–73, [1934, 5] — P. 74–94, [1934, 6] — P. 95–103, [1934, 7] — P. 104–115, [1934, 2] — P. 116–118, [1941, 3] — P. 119–124, [1941, 4] — P. 125–129, [1941, 2] — P. 130–140, [1942, 2] — P. 141–152, [1945, 1] — P. 153–159, [1947, 1] — P. 160–164, [1948, 2] — P. 165–170, [1948, 4] — P. 171–280, [1949, 5] — P. 281–284, [1949, 4] — P. 285–325,

[1957, 1] — Р. 326–363, [1948, 7] — Р. 364–366, [1956, 2] — Р. 367–374, [1957, 5] — Р. 375–387, [1969, 4] — Р. 388–393.

### 1998

1. Мой путь в науке ([1987, 1], фрагменты) // Очерки по истории информатики в России / Сост. Д. А. Поспелов и Я. И. Фет. — Новосибирск: ОИГГМ СО РАН, 1998. — С. 417–428.
2. Перспективы развития и использования электронных счетных машин [1956, 2] // Там же. — С. 429–436.
3. Выступление на общем годовичном собрании Академии наук СССР 27 марта 1959 г. [1959, iii] // Там же. — С. 437–445.

Переводы:

[1976, 8] — Автобиография // Там же. — С. 506–511.

### 1999

1. Подборка документов и писем: Из истории экономической мысли // ЭММ. — 1999. — Т. 35, № 3. — С. 25–42.

Переводы:

[1956, 2] — Electronic computing machines // Mathematics: Its Content, Methods and Meaning / Ed. by A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev. — Reprint of the 2nd 1969 ed. — Mineola; New York: Dover Publications, 1999. — xviii, 372 p. — Co-aut.: Lebedev S. A.

### 2000

1. К 40-летию первого научного совещания по применению математических методов в экономических исследованиях и планировании 04.1960 г. (Стенограммы выступлений Л. В. Канторовича на совещании) // ЭММ. — 2000. — Т. 36, № 2. — С. 28–40.

### 2001

1. Принципы методики определения целесообразной степени рассредоточения и сравнительной оценки различных мер повышения живучести // Сиб. журн. индустр. мат. — 2001. — Т. 4, № 2 (8).

### 2002

1. Леонид Витальевич Канторович: Человек и ученый: в 2 т. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, фил. «Гео», 2002. — Т. 1. — 544 с., ил. 48 с.

### 2003

1. Математические методы — экономике: [К присуждению Л. В. Канторовичу и Т. Купмансу Нобелевской премии по экономике 1975 г. Беседа] [1975, 10] // История информатики в России: Ученые и их школы / Сост.: В. Н. Захаров, Р. И. Подловченко, Я. И. Фет. — М.: Наука, 2003. — С. 56–60.

### 2004

1. Функциональный анализ. — 4-е изд. [1959, 1], испр. — СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. — 816 с. — Соавт.: Акилов Г. П.
2. О перемещении масс [1942, 1] // Теория представлений, динамические системы. XI. Специальный выпуск. — СПб., 2004. — С. 11–14. — (Зап. науч. семин. ПОМИ, Т. 312).
3. Об одной проблеме Монжа [1948, 6] // Там же. — С. 15–16.
4. Леонид Витальевич Канторович: Человек и ученый: в 2 т. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, фил. «Гео», 2004. — Т. 2. — 613 с., ил. 40 с.

**2006**

1. On the translocation of mass // J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 133, N 4. P. 1381–1382.
2. On a problem of Monge // Ibid. — 2006. — P. 1383 .

**2009**

1. Zur allgemeinen Theorie der halbgeordneten Räume (accepted for publication in "Izvestija Tomskogo Universiteta" on 31 August, 1939) // J. Approx. Theory. — 2009. — Vol. 156, N 1. — P. 28–51. (With G.R. Lorentz).

## Список соавторов

- Аганбегян А.Г. 1961, 1962 (ред.).  
Акилов Г.П. (Akilov G.P.) [1959, 1], [1963, 4], [1967, 1], [1977, 1, 2], [1984, 1, 2], [2004, 1]. Переводы: 1964 (2), 1967 (2), 1980, 1981, 1982.  
Албегов М.М. [1986, 3].  
Безруков В. [1986, 3].  
Бещева Н.И. 1984 (ред.).  
Бицадзе А.В. [1968, 7], [1969, 6].  
Богачев В.Н. (Bogachev V.) [1969, 1], [1970, 4], [1974, 13]. Переводы: 1970, 1972, 1976.  
Булавский В.А. [1964, 3, iv].  
Вайнштейн А.Л. (Vainstein A.) [1967, 2], [1970, 3]. Переводы: 1970, 1976 (2).  
Валландер С.В. [1957, 1, 2], [2002, 1].  
Васильев Е.М. [1982, 2].  
Вилькович Е.В. [1970, 8], [1971, 2].  
Вирченко М.И. [1970, 2, ii], [1971, 3], [1973, xiv], [1974, 6], [1975, v], [1979, xiii], [1980, 3].  
Владимиров Д.А. [1963, 4], [1966, 13].  
Вулик Б.З. (Vulikh B.) [1937, 11], [1938, 4], [1950, 1], [1951, 4], [1966, 13]. Переводы: 1958, 1960.  
Гавурин М.К. (Gavurin M.) [1940, 1], [1941, i], [1948, 7], [1949, 2], [1954, 1], [1959, 6], [1977, 5], [2004, 4]. Переводы: 1996, Part II.  
Глобенко И.Г. (Globenko I.) [1967, 7, 8]. Переводы: 1967 (2), 1976 (2).  
Голузин Г.М. 1937 (ред.).  
Гольштейн Е.Г. (Gol'shtein E.G.) [1971, ix], [1972, 3]. Переводы: 1976.  
Горстко А.Б. (Gorstko A.B.) [1964, 7], [1967, 10], [1968, 1], [1971, 11], [1972, 1], [1975, 9]. Переводы: 1969, 1976, 1977.  
Горьков Л.И. [1959, 5].  
Гурвич Ф.Г. [1974, 12].  
Дудин-Барковский Л.В. 1968 (ред.).  
Ершов Э.Б. [1984, 11].  
Журавель А. (Zhuravel' A.) [1974, 2]. Переводы: 1974.  
Заглядимов М.П. [1978, 13], [1980, 6].  
Залгаллер В.А. (Zalgaller V.A.) [1951, 1], [1971, 1], [1984, 8]. Переводы: 1972.  
Зорин Ю.М. (Zorin Yu.M.) [1978, 7, 10, xix]. Переводы: 1979, 1981 (2).  
Иванов А.А. [1958, 7], [1959, 11].  
Иловайский И.В. [1966, 15], [1968, 11].  
Канторович (Романовская) И.Л. [1958, 5].  
Катышев П.К. [1982, 3].  
Кейлис-Борок В.И. (Keilis-Borok V.I.) [1970, 8], [1971, 2], [1973, 2], [1984, 13].  
Кирута А.Я. [1982, 3].  
Коркина Е.И. [1983, 5, 6], [1985, 1].  
Кошелев А.И. [1978, 15].  
Кругликов А.Г. [1977, viii], [1978, 4, 5], [1979, 3], 1982, 1983, 1985 (ред.).  
Крылов В.И. (Krylov V.I.) [1933, 1], [1936, 1], [1941, 1], [1948, 1], [1949, 1], [1950, 2], [1952, 1], [1956, 1], [1962, 1]. Переводы: 1953, 1956, 1958 (2), 1964.  
Куликов Б.И. [1974, 14].  
Купманс Т. (Koormans T.C.) [1976, 7].  
Лаврентьев М.А. [1968, 7], [1969, 6].  
Лебедев С.А. (Lebedev S.A.) Переводы 1963, 1999.  
Ливенсон Е.М. (Livenson E.) [1930, 5, 6], [1932, 3], [1933, 5], [1937, 10]. Переводы: 1996, Part I.  
Лившиц В.Н. [1982, 2, 10], 1982 (ред. (2)).  
Лоренц Г.Р. [1939, 1].  
Люстерник Л.А. [1956, 3, iii].  
Макаров В.Л. (Makarov V.L.) [1965, 2], [1967, 4], [1970, 4, 6, 11], [1971, 4, vi, ix], [1972, 3, viii], [1975, 1], [1977, 4], [1981, 3, i, viii], [1982, 8], [1984, 7, 12]. Переводы: 1972, 1976 (3), 1978, 1983, 1984.  
Мергелян С.Н. [1984, 10].  
Можин В.П. 1971 (ред.), [1971, 13].  
Молчан Г.М. [1970, 8], [1971, 2], [1973, 2].

- Натансон** И.П. [1938, 5], [1941,5], [1948, 9, 10], [1958, 8], [1959, 12, 13], [1963, 4].  
Новожиллов В.В. 1959, 1961 (ред.).
- Овсиенко** Ю.В. [1975, 6].  
**Олейник** О.А. [1978, 15], [1984, 10].
- Паенсон** Н.В. [1978, 6], [1978, viii], [1980, 1, 5], [1981, 7], [1983, 9], [1984, vi], [1985, 6, xii], [1987, 5].  
Переселенков Г.С. 1987 (ред.).  
Петров Ю.П. [1959, 16].  
Петрова Л.Т. [1956, 4, ii, iv], [1958, 2], [1974, 4].  
**Пинскер** А.Г. (Pinsker A.) [1938, 3], [1939, 4], [1950, 1], [1951, 4], [1966, 5], [1971, 5]. Переводы: 1958, 1960.  
**Плиско** В.Е. [1983, 2, 3, 4].  
**Полтерович** В.М. (Polterovich V.) [1982, 3], [1987, 13].  
**Полубаринова-Кочина** П.Я. 1968 (ред.).  
**Поснов** Н.Н. [1959, 16].
- Романовский** И.В. (Romanovsky I.V.) [1962, 3, 4], [1965, 3, ii], [1966, 1], [1971, 9, 10, ix], [1972, 3], [1975, 3, 7, 8], [1976, 3, 15], [1977, 6, 11], [1980, 2], [1985, 2, 10, vi]. Переводы: 1976, 1978 (3).
- Рубинштейн** Г.Ш. (Rubinshtein G.Sh.) [1957, 3], [1958, 1, 6, ii], [1959, 10], [1967, 1], [1970, 11]. Переводы: 1967.
- Смирнов** В.И. [1933, 1], [1948, 9, 10].
- Соболев** С.Л. [1956, 3, iii], [1965, 3], [1978, 15], [1979, 4], [1984, 10], [2004, 4].
- Тартаковский** В.А. [1938, 5].  
**Тихомиров** Е.Ф. 1984 (ред.).  
**Толстьев** В.П. (Tolst'ev V.P.) [1971, 14], [1972, 9], [1973, 8, 9, 10, 11].  
**Фаддеев** Д.К. [1956, 7].  
**Фаддеева** В.Н. [1962, 6], 1962 (ред.).  
**Фет** Я.И. (Fet Ya.I.) [1965, 13], [1966, 15], [1968, 11], [1971, 4, 14], [1972, 9], [1973, 8, 9, 10, 11], [1974, 4, 14], [1979, 11], [1986, 4].  
Переводы: 1996, Part II.  
**Фихтенгольц** Г.М. (Fichtenholz G.M.) [1934, 3, 9], [1938, 1].  
**Фролова** М.П. [1982, 2].  
**Фрумкин** П.Б. [1937, 8].
- Хованский** А.Г. [1978, 1, 3], [1983, 5, 6], [1985, 1].
- Чернин** К.Е. (Chernin K.E.) [1956, 1].  
Переводы: 1964.  
**Чешенко** Н.И. (Cheshenko N.I.) [1978, 7]. Переводы: 1979, 1981 (2).
- Шестакова** Н.Б. [1974, 6], [1975, v].  
**Шепелев** Г.И. (Shepelev G.I.) [1978, 7, 10, xix]. Переводы: 1979, 1981 (2).
- Эпштейн** В.Л. [1954, 1].
- Яковлева** М.А. [1956, ii], [1958, 2].

## Содержание

О томе математико-экономических работ Л. В. Канторовича .....	3
<i>Кутателадзе С. С.</i> Канторович и математизация экономики .....	10
Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности .....	20
Обзор научных трудов .....	26
Математические методы организации и планирования производства .....	42
Экономический расчет наилучшего использования ресурсов .....	99
Показатели работы предприятий нуждаются в пересмотре .....	382
Об исчислении общественно-необходимого времени в условиях социалистического общества .....	401
Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков .....	439
Комментарии к работе «Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков» .....	463
Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте .....	477
Комментарии к работе «Подбор поставов, обеспечивающих максимальный выход пилопродукции в заданном ассортименте» .....	488
Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем .....	497
О перемещении масс .....	502
Комментарии к работе «О перемещении масс» .....	505
О методах анализа некоторых экстремальных планово-производственных задач .....	508
Рациональные методы раскроя металла .....	513
Об одном эффективном методе решения экстремальных задач для квадратичных функционалов .....	527

Функциональный анализ и прикладная математика .....	533
Расчет рационального раскроя промышленных материалов .....	550
О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели .....	600
О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений .....	604
Математические и вычислительные проблемы в планово-экономических вопросах .....	613
О некоторых математических проблемах экономики промышленности, сельского хозяйства и транспорта. I .....	626
<i>Кэмпбелл Р.</i> Маркс, Канторович и Новожилов. Стоимость против реальности .....	635
<i>Йохансен Л.</i> Вклад Л. В. Канторовича в экономическую науку .....	652
Литература о жизни и трудах Л. В. Канторовича .....	671
Список авторов .....	694
Хронологический указатель трудов .....	697
Список соавторов .....	755



Научное издание

**Канторович Леонид Витальевич**  
**МАТЕМАТИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ РАБОТЫ**  
Серия «Избранные труды»

Редакторы *Ю. В. Барышева, В. Н. Дятлов*  
Художественный редактор *Л. В. Матвеева*  
Художник *Н. А. Горбунова*  
Технический редактор *Н. М. Остроумова*  
Корректоры *И. Л. Мальшева, Л. А. Анкушева*  
Оператор электронной верстки *В. Н. Дятлов*

Издание подготовлено с использованием макропакета *AMS-TEX*

---

Сдано в набор 12.06.2010. Подписано в печать 30.12.2011.

Бумага ВХТ. Формат  $70 \times 100^{1/16}$ . Офсетная печать.

Усл. печ. л. 61 +0,1 вкл. на мел. бум. Уч.-изд. л. 60. Тираж 400 экз. Заказ 563.

---

Сибирская издательская фирма «Наука» РАН. 630007, Новосибирск, ул. Коммунистическая, 1.  
СП «Наука» РАН, 630077, Новосибирск, ул. Станиславского, 25.